**MAT-KOL (Banja Luka)** **ISSN 0354-6969 (p)**
**XXV (4)(2019),** 237-241 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1904237M

# Неке цртице о непрекидности пресликавања у математици

**Павле М. Миличић**

**Сажетак**. Неколико цртица о непрекидности пресликавања у математици је презентирано у овом тексту.

# Some commentary on the continuity of mapping in mathematics

**Pavle Miličić**

**Summary**. Several lines on the continuity of mapping in mathematics are presented in this text.

Поред појма *функције* (*једнозначног пресликавања са* $\mathbb{R}$ *у* $\mathbb{R}$), неоспорно, појам *граничне вредности* (*лимеса*) функције је основни појам реалне математичке анализе (*MA*), па и анализе у најопштијим *метричким просторима* ($M$, $d$). Помоћу тог појма дефинисани су остали фундаментални појмови *MA* као што су *бесконачно мала величина, бесконачно велика величина, непрекидност функције (непрекидност пресликавања), извод функције, интеграл* функције итд. Иако је идеја о граничној вредности постојала још од античког времена, прву модерну формулацију граничне вредности функције је дао италијански математичар Болцано (B. Bolzano, 1781-1848) у радовима из 1816. и 1817, али су ти радови постали шире познати тек након његове смрти. Коши (A. Cauchy, 1789-1857) је први решио да заснује *MA* на појму границе (*лимеса*). Пре њега је Валис (J. Walis, 1616-1703) покушао да то учини у спису „Аритметика бесконачно малих“ 1655. Такође је Даламбер (J. R. D'Alemberet, 1717-1783) у чланку „Граница“ писану за Енциклопедију 1751-1766. покушавао да постави основе *MA*. Њутнов учитељ Исак Бароу (Isac

Barrow, 1630-1677) је 1670. поставио проблем дефинисања тангенте криве у тачки па се појавио проблем дефинисања извода у тачки. Коначно, Коши је 1829. у својој књизи „Курс алгебарске анализе“ дао основе *МА*: појам функције, појам границе, појам непрекидности, појам извода и појам интеграла. Међутим како је он дао само вербалну дефиницију лимеса, формална дефиниција граничне вредности, у *„епсилон-делта“* форми, се обично приписује Вајерштрасу (K. Weierstrass, 1815-897). Вајерштрасови радови које је приказивао на Берлинском универзитету у времену 1858-1859 су у потпуности посвећени фундирању *МА*. Он је ослободио основе *МА* од зависности кретања, од интуитивних предрасуда и геометријских очигледности који су били присутни у дотадашњим покушајима да се направе основе МА. Њему је било суђено да заврши фундирање *МА*. Данашњу формалну дефиницију непрекидности функције у тачки такође је дао Вајерштрас крајем 19. века. До њега су постојале само интуитивне претставе о изводу у тачки ( као тангенсу угла кога тангента у тој тачки гради са x-осом) и о непрекидности криве ( крива коју можете нацртати једним потезом оловке, без подизања оловке са папира). Данас се сматра да су творци „диференцијалног и интегралног рачуна“ Њутн и Лајбниц. И зна се, ако је фукција y=f(x) дефинисана у некој околини тачке *а* да је функција непрекидна у тој тачки ако је $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ и да је извод у тој тачки, ако постоји, дефинисан са $\acute{f}(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Сама чињеница да је тачна дефиниција појма граничне вредности дефинисана тек у 19. веку (а из те дефиниције су проистекли најважнији појмови савремене *МА*) говори о тешкоћама које су пратиле фундирање и стварање *МА,* без обзира што су је стварали највећи светки математичари као што су Декарт, Ферма, Паскал, Хајгенс, Валис, Њутн ,Лајбниц, Ојлер, Лагранж, Вајерштрас и други. Главни узрок тих тешкоћа је био немање поља реалних бројева. Велике тешкоће су пратиле дефинисања појмова *бесконачно малих, бесконачно великих*, *извода функције* у тачи и *непрекидности функције* у тачки. Узајамни однос појмова диференцијабилности и непрекидности није био јасан ни великим математчарима као што је Коши.

Интуиције није недостајало у стварању *МА*, али су недостајале комплетне претставе о пољу реалних бројева. Потребе за јасним представама о реалним бројевима сежу далеко од нас. Трагове тих потреба налазимо у Ахмесовом папирусу из 18.века п.н.е. Поколења на поколења су преносила ту потребу тако да код Грка имамо извесну теорију реалних бројева, Еудоксову теорију. Али праву теорију реалних бројева добијамо тек крајем 19. века у радовима Вајершраса, Дедекинда (R. Dedenkid, 1831-1916) и Кантора (G. Kantor, 1845-1918). Пре тога, у 17. и 18. веку на знању Еуклидске геометрије, углавном интуицијом, коришћени су, без прецизних дефиниција, горе поменути појмови *МА*. За чудо, и без темељних знања, *МА* се и тада развијала. Математичари су се ослоњали на очигледност и интуицију. Формулисана су разна тврђрња, разне теореме. Испоставило се касније да су многа тврђења тако исказана тачно формулисана, али било је и више нетачних тврђења. Нарочито је билио много нетачних тврђења око дефиниција појмова који су у основама *МА*: *бескиначно мале величине, извод функције у тачки и непрекидност функције у тачки*. Посебно се истицао проблем *непрекидности функције у тачки*. Великани *МА* Ојлер, Лагранж, па и Коши имали су доста нетачних тврђења о том појму. Ојлер је у стварању *МА* одбацио геометрију а своје закључке о функцијама и бесконачно малим изводио је алгебарски. Однос, код њега, бесконачно малих p/q којим се дефинише извод функције у тачки прелази у неодређеност 0/0. Он је сматрао да 0/0 може да има разна значења јер „из $n \cdot 0 = 0$ „произлази“да је $n = \frac{0}{0}$. Ни Њутн ни Лајбниц нису били имуни од не малих заблуда у својим закључивањима. Лагранж је веровао да се може избећи појам границе те да *МА* може фундирати помоћу алгебре. Коши је најстрожије, за то доба, истакао главна својства функција, граничних вредности, непрекидности, извода и интеграла. Али и у његовим теоремама постоји нетачности. О стању *МА* у 19. веку најбоље говори сећање Бертанда Расела који је студирао на Тринити колеџу Кебрицког универзитета 1890-1894. Он у својој књизи „Моје филозофско образовање“каже: Они који су мени предавали Диференцијални рачун нису знали правилне доказе основних теорема.

Појам *непрекидности пресликавања* био је актуалан у 19. веку. Норвешки математичар Софус Ли (Sophus Lie, 1842-1899) је дефинисао тзв. *Лиове групе непрекидних симетрија* које се и данас користе у свим областима математике и теоријске физике. На темељу непрекидних група трансформација, немачки математичар Феликс Клајн (Felix Klein, 1849-1925), у свом чувеном делу *Ерлангенски програм* 1872. г. дао је јединствен поглед на дефинисање разних геометрија. По њему садржине неке геометрије чине инваријанте одговарајуће групе трансформација одређеног простора. Али, до почетка 19. века није био потпуно јасан појам непрекидности пресликавања већини великих математичара тог времена. А биле су велике потребе да се он користи. Геометријска интуиција је замењивала строгост. Због тога је био на снази тзв. *Принцип непрекидности* пресликавања. По њему би требало да свака фигура при непрекидном пресликавању $R^2 \rightarrow R^2$ одржава сва своја првобитна својства, што у општем случају није коректно. Оснивач Пројективне геометрије француски математичар Понселе (V. Poncelet, 1788-1867) је добијао идеје за неке своје закључке користећи тај принцип. Са друге стране Лајбниц је формулисао принцип *непрекидности функције* у тачки: Ако непрекидна функција има одређене особине на својој области дефинисаности онда њена гранична вредност има исте особине.

Много је било погрешних закључака, и код највећих математичара тог времена, када се користио појам непрекидности функција или непрекидности пресликавања. Наводимо сада два таква погрешна тврђења.

Када је било актуелно тачно дефинисати појам непрекидне криве линије у простору, француски математичар Жордан (M. Jordan, 1838-1922) дао је једну дефиницију тог појма која је у почетку била прихваћена од његових савременика математичара али која није била тачна. Наиме, он је сматрао да је непрекидна крива у простору непрекидна слика једног сегмента (дужи) из $R$. Таква дефиниција је прихваћена од већине савременика. Али, после извесног времена италијански математичар Пеано (G. Peano, 1858-1932) задивио је математички свет. Он је конструисао једно непрекидно пресликавање одређеног сегмента из $R$ u $R^2$ тако да је слика тог сегмента у $R^2$ цео квадрат. Дакле, Јорданова дефиниција је била тотално погрешна.

Неоспорно је да је Коши поред Вајерштраса најзаслужнији за правилно фундирање *МА* . Међутим и он је у извесним етапама био у заблудама и правио је погрешне закључке. Иако је написао три уџбеника (!821, 1823, 1829) често је игнорисао строгост у доказима својих тврђења. Иако је дао дефиницију непрекидности функције, Коши за неку функцију коју посматра никад не претпоставља њену непрекидност. Шта више, као и многи његови претходници и савременици, он је веровао да из непрекидности функције у тачки следи њена диференцијабилност у тој тачки.

Вајерштрасови радови о основама *МА* су у потпуности ослободили од разних заблуда које су током стварања *МА* били присутне код многих математичара. Ослободио их је од зависности основа *МА*, од кретања, од разних интуитивних предрасуда и геометријских очигледности. Њему је било суђено да заврши фундирање *МА*. Њему је било јасно да диференцијабилност не следи из непрекидности. Он је 1872. задивио математички свет када је на Берлинској академији приказао функцију која је непрекидна у свакој својој тачки али није диференцијабилна ни у једној тачки соје области дефинисаности. Француски математичар Емил Пикар (E. Picard, 1856-1941) је 1905. прокоментарисао овај Вајерштрасов резултат речима: Када би Њутн и Лајбниц знали да из непрекидности функције у тачки не следи диференцијабилност у тој тачки тада дифернцијални рачун не би ни оформили.

**Извори:**

[1] И. М. Виноградов (Главный редактор). *Математическая энциклопедия* 1, 2, 3, 4, 5, Москва 1977.

[2] E. T. Bell, *Veliki matematičari*. Znanje, Zagreb 1972.

[3] М. Клайн. *Математика Утрата определенности*. Мир, Москва 1984.

[4] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analisis.* New York 1964.

[5] J. Dieudonné. *Foundation of modern Analisis.* Academic Press, New York 1960.

[6] L. Chambadal. *Dictionair des mathematics moderns.* Libairie Larousse, Paris 1975.