MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XXV (4)(2019), 233-236 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1904233M

UOPŠTENJE JEDNE CIKLIČNE ALGEBARSKE NEJEDNAKOSTI

Dragoljub Milošević

Sažetak. U ovom radu dajemo četiri dokaza uopštenja jedne ciklične algebarske nejednakosti iz [1].

Ključne riječi: algebarska nejednakost, uopštenje, aritmetička i geometrijska sredina.

A generalization of one cyclic algebraic inequality

Abstract. In this paper we give four proofs for the generalization of one cyclic algebraic inequality in [1].

Key words: algebraic inequality, generalization, arithmetic and geometric mean.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 50
ZDM Subject Classification (2010): F 50, N 50

U [1] nalazi se sljedeća nejednakost za pozitivne realne brojeve a, b, c takve da je $a^2 + b^2 + c^2 = 3$:

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq 1. \tag{*}$$

Ovdje dajemo četiri dokaza njenog uopštenja (generalizacije):

$$\frac{a^3}{b+kc} + \frac{b^3}{c+ka} + \frac{c^3}{a+kb} \geq 1, \tag{1}$$

gdje je $a^2 + b^2 + c^2 = k + 1$ i $k > 1$.

Dokaz 1. Primjenom poznate nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo:

$$\frac{(k+1)^2a^3}{b+kc}+a(b+kc)\geq 2\sqrt{\frac{(k+1)^2a^3}{b+kc}\cdot a(b+kc)}=2(k+1)a^2,$$

$$\frac{(k+1)^2b^3}{c+ka}+b(c+ka)\geq 2(k+1)b^2 \text{ i } \frac{(k+1)^2c^3}{a+kb}+c(a+kb)\geq 2(k+1)c^2.$$

Sabiranjem prethodne tri nejednakosti dobijamo

$$(k+1)^2\left(\frac{a^3}{b+kc}+\frac{b^3}{c+ka}+\frac{c^3}{a+kb}\right)+(k+1)(ab+bc+ca)\geq 2(k+1)(a^2+b^2+c^2),$$

tj.

$$\frac{a^3}{b+kc}+\frac{b^3}{c+ka}+\frac{c^3}{a+kb}\geq\frac{1}{k+1}(2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)). \tag{2}$$

Na osnovu poznate nejednakosti

$$ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2 \tag{3}$$

i uslova $a^2+b^2+c^2=k+1$, iz (2) slijedi

$$\frac{a^3}{b+kc}+\frac{b^3}{c+ka}+\frac{c^3}{a+kb}\geq\frac{1}{k+1}(a^2+b^2+c^2)=1,$$

tj. (1). □

Napomena. Specijalno, za $k=2$ iz (1) slijedi (*).

Dokaz 2. Korištenjem aritmetičko – geometrijske nejednakosti za tri pozitivna broja imamo

$$\frac{(k+1)^3a^3}{b+kc}+\frac{(k+1)^3a^3}{b+kc}+(b+kc)^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{(k+1)^3a^3}{b+kc}\cdot\frac{(k+1)^3a^3}{b+kc}\cdot(b+kc)^2}\geq 3(k+1)^2a^2,$$

$$\frac{(k+1)^3b^3}{c+ka}+\frac{(k+1)^3b^3}{c+ka}+(c+ka)^2\geq 3(k+1)^2b^2 \text{ i } \frac{(k+1)^3c^3}{a+kb}+\frac{(k+1)^3c^3}{a+kb}+(a+kb)^2$$
$$\geq 3(k+1)^2c^2\ .$$

Poslije sabiranja ovih triju nejednakosti dobijamo

$$2(k+1)^3\left(\frac{a^3}{b+kc}+\frac{b^3}{c+ka}+\frac{c^3}{a+kb}\right)+(b+kc)^2+(c+ka)^2$$
$$+(a+kb)^2\geq 3(k+1)^2(a^2+b^2+c^2).$$

Otuda, nakon sređivanja i upotrebe nejednakosti (3) i uslova $a^2+b^2+c^2=k+1$, slijedi tražena nejednakost (1). □

Dokaz 3. U [2] autor je dokazao nejednakost za pozitivne brojeve *a*, *b*, *c*, *x*, *y*, *z*:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Na osnovu ove nejednakosti slijedi

$$\frac{a^3}{b+kc}+\frac{b^3}{c+ka}+\frac{c^3}{a+kb}=\frac{a^4}{a(b+kc)}+\frac{b^4}{b(c+ka)}+\frac{c^4}{c(a+kb)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(b+kc)+b(c+ka)+c(a+kb)}.$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(k+1)(ab+bc+ca)}. \qquad (4)$$

Primjenom nejednakosti (3) i uslova $a^2+b^2+c^2=k+1$, iz (4) dobijamo traženu nejednakost (1). □

Dokaz 4. U [3] autor je dokazao sljedeću nejednakost

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}, (a,b,c,x,y,z>0).$$

Primjenom te nejednakosti imamo

$$\frac{a^3}{b+kc}+\frac{b^3}{c+ka}+\frac{c^3}{a+kb}=\frac{a^6}{a^3(b+kc)}+\frac{b^6}{b^3(c+ka)}+\frac{c^6}{c^3(a+kb)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3(a^3(b+kc)+b^3(c+ka)+c^3(a+kb))}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3(a^3b+b^3c+c^3a+k(ab^3+bc^3+ca^3))}. \qquad (5)$$

Ako u poznatu nejednakost $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ stavimo

$$x=a^2+bc-ab, y=b^2+ca-bc \text{ i } z=c^2+ab-ca,$$

dobijamo

$$a^3b+b^3c+c^3a \leq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2. \qquad (6)$$

Ako u (6) promjenljive *a* i *b* zamijene mjesta imamo

$$ab^3+a^3c+c^3b \leq \frac{1}{3}(b^2+a^2+c^2)^2,$$

ili

$$ab^3+bc^3+ca^3 \leq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2. \qquad (7)$$

Ako nejednakost (7) pomnožimo sa *k* i novodobijenu nejednakost dodamo nejednakosti (6) dobijamo nejednakost

$$a^3(b+kc)+b^3(c+ka)+c^3(a+kb) \leq \frac{k+1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2.$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^3, \qquad (8)$$

zbog uslova $k + 1 = a^2 + b^2 + c^2$. Konačno, iz nejednakosti (8) i (5) slijedi željena nejednakost (1). □

LITERATURA

[1] Cvetkovski, Z.: *Inequalities (Theorems, Techniques and Selected Problems),* Springer - Verlag, Berlin/Heidelberg, 2012.

[2] Milošević, D.: *Jedna nejednakost i njene primene*, Tangenta (Beograd), 55/3 (2008/09), 8 – 10.

[3] Milošević, D.: *Tragom jedne algebarske nejednakosti*, Tangenta (Beograd), 86/2 (2016/17), 12 – 15.

[4] Mitrinović, D. S.: *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.