MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XXV (4)(2019), 223-232 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1904223M

RAZLIČITE METODE ZA RJEŠAVANJE JEDNOG ZADATKA O JEDNAKOKRAKOM TROUGLU

Dragoljub Milošević i **Miladin Vulović**

Gornji Milanovac, Srbija

Sažetak. U ovom radu dajemo osam raznih rješenja jednog zadatka iz geometrije koji se odnosi na jednakokraki trougao.

Ključne riječi: jednakokraki trougao, slični trouglovi, Stjuartova i Pitagorina teorema, sinusna i kosinusna teorema, adicione formule za sinus i kosinus.

DIFFERENT METHODS TO SOLVE A PROBLEM ON THE ISOSCELES TRIANGLE

Abstract. In this paper we give eight different ways of one geometrical problem for the isosceles triangle.

Key words: isosceles triangle, similar triangles, Stewart's and Pythagorean theorem, sine and cosine law, addition formulas for sine and cosine.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**

ZDM Subject Classification (2010): **G40**

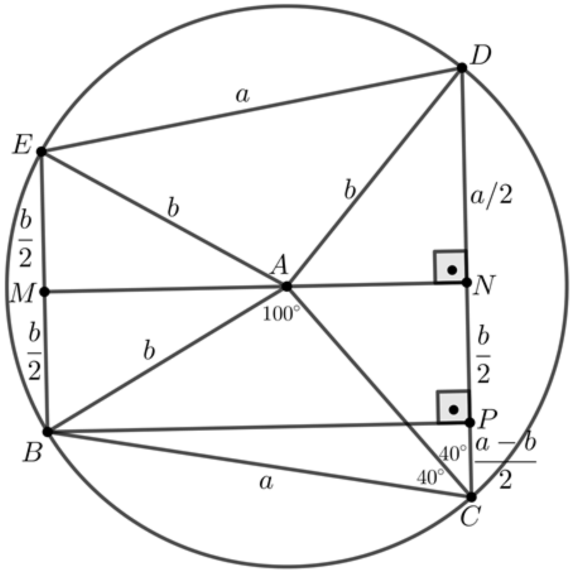
U [3] je dato 9 dokaza da, za jednakokraki trougao ABC čiji je ugao naspram osnovice BC jednak 20^0, vrijedi relacija $a^3+b^3=3ab^2$. Interesantno je da ova jednakost važi i kada je $\angle BAC = 100^0$, umjesto $\angle BAC = 20^0$. Ovdje ćemo dati osam rješenja tog (izmjenjenog) zadatka:

U jednakokrakom trouglu ABC s uglom od 100^0 *važi jednakost*

$$a^3+b^3=3ab^2, \tag{1}$$

gdje su a i b dužine osnovice i kraka tog trougla.

Rješenje 1. Konstruišimo kružnicu $k(A, AB = b)$, a potom na njoj odredimo tačke D i E tako da bude $CD = DE = BC = a$ (sl. 1). Trougao ABE je jednakostraničan, jer je $AB = AE = b$ i $< BAE = 360^0 - 3 \cdot 100^0 = 60^0$. Četverougao $BCDE$ je jednakokraki trapez ($BC = DE = a, < BCD = < CDE = 80^0$ i $< CBE = < DEB = 100^0$).



Slika 1

Neka je tačka *P* podnožje normale iz *B* na osnovicu *CD*. Prava koja sadrži tačku *A* i paralelna je sa *BP* neka siječe osnovice *BE* i *CD* redom u tačkama *M* i *N*. S obzirom da je duž *AM* visina jednakostraničnog trougla *ABE* stranice *b*, imamo

$$AM = \frac{b}{2}\sqrt{3}\,.$$

Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao *ACN* dobijamo

$$AN^2 = AC^2 - CN^2 \text{, ili } \quad AN^2 = b^2 - (\tfrac{a}{2})^2,$$

tj.

$$AN = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}\,.$$

Kako je $CP = \frac{1}{2}(CD - BE) = \frac{1}{2}(a - b)$, na osnovu Pitagorine teoreme primijenjene na pravougli trougao *BCP* je

$$BP^2 = BC^2 - CP^2 \text{, ili } BP^2 = a^2 - (\tfrac{a-b}{2})^2,$$

a odavde slijedi

$$BP = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 2ab - b^2}\,.$$

S obzirom da je $BP = AM + AN$, imamo

$$\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+2ab-b^2}=\frac{b\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2},$$

tj.

$$\sqrt{3a^2+2ab-b^2}-\sqrt{4b^2-a^2}=b\sqrt{3}\,.$$

Poslije kvadriranja posljednje jednakosti dobijamo

$$3a^2+2ab-b^2-2\sqrt{(3a^2+2ab-b^2)(4b^2-a^2)}+4b^2-a^2=(b\sqrt{3})^2,$$

što je ekvivalentno sa

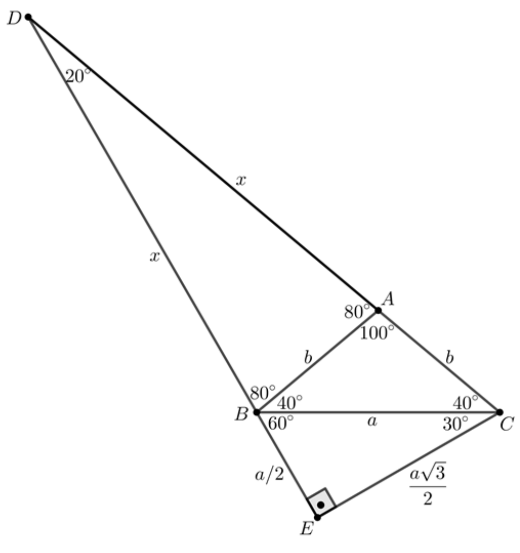
$$\sqrt{(3a^2+2ab-b^2)(4b^2-a^2)}=a^2+ab\,.$$

Odavde, nakon kvadriranja i sređivanja, slijedi

$$a^4+b^4-3a^2b^2-2ab^3+a^3b=0.$$

Dijeljenjem posljednje jednakosti sa $a+b$ dobijamo $a^3+b^3-3ab^2=0$, što je ekvivalentno sa traženom jednakošću (1). □

Rješenje 2. Nad stranicom (krakom) *AB* trougla *ABC*, sa spoljašnje strane, konstruišimo jednakokraki trougao ABD tako da <*ABD* = <*BAD* = 80^0. Tada je <*ADB* = $180^0-2\cdot 80^0=20^0$ i *AD* = *BD* = *x* (sl. 2).



Slika 2

Podnožje normale iz tačke *C* na pravu *BD* obilježimo sa *E*. Kako je

<*CBE* = $180^0-(80^0+40^0)=60^0$ i <*BCE* = 30^0,

pravougli trougao *BEC* je polovina jednakostraničnog trougla stranice *BC* = a, pa je *BE* = $\frac{1}{2}a$.

Na osnovu Pitagorine teoreme primijenjene na pravougli trougao *BEC* je

$$CE^2 = BC^2 - BE^2 = a^2 - (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{3}{4}a^2.$$

Primjenom te teoreme na pravougli trougao *CDE* dobijamo

$$CD^2 = DE^2 + CE^2, \text{ ili } (b+x)^2 = (x+\frac{a}{2})^2 + \frac{3}{4}a^2,$$

tj.

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2b-a}. \tag{2}$$

Sada ćemo koristiti dokazanu lemu (v. [1]): *Ako u trouglu ABC važi α = 2 β, onda je*

$$a^2 = b(b+c).$$

Na osnovu ove leme primijenjene na trougao *BCD* (sl. 2) je

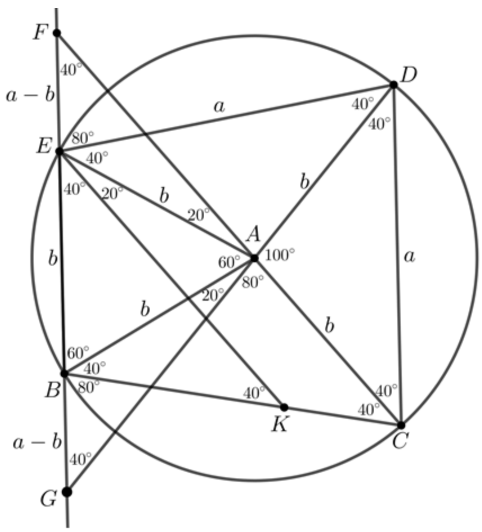
$$x^2 = a(a+b+x). \tag{3}$$

Iz jednakosti (2) i (3) je

$$(\frac{a^2 - b^2}{2b-a})^2 = a(a+b+\frac{a^2 - b^2}{2b-a}),$$

odakle, nakon sređivanja i skraćivanja, slijedi tražena jednakost (1). □

Rješenje 3. Odredimo tačke *D* i *E* kao u rješenju 1. Presjeke pravih *AC* i *AD* sa pravom *BE* obilježimo sa *F* i *G* redom (sl. 3). Trougao *ABE* je jednakostraničan, jer *AB* = *AE* = b i $< BAE = 60^0$.



Slika 3

Prava koja sadrži tačku *E* i paralelna je sa *CF* neka siječe *BC* u *K*. U trouglu *BKE* je

$$<EBK = 60^0 + 40^0 = 100^0 \text{ i } < BKE =< BCA = 40^0$$

(oštri uglovi s paralelnim kracima), pa je

$$< BEK = 180^0 - (100^0 + 40^0) = 40^0.$$

To, pak, znači da je trougao BKE jednakokraki, tj. $BK = BE = b$. Zbog toga je

$$CK = BC - BK = a - b.$$

Također, i trougao *CFB* je jednakokraki, pa je

$$BF = BA = a \text{ i } EF = a - b.$$

Iz podudarnosti trouglova *AFE* i *ABG* (pravilo USU) slijedi

$$BG = EF = a - b \text{ i } FG = a + (a - b) = 2a - b.$$

Trouglovi *BKE* i *BCF* su slični, pa je

$$KE{:}CF = BK{:}BC, \text{ ili } a{:}(b + AF) = b{:}a.$$

Odavde je

$$AF = \frac{1}{a}(a^2 - b^2). \tag{4}$$

Na osnovu sličnosti trouglova *AFG* i *ABC* imamo

$$FG{:}BC = AF{:}AB, \quad \text{tj.} \quad (2a - b){:}a = AF{:}b.$$

Iz posljednje jednakosti slijedi

$$AF = \frac{b}{a}(2a - b). \tag{5}$$

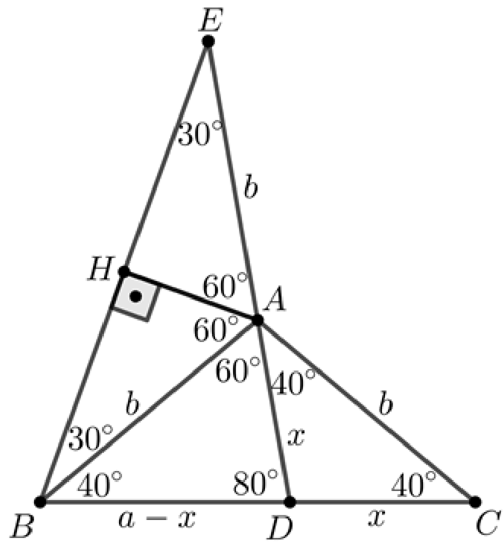
Konačno, iz jednakosti (4) i (5) dobijamo $a^3 + b^3 = 3ab^2$. □

Rješenje 4. Na stranici *BC* odredimo tačku *D* tako da <*BAD*= 60^0 , a potom produžimo duž *AD* do tačke *E* tako da *AE*= $AB = AC = b$(sl. 4). Neka je tačka *H* podnožje normale iz *A* na *BE*. Pravougli trougao *BAH* (kao i *AEH*) je polovina jednakostraničnog trougla hipotenuze b, pa je

$$AH = \frac{1}{2}b \text{ i } BH = \frac{b}{2}\sqrt{3} \text{ (Pitagorina teorema!).}$$

Tada je

$$BE = BH + HE = 2 \cdot BH = b\sqrt{3}.$$



Slika 4

Na osnovu Stjuartove teoreme primijenjene na trougao *ABC* je

$$BC \cdot (BD \cdot CD + AD^2) = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD,$$

Ili

$$a(x(a-x) + x^2) = b^2 x + b^2(a-x).$$

Iz poslednje jednakosti dobijamo $x = \frac{b^2}{a}$. Primjenom Stjuartove teoreme na trougao *BDE* imamo:

$$DE \cdot (AD \cdot AE + AB^2) = BD^2 \cdot AE + BE^2 \cdot AD,$$

Ili

$$(b+x)(x \cdot b + b^2) = (a-x)^2 b + (b\sqrt{3})^2 x.$$

Odavde, zbog $x = \frac{b^2}{a}$, slijedi

$$(b + \frac{b^2}{a})\left(\frac{b^2}{a} \cdot b + b^2\right) = (a - \frac{b^2}{a})^2 b + 3b^2 \cdot \frac{b^2}{a}\,.$$

Nakon sređivanja i skraćivanja, iz posljednje jednakosti slijedi tražena jednakost (1). □

Rješenje 5. Odredimo tačku *D* kao u rješenju 4 (sl. 4). Trouglovi *ADC* i *ABC* su slični, pa je

$$AC{:}BC = CD : AC, \quad \text{ili} \quad b : a = x : b.$$

Odavde je

$$x = \frac{b^2}{a}. \tag{6}$$

Na osnovu kosinusne teoreme primijenjene na trougao *ABD* dobijamo

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot ADcos(< BAD),$$

Ili

$$(a-x)^2 = b^2 + x^2 - 2bxcos60^0,$$

odnosno

$$a^2 - 2ax = b^2 - bx \text{ (zbog } cos60^0 = \tfrac{1}{2}\text{)}.$$

Otuda je

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a-b}. \tag{7}$$

Iz jednakosti (6) i (7) implicira $a^3 + b^3 = 3ab^2$, tj. (1). □

Rješenje 6. Nad stranicom *AB* trougla *ABC* konstruišemo jednakostraničan trougao *ABD* dako da se duži *BC* i *AD* sijeku u tački E (sl. 5). Neka je $DE = x$. Tada je

$$AE = CE = b - x \text{ (trougao } AEC \text{ je jednakokraki, zbog } <CAE = <ACE = 40^0)$$

i

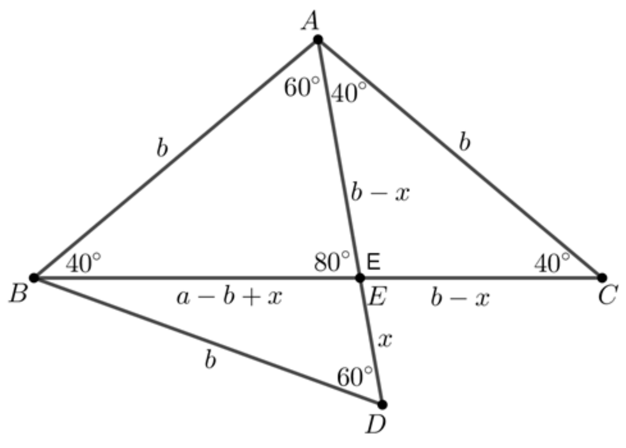
$$BE = a - b + x.$$

Na osnovu leme iz rješenja 2 primijenjene na trougao *ABE* (<*AEB* = 2·(<*ABE*)), Imamo

$$b^2 = (b-x)(b-x+a-b+x),$$

odakle je

$$x = \frac{1}{a}(ab - b^2).$$



Slika 5

Primjenom kosinusne teoreme na trougao *BDE* dobijamo

$$(a-b+x)^2 = b^2 + x^2 - 2bxcos60^0,$$

pa je

$$(a-b+\frac{ab-b^2}{a})^2 = b^2 + (\frac{ab-b^2}{a})^2 - 2b\cdot\frac{ab-b^2}{a}\cdot\frac{1}{2}.$$

Poslije sređivanja posljednje jednakosti imamo

$$a^4 + ab^3 = 3a^2b^2.$$

Otuda, nakon dijeljenja lijeve i desne strane sa a, slijedi željena jednakost (1). □

Rješenje 7. Kako je

$$a = 2bsin50^0 \text{ i}$$

$$a^2 = 4b^2sin^2 50^0 = 4b^2\cdot\frac{1}{2}(1-cos100^0)$$

$$= 2b^2(1-cos100^0),$$

to množenjem ovih dviju jednakosti dobijamo

$$a^3 = 4b^3(sin50^0 - sin50^0cos100^0).$$

Zbog

$$sin50^0cos100^0 = \frac{1}{2}(\sin(100^0+50^0) - \sin(100^0-50^0))$$

$$= \frac{1}{2}(sin150^0 - sin50^0)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - sin50^0\right),$$

prethodna jednakost postaje

$$a^3 = 2b^3(3sin50^0 - \frac{1}{2}),$$

Odnosno

$$a^3 + b^3 = 6b^3sin50^0.$$

Otuda slijedi

$$a^3 + b^3 = 3\cdot(2bsin50^0)\cdot b^2 = 3ab^2,$$

tj. (1). □

Rješenje 8. Primjenom kosinusne teoreme na trougao ABC imamo

$$b^2 = a^2 + b^2 - 2abcos40^0, \text{ odakle je } cos40^0 = \frac{a}{2b}.$$

Na osnovu poznate trigonometrijske identičnosti

$$cos3x = 4cos^3x - 3cosx,$$

za $x = 40^0$, dobijamo

$$cos120^0 = 4cos^3 40^0 - 3cos40^0,$$

pa je

$$-\frac{1}{2} = 4(\frac{a}{2b})^3 - 3 \cdot \frac{a}{2b}.$$

Odavde konačno slijedi

$$a^3 + b^3 = 3ab^2.$$

□

Napomena 1. Zadatak se može riješiti i metodom koordinata.

S obzirom da za jednakokraki trougao *ABC* u kojem je ugao naspram osnovice *BC* jednak 20^0 ili 100^0 vrijedi jednakost $a^3 + b^3 = 3ab^2$, nameće se pitanje: D*a li uslov* <*BAC* = 20^0 *odnosno* $< BAC = 100^0$ *i tvrdnja* $a^3 + b^3 = 3ab^2$ *mogu zamijeniti mjesta?* Odgovor je pozitivan. Naime, važi sljedeća teorema:

Teorema. Ako je u jednakokrakom trouglu *ABC* (*AB* = *AC* = *b i BC* = *a*) $a^3 + b^3 = 3ab^2$, onda je $< BAC = 20^0$ ili $< BAC = 100^0$.

Dokaz. Neka je $< BAC = \alpha$ i $< ABC = < ACB = \beta$. Na osnovu sinusne teoreme je $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta}$. Kako je $\beta = (180^0 - \alpha) : 2 = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, imamo $sin\beta = \sin\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = cos\frac{\alpha}{2}$. S obzirom da je $sin\alpha = 2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}$ dobijamo $\frac{a}{2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{cos\frac{\alpha}{2}}$, odakle je $a = 2bsin\frac{\alpha}{2}$. Uvrštenjem $a = 2bsin\frac{\alpha}{2}$ u jednakost (uslov) $a^3 + b^3 = 3ab^2$ dobijamo $(2bsin\frac{\alpha}{2})^3 + b^3 = 3 \cdot 2bsin\frac{\alpha}{2} \cdot b^2$, tj.

$$8sin^3\frac{\alpha}{2} + 1 = 6sin\frac{\alpha}{2}. \tag{8}$$

Korištenjem poznate trigonometrijske identičnosti $sin3t = 3sint - 4sin^3 t$, za $t = \frac{\alpha}{2}$, imamo $sin\frac{3\alpha}{2} = 3sin\frac{\alpha}{2} - 4sin^3\frac{\alpha}{2}$, što je ekvivalentno sa

$$8sin^3\frac{\alpha}{2} + 2sin\frac{3\alpha}{2} = 6sin\frac{\alpha}{2}. \tag{9}$$

Iz jednakosti (8) i (9) implicira $2sin\frac{3\alpha}{2} = 1$, odnosno $sin\frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. Odavde je $\frac{3\alpha}{2} = 30^0$ ili $\frac{3\alpha}{2} = 150^0$, tj**,** $\alpha = 20^0$ ili $\alpha = 100^0$. □

Napomena2. Teorema se može dokazati i planimetrijski.

LITERATURA

[1] D. Milošević: *Razni dokazi jedne teoreme iz geometrije*, MAT-KOL (Banja Luka), **XVII** (1) (2011), 49- 54.

[2] M. Prvanović: *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

[2] B. Sredojević i D. Milošević: *Devet načina za rješavanje jednog zadatka o trouglu*, MAT-KOL (Banja Luka), **XX** (3) (2014), 161 – 167.