MAT-KOL (Banja Luka)
XXV (4)(2019), 215-221
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1904215S

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5828 (o)

Množenje prirodnog i decimalnog broja napamet s potencijom broja pet koja ima prirodni eksponent

Petar Svirčević

Zagreb, Hrvatska
e-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr

Sažetak. *U ovome članku se iznose neka iskustva o tome, kako učenike motivirati da produktivnije savladavaju gradivo iz matematike. Naime, često se dešavalo da učenici na kasnijim satima matematike, u istom radnom danu, osjećaju umor a time i smanjeni interes za matematiku. Ideja vodilja, da se to izbjegne, je bila da ih se „šokira“ nekim zgodnim zadacima, ali tako da im se učini da su „pametniji i brži“ od scientific calculatora. Dakle, oni trebaju steći utisak, da mogu izračunati i takve multiplikacije, čije izlazne vrijednosti ne mogu biti prikazane na despleju kalkulatora u integer varijabli. U toj situaciji je kalkulatoru jedino preostalo da rezultat naznačenih operacija prikaže u varijabli floating point, premda je to općenito približna vrijednost. Jasno je, da je cilj svega toga, da se kod učenika probudi interes i postigne veću aktivnost u nastavi matematike i u praktičnoj primjeni.*

Ključne riječi. *Množenje velikih brojeva bez kalkulatora, animiranje učenika.*

Multiplication of the natural and decimal number with the potency of number five having a natural exponent

Abstract. *This article presents some experiences on how to motivate students to more effectively master mathematics. In fact, it often happened that students at mathematics later on, on the same working day, feel tired, and thus have reduced interest in mathematics. The idea to guide them, to avoid this, was to shock them with some cool tasks, but to make them "smarter and faster" than the scientific calculator. So, they need to get an impression, so that multiplication can be calculated, whose output values can not be displayed on the calculator scales in the integer variables. In this situation, the only calculator remains that the result of the indicated operations is displayed in floating point variables, although this is generally approximate. It is clear that the aim of all this is to awaken interest in students and achieve greater activity in teaching mathematics and practical application.*

Keywords. *Multiplication of large numbers without a calculator, animating students.*

Uvodne napomene

Dolazi vrijeme totalne kompjuterizacije, pa su kalkulatori instalirani i u mobitele, tako da više ne treba trošiti vrijeme za osnovne operacije s brojevima. I upotreba logaritamskih tablica je uglavnom izbačena iz školskih programa. Iz svega toga proizilazi da se i vještina računanja s konkretnim brojevima smanjila, pa se dešava da se neki učenici, i ne samo oni, mašaju kalkulatora za najelementarnije računske operacije. Uvjetno rečeno, postoji puno metoda brzog računanja napamet. No, mi ćemo se ovdje ograničiti samo na množenje prirodnih i decimalnih brojeva s potencijom 5^k, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Na osnovi rečenog, ovim člankom bi se trebalo malo oživiti kod učenika interes za umijeće računanja. *No, još je važnije da se treba njegovati sposobnost grube procjene ishoda računskih operacija, koje se primjenjuju u svakodnevnoj praksi unatoč blagodatima današnjih mogućnosti računske obrade podataka svih vrsta.*

Množenje prirodnog broja s brojem 5

Prisjetimo se, da smo još u osnovnoj školi uočili, da je prirodni broj lakše s 2 dijeliti nego s 5 množiti. U matematičkom prikazu, to bi značilo da je $n \cdot 5 = \frac{n}{2} \cdot 10$; gdje je $n \in \mathbb{N}$. Iz toga je slijedilo, grubo rečeno, da ako je broj n paran tada kvocijentu $n/2$ dopišemo znamenku 0, a ako je neparan tada tom kvocijentu dopišemo znamenku 5. Tako je npr. $956 \cdot 5 = \frac{956}{2} \cdot 10 = 4\,780$ ili npr . $569 \cdot 5 = \frac{569}{2} \cdot 10 = 284.5 \cdot 10 = 2\,845$.

Jasno je, da nastavnik ima u glavi ovaj algoritam:

$$n \cdot 5 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot 100 + 5 \cdot p_2, \text{ ako je } n \in \mathbb{N} \text{ i } n \equiv p_2 (mod 2),$$

gdje je $p_2 \in \{0,1\}$, koji se još ne treba učenicima iznositi, jer ćemo induktivnom metodom ići na općenitije slučajeve.

Množenje prirodnog broja s brojem 25

Sada učenicima možemo reći, da pomoću kalkulatora provjere točnost produkta $124 \cdot 25 = 3100$. Oni aktiviraju kalkulatore i provjeravaju napisani produkt, ali još nema oduševljenja. Nadalje, možemo zapisati, da je $1946 \cdot 25 = 48\,650$. Sada oni s nevjericom provjeravaju, pa je vidljivo da se budi interes. Dajemo i složenije produkte, kao npr. $26\,1948 \cdot 25 = 6\,548\,700, \ldots$. Nadalje im kažemo, da pomoću kalkulatora provjere množenje $448\,122\,436\,648\,832 \cdot 25 = 11\,203\,060\,916\,220\,800$. No, sada ih ovo već malo šokira, jer oni na kalkulatoru dobivaju da taj produkt ima vrijednost $1.120\,306\,091\,622\,08 \cdot 10^{16}$, pa im je prva pomisao da je vrijednost približna, premda je točna, ali je zapisana u obliku floating point. Svakako, da napominjemo da ovu točnost mogu kod kuće i provjeriti. Međutim, sada navodimo produkt, koji je totalno izvan domene i scientific calculatora; npr.

$$19\,061\,946\,260\,719\,483\,695 \cdot 25 = 476\,548\,656\,517\,987\,092\,375. \qquad (1)$$

Dakle, tu smo pomnožili dvadeseteroznamenkasti broj s brojrm 25 i dobili smo broj, koji ima dvadeset jednu znamenku. I konačno napominjemo, da lako možemo bilo kako veliki broj točno množiti s 25. I tada se među učenicima pojavljuje želja, da saznaju tajnu toga brzoga množenja.

Sada možemo ispisati jednakost, bolje reći identitet,

$$n \cdot 25 = \frac{n}{4} \cdot 100; \quad \text{gdje je } n \in \mathbb{N}, \qquad (2)$$

tada je odmah jasno da vrijedi algoritam: „Prirodni broj množimo s 25, tako da taj broj - koji je djeljiv s 4 - podijelimo s 4 i dopišemo još dvije nule; zapravo množimo sa 100 ". No, što je u onim slučajevima kada broj n nije djeljiv s 4? Npr., iz (2) slijedi: $17 \cdot 25 = 4.25 \cdot 100 = 425$, $18 \cdot 25 = 4.50 \cdot 100 = 450$, $19 \cdot 25 = 4.75 \cdot 100 = 475$. Na osnovi toga možemo iskazani algoritam još bolje precizirati: „Prirodni broj množimo s 25, tako da taj broj podijelimo s 4 i ako je djeljiv tim brojem tada tome broju dopišemo još dvije nule; ako ima u diobi s 4 ostatak 1, tada dopišemo 25; ako u diobi ima ostatak 2 tada dopišemo 50 i ako u diobi ima ostatak 3 tada dopisujemo 75". Svakako, da bi se ovaj algoritam mogao preciznije izreću, ali bi bio dosta glomazniji. I konačno učenicima je jasno da „napamet" mogu prirodni broj množiti s 25, ali je potrebno znati točno taj broj dijeliti s 4. I na kraju oduševljenim učenicima treba preporučiti, da ovo brzo množenje pokažu svojim prijateljima, ako oni s ovim nisu upoznati.

Recimo i to, da se mogu postaviti i problemi, kako se prirodni broj može brzo množiti s: 250, 2 500, ..., 2.5, 0.25, 0.025, ... Lako se može doći do algoritma za ove slučajeve.

Napomena 1. Da se nastavnik s ovim operacijama, iako su elementarne, previše ne zamara, tada je zgodno da grupe znamenka, koje tvore broj po dijelovima od jedne ili po dvije znamenke budu djeljive s 4, tako brzo i bez pogreške imamo da je npr.

$$8\,416\,483\,241\,220\,888 \cdot 25 = 210\,412\,081\,030\,522\,200.$$

Još bi mogli dodati, primjenjujući ovo pravilo, da lagano možemo i broj od npr. 100 znamenaka množiti s 25.

Napomena 2. I konačno sada možemo dati i strogi matematički iskaz algoritma o množenju prirodnog broja s brojem 25 koji glasi:

$$n \cdot 25 = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \cdot 100 + 25 \cdot p_4, \text{ ako je } n \in \mathbb{N} \text{ i } n \equiv p_4 (mod 4),$$

gdje je $p_4 \in \{0,1,2,3\}$. Svakako, da sada moramo objasniti i pojam kongruencije, ako u razredu bude interesa za to.

Množenje prirodnog broja s brojem 125

Ako učenicima kažemo, da pomoću kalkulatora provjere da je npr. $327 \cdot 125 = 40\,875$, tada će ih i to oduševiti, ali će biti u još većem iznenađenju ako im napišemo, da je

$$3\,224\,406\,416\,888\,565\,632\,324\,056 \cdot 125 = 403\,050\,802\,111\,070\,704\,040\,507\,000, \tag{3}$$

jer i ovaj produkt se ne može napraviti pomoću običnog kalkulatora, a mi ga izračunamo *„en passant“.*

Uz malo razmišljanja učenici će doći do zaključka, da se ova množenja s 125 baziraju na ovome identitetu

$$n \cdot 125 = \frac{n}{8} \cdot 1000; \text{ gdje je } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Vidimo da smo u (3) faktor od 25 znamenaka konstruirali tako, da su po dvije znamenka u njemu dijeljive s 8, zbog toga da do rezultaza dođemo brzo i bez zamaranja.

Ako primjenimo (4), tada dobivamo npr.:

$$328 \cdot 125 = \frac{328}{8} \cdot 1000 = 41 \cdot 1000 = 41\,000,$$
$$329 \cdot 125 = \frac{329}{8} \cdot 1000 = 41.125 \cdot 1000 = 41\,125,$$
$$330 \cdot 125 = \frac{330}{8} \cdot 1000 = 41.250 \cdot 1000 = 41\,250,$$
$$331 \cdot 125 = \frac{331}{8} \cdot 1000 = 41.375 \cdot 1000 = 41\,375,$$
$$332 \cdot 125 = \frac{332}{8} \cdot 1000 = 41.500 \cdot 1000 = 41\,500,$$
$$333 \cdot 125 = \frac{333}{8} \cdot 1000 = 41.625 \cdot 1000 = 41\,625,$$
$$334 \cdot 125 = \frac{334}{8} \cdot 1000 = 41.750 \cdot 1000 = 41\,750,$$
$$335 \cdot 125 = \frac{335}{8} \cdot 1000 = 41.875 \cdot 1000 = 41\,87.$$

Kolokvijalno rečeno, vidimo da ako je broj djeljiv s 8, tada dopisijemo 000; ako je ostatak pi djeljenju 1, tada dopisujemo 125 (to je $1 \cdot 125$); ako je ostatak pri dijeljenju s 2, tada dopisujemo 250 (to je $2 \cdot 125$); ...., ako je ostatak pri dijeljenju 7, tada dopisujemo 875 (to je $7 \cdot 125$).

Na osnovi izrečenog sada možemo lako izravnim zapisom reći da je npr.:

$$27\,315\,719\,243 \cdot 125 = 3\,414\,464\,904\,250.$$

Napomena 3. Detaljnu didaktičko-metodičku analizu u slučaju množenja sa 125 možemo jednostavno provesti kao i u slučaju množenja s 25.

Napomena 4. Učenicima se mogu postaviti i problemi, kako se prirodni broj može brzo množiti s: 1 250, 12 500, ..., 12.5, 1.25, 0,125, ... Za očekivati je, da će oni lako doći do algoritma i za ove slučajeve.

Napomena 5. Jednostavno možemo dokazati, da strogi matematički iskaz algoritma o množenju prirodnog broja s brojem 125 glasi:

$$n \cdot 125 = \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor \cdot 1000 + 125 \cdot p_8, \text{ ako je } n \in \mathbb{N} \text{ i } n \equiv p_8 (mod 8); \tag{5}$$

gdje je $p_8 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Množenje prirodnog broja s brojem 5^k

Na osnovi predhodnih razmatranja zaključujemo, da strogi matematički iskaz algoritma o množenju prirodnog broja s brojem 5^k glasi:

$$n \cdot 5^k = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \cdot 10^k + 5^k \cdot p_{2^k}, \text{ ako je } k, n \in \mathbb{N} \text{ i } n \equiv p_{2^k} \left(mod\ 2^k\right); \tag{6}$$

gdje je $p_{2^k} \in \{0,1,2,3, \dots, 2^k - 1\}$. No, tu bi se trebalo malo više pozabaviti pojmom kongruencije.

Napomena 6. Iz (6) lijedi, ako je $k = 4$, tada bi imali algoritam za množenje prirodnog broja s $625 = 5^4$, koji bi glasio:

$$n \cdot 625 = \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor \cdot 10^4 + 625 \cdot p_{16}, \text{ ako je } n \in \mathbb{N} \text{ i } n \equiv p_{16} (mod\ 16); \tag{7}$$

gdje je $p_{16} \in \{0,1,2,3, \dots, 15\}$.

Sada vidimo da množenje napamet s 625 i nije previše jednostavno, jer moramo izvršiti dijeljenje prirodnog broja s 16 te ostatak dijeljenja množiti s 625 ...

(sve se vidi u (7)). Vidljivo je, da je $17 \cdot 625 = 10\,625$, ali bi trebalo malo više koncentracije, da se napamet dobije da je $283 \cdot 625 = 176\,875$. Međutim, da ne bi učenici „zadrijemali“ možemo im dati, da kalkulatorom provjeru točnost produkta $324\,864 \cdot 625 = 203\,040\,000$. No, i bez kalkulatora će im sada biti jasno da je

$$6\,416\,328\,096\,329\,617 \cdot 625 = 4\,010\,205\,060\,205\,010\,625.$$

I konačno, sada je jasno da je:

$$32 \cdot 3\,125 = 100\,000,\ \ 649\,633 \cdot 3\,125 = 2\,030\,103\,125, \ldots,$$

jer sve to slijedi ako primijenimo (6).

Množenje decimalnog broja s brojem 5^{k}

Učenici će se iznenaditi, ako im ispišemo produkt

$$32\,644\,809\,616\,321\,606\,496{,}16048 \cdot 625 = 20\,403\,006\,010\,201\,004\,060\,100{,}3;$$

jer je tu kalkulator za točnu vrijednost potpuno nemoćan, a k tome se pojavljuje i decimalni broj. No, brzo će shvatiti, da do ovoga rezultata mogu doći primjenom (7).

Moramo procjieniti, da li učenici imaju interesa, da se izvede generalizacija algoritma (6), ali tako da se on može primjeniti i na decimalne brojeve s konačno mnogo decimala. Dakle, neka je dan decimalni broj, koji se sastoji od ukupno $p+q$ dekadskih cifri, ali tako da je broj cjelobrojnih cifri p a q je broj decimalnih cifri, a prikazujemo ga u obliku

$$d_{p,q} = a_p a_{p-1} \ldots a_2 a_1, b_1 b_2 \ldots b_{q-1} b_q, \tag{8}$$

a u konkretnom kanonskom zapisu to znači da je

$$d_{p,q} = 10^{p-1} a_p + \cdots + 10^1 a_2 + 10^0 a_1 + 10^{-1} b_1 + 10^{-2} b_2 + \cdots + 10^{-q} b_q. \tag{9}$$

Iz (8) slijedi da je $10^q d_{p,q} \in \mathbb{N}$, a ako sada primjenimo (6), tada dobivamo, da je produkt toga broja i broja 5^k dan vezom

$$10^q d_{p,q} \cdot 5^k = \left\lfloor \frac{10^q d_{p,q}}{2^k} \right\rfloor \cdot 10^k + 5^k \cdot p_{2^k},$$

a odatle slijedi algoritam za produkt decimalnog broja $d_{p,q}$ i broja 5^k koji prima oblik

$$d_{p,q} \cdot 5^k = 10^{-q} \left(\left\lfloor \frac{10^q d_{p,q}}{2^k} \right\rfloor \cdot 10^k + 5^k \cdot p_{2^k} \right), \tag{10}$$

za $k \in \mathbb{N}$ i $10^q d_{p,q} \equiv p_{2^k} \left(mod\ 2^k \right)$, gdje je $p_{2^k} \in \{0,1,2,3, \ldots, 2^k - 1\}$.

Zadatak . Primjenom (10) izračunajmo produkt $246{,}3157 \cdot 25$.

Rješenje. $246{,}3157 \cdot 25 = 10^{-4}\left(\left\lfloor \frac{2463157}{4} \right\rfloor \cdot 10^2 + 25 \cdot p_4\right) = \cdots = 6157{,}8925$, gdje je $2463157 \equiv p_4 (mod\ 4)$, pa je $p_4 = 1$. Dakle i ovaj produkt smo lako izračunali, a sam rezultat možemo provjeriti i pomoću kalkulatora.

Napomena 7. U [2] su osim ovog gradiva obrađene i neke druge mogućnosti množenja i zbrajanja napamet s velikim brojevima, kao npr.: *Množenje dvoznamenkastog broja s brojem 11, Kvadriranje broja* $\underbrace{11 \ldots 1}_{1 \le n \le 9}$, *Izračunavanje sume nekih konačnih redova napamet,...* Tako bi mogli napamet izračunati da je $\binom{10}{1}1 + \binom{10}{2}2 + \binom{10}{3}3 + \cdots + \binom{10}{10}10 = 5120$, $log\left[\binom{1000}{0} + \binom{1000}{1} + \binom{1000}{2} + \cdots + \binom{1000}{1000}\right] = 301$, ali moramo znati osnovno gradivo o sumama s binomnim boeficijentima. Iz ove zadnje jednakosti slijedi da broj 2^{1000} ima 302 znamenke.

Literatura

[1] Petar Svirčević, *Funkcija eksplicine kongruencije i njezine primjene,* MAT-KOL ISSN 0354-6969 (o), XXIII (4), 241-268, Banja Luka 2017.

[2] Petar Svirčević, *Neki izračuni bez kalkulatora mogu generirti interes za matematiku*, časopis NAŠA ŠKOLA br. 256 (86), Sarajevo 2019.