MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XXV (3)(2019), 191-213 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1903191M

Један осврт на стварање основа Математичке Анализе

Павле М. Миличић

О основама математике, уопште, како је стварана, када је све почело, какве су све препреке биле на путу њеног установљења, какви су били мотиви да се зидају темељи те величанствене интелектуалне творевине – МАТЕМАТИКЕ, написане су многе и многе књиге. Писали су их умни људи, филозофи, историчари математике. Користили су трагове почетака математике који су остали записани на глиненим плочицама, па пирусима, верским записима, записима грчке цивилизације, ренесансне цивилизације и записима разних историчара математике. Једна од тих књига је и књига Мориса Клајна „Математика *недостаци одређености*“ (Morris Kline “Mathematics *The Loss of Certainty*”, New York, 1980., руски превод: М. Клайн: Математика *Утрата определлености,* Москва 1984.). Овај осврт користи неке ставове из Клајнове књиге.

Данас је, код обичних људи, многих интелектуалаца, па чак и професионалних математичара, уврежено мишљење да је математика увек била образац строгости, тачности и непогрешивости. Али није тако. Вековима је математика имала својих недостатака и тешко се долазило до правих дефиниција појмова, правих идеја, које је она користила и које ми данас користимо.Тешко би неко могао да опише, чак и у више томова књига, како се развијала математика од свог почетка и шта је математика данас.

Период стварања (настајања) математике може се поделити на 4 периода: Вавилонски (предгрчки период), Грчки, Њутновски (око 1700 .г) и Послењутновски (савремени период).

Почеци стварања математике сежу у трећи миленијум пре н.е. у период вавилонске и египатске цивилизације. Математика у том периоду није била формирана као наука, Математичка анализа није ни постојала. Постојала су само нека правила рачунања аритметике и нека геометријска закључивања.

Грци су од својих предходника из предгрчке цивилизације наследили доста чињеница, које би се могла звати математичка знања. Први покушаји да се дају рационална објашњења Природе и настанка Васељене почели су јонски мислиоци, филозофи у 6. веку п.н.е. (Талес, Анаксимадер, Анаксимен, Хераклит и Анаксагора). Питагорејци су почели да објашњавају математички настанак Света. Они су први постављали питање *Зашто* и трудили су се да дају одговор на сва питања. Увели принцип апстраховања и тежње апсолутној истини. Увели су аксиоме, као апсолутне истине. Појавили су се Еуклидови *Елементи*. Од њих почиње да се развија математика као наука. Они су увели принцип дедукције, строгог доказивања полазећи од почетних истина.

Бацањем погледа само на једну област математике (не малу област), на Математичку анализу (*Ма*) и њен настанак, могуће је добити неку представу о тешкоћама развоја целе математике. Свакако немогуће је говорити о почецима математике без античке математике. Као што се добро зна *Ма* (реална) је изграђена на пољу реалних бројева. Зато њени почеци почињу са почецима формирања поља реалних бројева. И тешкоће њеног настајања потичу из несигурних основа релних бројева (негативних целих бројева и ирационалних бројева) које су солидно направљене тек у 19-20. веку.

Математичка анализа је део математике у коме се функције и њихова уопштења (функционали, линеарни оператори, нелинерни оператори и др.) изучавају методама граничних вредности. Стари назив, за *Ма*, био је *Анализа бесконачно малих*, које су користили Грци. Та чињеница много говори о томе шта су главне основе *Ма*.

До 17. века *Ма* представљала је скуп решења разних посебних задатака у интегралном рачуну (израчунавање равних површи, израчунавање запремина тела, израчунавања рада силе) Сваки задатак се решавао посебним методама. *Ма* су уобличили у посебну дисциплину Њутн, Лајбниц, Ојлер, Лагранж и др од 17-18 в., а њена база, теорија *граничних вредности* настала је у Кошијевим радовима у почетку 19. в. Дефинитивно у 19. и 20. веку направљене су праве логичке основе *Ма* када је тачно дефинисано *поље реалних бројева*. Зато ће овај осврт на основе *Ма* садржавати и осврт на историјат појма реалног броја и на погрешне представе о реалним бројевима које су имали неки велики математичари и филозофи.

Претече почетака *Ма* налазимо у Грчкој цивилизацији. „Питагора (569-500 г.п.н.е.) је нашао главни корен Математичке нализе“ (Т. Е. Бел). Наиме, он је открио да рационални бројеви нису довољни за мерење дужина. Дијагонала квадрата чија је страница 1 није цео број, односно: немогуће је наћи два цела броја таква да је квадрат једног једнак двоструком квадрату другог. Дакле, он је отворио проблем дефинисања реалног броја. Пре тога он је тврдио да је цео свемир, физички, метафизички, духовни морални-све је створено на апстрактним узорцима целих бројева 1, 2, 3,.. и може се рећи кратко: „Бог даје само цигле“. Касније је он закључио да постоје и други бројеви (дијагонала квадрата, несамерљиве дужи). Приближно је израчунавао $\sqrt{2}$. Приметио је да се, при том израчунавању, децималне цифре не завршавају. Тиме се појављује питање појама *бесконачности* у математици и појам *бесконачно мале величине* . То откриће, откриће тзв. несамерљивих дужи, нарушило је природну хармонију између аритметике и геометрије. Дужина дужи није увек број (рационалан, јер друге бројеве у то доба Грци нису познавали)! Од тада почиње битка за тачну дефиницију реалног броја..

Питагорини следбеници: Зенон (495-435), Еудокс (408-355), Еуклид (330-275), Архимед (287-212), Аполоније (260-200) и др. допринели су, сваки на свој начин, грађењу неког почетака основа *Ма*.

Чувена *три проблема* (математичка) антике подстицали су математичаре на њихово решавање и у вези тих проблема откривени су конусни пресеци и неке криве трећег реда.

Еудокс, Платонов учитељ, (неки историчари математике сматрају да је он један од највећих математичара свих времена) својим пропорцијама истиче могућност употребе *ирационалног броја* и могућност дефиниције ирационалног броја помоћу рационалног броја. До тада су упоређиване само самерљиве дужи, а он је дефинисао једнакост сразмере и несамерљивих дужи. Он је избегао проблем ирационалних бројева.Творци савремених аксиома реалних бројева Вајерштрас и Дедекинд су користили Еудоксове идеје и закључке. Дедекинд је (1872) наглашавао да је био инспирисан Еудоксовим идејама. Еудокс је творац тзв. Архимедове аксиоме.

Више од 2000. г пре Њутна и Лајбница, израчунавајући површину круга и криволинијског трапеза параболе, методом Еудоксове *ексхаустије,* Архимед даје наговештај идеје за савремену дефиницију одређеног интеграла. Архимед приписује Еудоксу закључак да је запремина пирамиде једнака једној трећини запремине призме са истим висинама и основама. Од тада потиче и појам (магловити појам) *бесконачно мале величине (бм)* . Наиме, Еудокс тврди: Ако су $a-a_n$ и $b-b_n$ бесконачно мале (мање од сваког позитивног броја) када се n неограничено увећава тада из $a_1/b_1=a_2/b_2=\cdots=a_n/b_n=c$ следи да је $a/b=c$. На основу тог тврђења Архимед је у свом делу „Метода“ засновао своју методу *ексхаустије*. Дакле, Архимед је био први математичар који је користио *бм* иако није веровао у њихово постојање.Цео интегрални рачун има корене у Еудоксовим радовима.

Аполоније дефинише и до детаља проучава конусне пресеке (криве другог реда).

Зенон својим парадоксима противуречи неким старим интуитивним представама о бесконачно малим и бесконачно великим величинама.У његовим парадоксима су садржани проблеми који се односе на *потенцијалну* и *актуелну* бесконачност. Његов чувени парадокс тзв. *Дихотомија* показује да се сваки коначан одсечак може поделити на бесконачан број малих одсечака од којих сваки има коначну дужину. Збир свих тих дужина даје дужину дужи, тако да ту срећемо и бесконачне збирове, наговештаје појма *бесконачног реда.* И, ту срећемо *беконачно мале величине.* Наравно, сви ти појмови су у основама *Ма*. Нарочито је појам бесконачно мале величине, који Грици обилато користе, одиграо велику улогу у фундирању савремене *Ма*.

Грци су били упознати са „математичким правилима „ Египта и Вавилона. Користили су их. Али су открили и нова важна правила и сазнања. Увели су принцип *апстраховања*. Они су разликовали стварно тело од *геометријског тела* које је апстракција физичког тела (без физичких и хемиских састојака.То је био велики корак ка стварању правих научних закључака. Ослободили су се „самовољних сила, религиозних догми“ и тежили апсолутној истини... Аристотел, најуниверзалнији филозоф антике, је у расуђивање увео „закон противуречности“, „закон искључења трећег“ и много других закона логичког закључивања.

Два миленијума су се математичари служили Еуклидовим „*Елементима*“, његовим појмовима из њих, углавном некоректно дефинисаним, а неки и нису били дефинисани (тачка „између“ две тачке, права „између“ две праве и тд.). Унаточ свих недостатака, највећи математичари и филозофи, све до 18.в., сматрали су да су садржаји „Елемената“ врхунске строгости.

Данас добро знамо да су основни појмови *Ма* (на којима је направљена *Ма* и који се дефинишу) : функција, граница, извод, интеграл, непрекидност, бесконачно мала, бесконачно велика, бесконачни ред и тд. Потпуно је јасно, да се ови појмови могу правилно дефинисали једино ако се има конзистентна теорија поља реалних бројева. Али *Ма* се развијала и без тачних дефиниција реалног броја. Тачну дефиницију реалног броја, нису знали ни Ферма(1601-1665), ни Њутн (1642-1727), ни Лајбниц (1646-1716) ни Ојлер (1707-1783) -творци диференцијалног и интегралног рачуна. Отуда и код ових генијалних математичара и филозофа, у њиховим радовима имамо низ некоректности. О тим некорекности овде ће бити доста речи.

Повезаност грчке математике са источњачком, у епохи *Хеленизма* била је веома плодоносна нрочито у првим вековима, после стварања великог научног центра у Александрији. Иначе се сматра да права грчка математика траје релативно кратко, од Еудокса до Аполонија, период од 300г. до 250.г.п.н.е.

Александрија је остала центар античке математике и у доба владавине Рима. У то доба дају математичке резултате Птоломеј, Херон, Диофант, Менелај и др. Ти резултати нису много битни за развој *Ма.* Но и Римска империја је почела да пропада. Тада се математичка истраживања премештају у Индију и Месопотамију. Арапи су велики дио античке науке сачували од пропасти, посебно математике. Најважнији резултат индијске математике је декадни систем бројева, омогућен увођењем знака 0 (нула), познат као арапски начин писања бројева. Индијци и Арапи користе целе и рационалне бројеве, али употребљавају и ирационалне бројеве без обзира што о њима не знају много. Они изводе овакав, погрешан, закључак: Како је $\sqrt{4.9} = \sqrt{4}.\sqrt{9}$ онда је $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. Прескочићемо остала неоспорно веома важна арапска истраживања у математици (на пример, од њих потичу називи *алгебра* и *алгоритам*) и резултате који нису имали већи значај за стварање *Ма.*

У средњем веку разматрајући појмове прекидног и непрекидног, коначног и бесконачног у вези са филозофским и физичким проблемима, није потпуно нестало интересовање за појмове који припадају основама *Ма*. Тиме су се бавили већином филозофи тзв. *сколастичари.* Схоластика (од грчке рчи- доколица и лат. *Schola)* Средњовековна хришћанска филозофија је упражњавана у црквеним и манастирским школама и раним европским универзитетима. Они су се ослоњали на разматрања Платона и Аристотела. Хришћански филозоф Ориген (185-254) је негирао постојање *актуелне* бесконачности док је средњовековни филозоф и епископ Свети Аугустин(354-430) скуп свих позитивних целих бројева третирао ка актуелну бесконачност.(О њиховим ставовима се позитивно изјашњавао и Кантор, који је дефинисао *трансфинитне* бројеве). Сваки континуум сколастичари су посматрали као потенцијално дељив до бесконачности. По таквом тумачењу нема најмање дужи. Јер сваки део дужи има особину дужи. Према томе тачка се не може сматрати делом праве јер је тачка недељива (из недељивих се неможе направити континум). Тачка је могла да образује линију само кретањем.

Период средњег века обично се оцењује као епоха општег мрачњаштва и назадовања науке, математике посебно. У Европи се математика почиње развијати тек у 12.в. У средњем веку Европљани су се поново суочили са проблемом ирационалног броја иако нису били још начисто шта је негативни број. Поменимо овде италијанског математичара Фибоначија (1170-1250) и његову *Књигу о абаку* у којој је учинио први напредак западне цивилизације у аритметици. *Фибоначијев низ* је значајан појам који баштини *Ма*.

У 17. в. Архимедови следбеници, фламански инжињер Симон Стевин (1548-1620), Паул Гулдин (1557-1643), на Архимедовим идејама израчунавали су тежишта тела и проучавали елементе статике. Њихова разматрања су користила појмове на којима се касније темељила *Ма*.

После тих првих пионира интегралног рачуна појавила су се велика дела Кеплера (1571-1630) и Каваљерија (1598-1647). Они не следе своје предходнике сколастичаре. Ни Кеплер ни Каваљери нису били присталице ни Архимедове строгости при израчунавању површина и запремина, али су користили његове идеје. О њиховим израчунавањима ћемо касније.

Наилази дуги период тражења правог смисла негативних и ирационалних бројева. Појављују се и неки резултати. Италијански математичар Лука Пачоли (1445-1514), Ж. Кардано (1501-1570) и Симон Стевин уводе и нове ирационалности са којима се служе као на пример $\sqrt[m]{a+\sqrt{b}}$ при решавању кубне једначине. Ф. Вијет (1540-1603) посматрајући правилне многуглове са 4, 8, 16, ...страна, уписане у круг полупречника 1, добија изразе за број π:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdots}}}\cdots$$

Ово је први *бесконачни производ* у *Ма* настао 1593.г. И Валис (1616-1703) је 1655. изразио број π преко бесконачног производа:

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots$$

Дакле, уводе се нови појмови у *Ма*. А у потрази за лакшим рачунањима, у то време, појављује се и појам *логаритма*, *Неперов логаритам* (Џ. Непер (1550-1617)). Овај нови проналазак рачунања одмах су прихватили и математичари и астрономи, посебно Кеплер, који је имао грдне проблеме са великим израчунавањима.Тек ту се ирационални бројеви неизбежно појављују, јер логаритми и већине целих бројева су ирационални бројеви. Но, на тај проблем се мало математичара освртало, рачунало се са њима као да су рационални бројеви. Блез Паскал (1623-1662) је тврдио да су ирационални бројеви само симболи, они не постоје независно од геометријских величина. Тек је Џ. Валис у 17. веку признао да су ирационални бројеви, бројеви у правом смислу те речи, тј. са којима се оперише као са рационалним. Али за ту констатацију Валис није имао никакав доказ. Више од тога, Декарт (1596-1650) у својој *Геометрији (*1637) и Ферма у свом рукопису из 1629. немају јасну представу о ирационалним бројевима, иако они тврде да постоји обострано једнозначна кореспонденција између тачака полуправе и позитивних реалних бројева, што је велики корак унапред.

Појава негативних бројева у Европи потиче из арапских текстова. Али већина математичара 16. и 17. века су били убеђени да негативни бројеви не могу бити корени једначина.

Кардано (1501-1576) је укључио негативне бројеве у корене једначина али је сматрао да су они само симболи који немају никаквог реалног смисла. Вијет (1540-1603) је одбацивао негативне бројеве.

Декарт је негативне корене једначина називао *лажним* због тога што су они мањи од *ничега* (мањи од нуле).

Паскал је сматрао да одузимање броја 4 од 0 је операција лишена сваког смисла.

Лајбниц је прихватао формализам операција са негативним бројевима али је предлагао да се они називају *имагинарни (нестварни*) бројеви. По њему број -1 не постоји јер позитивни логаритми одговарају бројевима већим од 1. Он је то овако објашњавао,

(користио је правила логаритама за позитивне бројеве)

$$\log(-1)=\log\left(\sqrt{(-1)^2}\right)=1/2\log 1=0$$

Валис је 1655.г. сматрао да су негативни бројеви већи од бесконачности а истовремено мањи од нуле. Овако је резоновао, у савременим ознакама: за $a>0$ важи $a/0=\infty$ (однос a/b се увећава када се b смањује). Отуда је $a/b>a/0=\infty$ за $b<0$.

Даламбер (1717-1783) је записао: Ако неки задатак доводи до негативног броја као решења онда то значи да су неке претпоставке у задатку лажне.

Какав је све био неред са негативним бројевима, М. Клајн наводи да, чак у 18. веку, најбољи алгебраисти нису разликовали знак „минус“ као знак операције одузимања од знака „минус“ као симбола негативног броја.

Тек је Ојлер (1770.г.) у делу „Потпуни увод у алгебру“ показао еквивалентност операције одузимања броја $-b$ са додавањем броја b тј. $-(-b)=b$.

Проблеми са суштинским поимањем целих и ирационалних бројева нису нестали а појавили су се комплексни бројеви као резултати решења кубних и квадратних једначина (Кардано 1545.г.).

Неки математичари до тог времена су целу математику идентификовали са геометријом, а неки са аритметиком. Све изван тога није постојало. Блез Паскал (1623-1662) је говорио: „Tout ce qui passe la geometrie nous passe“-Све што излази из оквира геометрије излази из оквира нашег поимања.

Наравно, модерна математика почиње са Декартом. Пјер Лаплас (1749-1827) је записао:“Дан када је Декарт открио своју методу (1619) је званични рођендан савремене математике. Декарт је остварио синтезу алгебре и геометрије и тиме је почела неслућена епоха развоја *Ма.* Занимљиво је приметити да је термине *координате* и *координатне осе* увео увео тек Лајбниц 1692. г. Декарт није настављао Грчки пут у математици. Он је направио нови корак. Показао је да се двамиленијумска геометрија може проучавати на сасвим нов начин.

Ферма и Паскал су Декартови савременици. Ферма који се сматра једним од највећих математичара 17. века после Грка прави највећа открића у теорији бројева. Питањем теорије бројева бави се и Паскал. Међу онима који нису прихватали нове бројеве (комплексне бројеве) био је и Декарт који их је назвао имагинарни бројеви. Чак и Њутн није придавао велики значај тим бројевима јер они још тада нису имали одређени физички смисао. Није их разумевао ни Лајбниц иако их је употребљавао.

Поново је Ојлер дошао до правилнијег разумевања комплексног броја, мада је и он грешио, на пример, он је по аналогији $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ за позитивне бројеве написао $\sqrt{-\ }\cdot\sqrt{-\ } = \sqrt{4} = 2$.

„Принц математичара“ Гаус (1777-1855) дао је немерљив допринос теорији бројева и *Ма*, али нису код њега забележене неке веће некоректности.

Унаточ свих недостатака правих основа *Ма,* она се развијала, умножавали су се резултати. Оформила се као посебна дисциплина.

„*Ма* је настала на непостојећим логичким основама аритметике и алгебре и на не потпуно јасним основама геометрије. До краја 17. в. *Ма* као ни аритметика ни алгебра нису имале своје праве логичке основе“ (М.Клајн).

У основама *Ма* се налази појам функције и појам граничне вредности. Појам функције разматран је озбиљно тек у 17.в. Појам реалне функције није могао бити тачно дефинисан без јасног појма реалног броја. А појам ирационалног броја у 17.в. није био још дефинисан, мада су ирационалне бројеве математичари слободно користили без њихове јасне дефиниције. То је време када је требало тачно дефинисати граничну вредност функције, беконачно мале, бесконачно велике, извод функције, интеграле и све остало што ти појмови носе.

Математички великани тог времена: Кеплер (1571-1630), Декарт (1596-1650), Каваљери (1598-1647), Ферма (1601-1665), Паскал (1623-1662), Валис (1616-1703), Њутн (1643-1727) и Лајбниц (1646-1716), сваки на свој начин су користили те појмове и расправљали о тим појмовима, често некоректно. Неки су их третирали геометријски, неки алгебарски а неки комбиновано.

У 17. в. наступило је време систематског излагања резултата који се могу сматрати да припадају *Ма.* Бонавентуре Каваљери (1635), професор Болоњског универзитета у књизи „Геометрија“ износи све што је битно за

Ма тог доба, поред осталог све о сколастичким бесконачно малим величинама. Две године касније Декарт издаје своју „Геометрију“ у којој доследно примењује алгебру у античкој *Ма*. Алгебарске једначине су постале релације међу бројевима, што до тада није било тако.

Дошло је време да се појаве прави родоначелници тзв. инфинитезималног рачуна Ферма, Њутн и Лајбниц.

Ферма се код многих математичара сматра једним од оснивача *Ма*. Он није формулисао неке значајне теореме из *Ма,* али је предлагао поступке, алгоритме да се дође до неког значајног закључка. Он је прихватио Еудоксову идеју за израчунавање површина равних ликова помоћу површина малих правоугаоника. У суштини, он је први предложио дефиницију *извода* као количника два прираштаја,

$$\Delta y/\Delta x = k/h,$$

где је h у датом тренутку могуће занемарити (у то време није постојао јасан појам граничне вредности). Тај количник су, са више објашњења, користили и Њутн и Лајбниц за своје дефиниције појма извода.

Исто тако Ферма је први показао како се може одредити максимална (минимална) вредност функције. Објаснио је то на једном примеру, на примеру поделе дужи дужине a на два дела чији је производ максималан за решење тог задатка Ферма уместо промењиве x узима промењиву $x+e$ где је e веома мали позитиван број кога ће касније занемарити (остаје некоректност у том „веома малом броју“). Даље тече закључивање: $x(a-x)=(x+e)(a-x+e)$, одакле је $ea=2ex+e^2$ тј. $a=2x+e$ те је, после занемаривања броја e, $x=a/2$. Као што видимо, исто се добија ако се за функцију $f(x)=x(a-x)$ нађе извод и изједначи са нулом, како се и данас решава тај задатак.

Као што је речено, у то време, није постојао јасан појам граничне вредности, па се извод , не потпуно јасно, замењивао количником k/h када су k и h довољно мали. И код ове тројице математичара и њихових следбеника настале су велике недоумице око суштине прираштаја k и h. Да ли су то нуле или нису. Да ли су то бројеви или нису, да ли се овај количник може посматрати ако је $h=0$. О томе ће бити још речи.

Други појам *Ма* који се појавио још у 16. веку је појам одређеног интеграла који настао из потребе да се израчуна површина равне фигуре, да се израчуна запремина тела, да се израчуна тежиште тела. Еудокс и Архимед тзв. методом ексхаустије израчунавали су површине неких равних ликова, па и криволинијског трапеза, помоћу уписаних правогаоника. Израчунавали су и запремине неких тела индиректним методом доказивања. Они су пробама долазили до закључка колика је запремина неког тела па би после свођењем на контрадикцију доказивали своју претпоставку.

Још је Демокрит у 4. в.п.н.е. сматрао да се једно тело састоји из довољно великог броја довољно малих тела. Архимед је сматрао да се равни лик састоји од бесконачног броја паралелних дужи и да се тело састоји из бесконачног броја равних пресека. Тим идејама су били окупирани Кеплер и Каваљери у 16. и 17. веку, када је у питању одређивање површина равних ликова и запремина тела.

Кеплер је 1615. у свом делу „Стереометрија винских бачви" одредио запремине за 92 обртна тела. Он је површину круга одредио помоћу једнокраких троуглова са врхом у центру круга...а запремину лопте помоћу кружних конуса са врхом у центру лопте. Али једноставност тог израчунавања изазива сумњу у исправност методе. Кеплер је био свестан да ако се основа уписаног троугла све више смањује она прелази у тачку а троугао у дуж (полупречник круга). Зато он прелази на статичке троуглиће, на бесконачно много, актуелно бесконачно много малих троуглова-дужи. У том случају неограничени процес сабирања нестаје. Наравно, овде је важна идеја апстраховања у којој се појављују појмови *актелне* бесконачности и *потенцијалне* бесконачности.

Каваљери је 1635. објавио рад „Геометрија изложена на нов начин помоћу недељивих непрекидног". Он је, под утицајем Архимеда, тврдио да се површ састоји од недељивих линија, а тело од недељивих површи. Површ је замишљао као ткање из нити ткања а тело као листове из књига Он је сматрао да се равна површ, на пример елипса, састоји из дужи паралелних са две крајне тангенте које су међусобно паралелне. Помоћу тих дужи он је израчунао површину елипсе... За израчунавање запремине тела користио је равне паралелне пресеке тог тела. Те паралелне дужи и паралелне равне пресеке тела он је звао *недељивим.* Појавио се тако појам *недељивих величина,* као мере недељивих. А површине површи и запремине тела је израчунавао упоређујући недељиве величине двеју фигура. Илустративан је пример за Каваљеријеву методу израчунавања, помоћу недељивих величина израчунавање површине елипсе....Запремину је израчунавао помоћу површина попречног пресека...И данас се у средњој школи корист термин „Каваљеријев принцип".

Иако је, при својим израчунавањима, био непрецизнији од Архимеда, Каваљери је добио већи број исправних резултата од Архимеда. Осим тога његов метод и резултати које је добио су утицали на даље сагледавање појма *бм* и правила о интегралима. На пример, помоћу једног његовог резултата о површини дела паралелограма, који је добио методом недељивих, он је, у савременим ознакама, доказао да је

$$\int_0^a x^n dx = a^{n+1}/(n+1)\,.$$

Каваљеријеву методу (у суштини некоректну) подржао је Паскал (1658) не баш јасним аргументима. Сматрао је да је теорија недељивих сагласна са еуклидском геометријом.

Највеће домете у постављању основа *Ма* постигли су, неоспорно, Њутн и Лајбниц са проналаском инфинитезималног рачуна. Као што се зна Њутн је извод дефинисао као брзину промене дужине пута у датом временском тренутку, а Лајбниц као коефицијенат правца тангенте на кривој у датој тачки. Историчари математике истичу да је истински претеча инфинитезималног рачуна био Декарт. Он је омогућио да се постави проблем тангенте криве и коефицијента правца тангенте.Он је тангенту криве дефинисао као гранични положај једне сечице кроз две блиске тачке. Са друге стране проблем налажења тангенте на кривој у датој тачки први је објавио Њутнов учитељ Исак Бароу (Isaac Barrow: Lectiones geometricae, 1670). Њутн се у почетку није бавио интегралима, бавио се дефиницијом појма извода. Ни Њутнова ни Лајбницова дефиниција извода се, у суштини, скоро ни у чему не разликује од Фермине дефиниције. У оба случаја битан је био количник прираштаја $\Delta\ '\Delta = /h$. Али тада није постојао прави, главни, инструмент *Ма,* оформљен појам граничне вредности (limesa), и настали су проблеми око правилног дефинисања извода.

Иако је идеја о граничној вредности постојала још од античког времена, углавном у форми геометријске интуиције, прву модерну формулацију граничне вредности функције је дао Болцано у радовима из 1816. и 1817, али су они постали шире познати тек након његове смрти. Коши је први користио граничне вредности у доказима у својој књизи из 1821, међутим како је он дао само вербалну дефиницију лимеса, формална дефиниција, у „епсилон-делта“ форми, се обично приписује Вајерштрасу.

У Њутновој дефиницији извода није било никаквих нелогичности. У својој првобитној теорији Њутн је посматрао функцију као променљиву, флуентну количину, и разлику, или износ промене звао је *флукс*. Својим изводима Њутн је посветио три рада. У првом раду, при израчунавању извода помоћу количника k/h Њутн је сматрао да су k и h недељиве, да су дискретне величине.У другом раду, он сматра да оне нису дискретне већ непрекидне. Није се много обазирао на логичке основе *Ма*. У свом делу „Математичке основе природне филозофије (1687.г.) он напушта своје тврђење о недељивим величинама, сада их он назива „исчезавајуће дељиве величине“ тј. бесконачно дељиве величине. Свој извод је звао *флукси.* Тиме је за њега физичка страна тог појма била осмишљена..

Нешто другачији приступ појму извода предложио је Лајбниц.. Лајбниц је прираштаје h и k означавао са dx и dy који достижу изчезавајуће величине, па се степени $(dx)^2$ и $(dx)^3$ могу занемаривати (изостављати) у изразима. Сам извод је имао своју геометријску интерпретацију.Тада је, углавном, настао тзв.*инфинитезимални* рачун.

После епохалних открића инфинитезималног открића Рол (1652-1719) , Лопитал (1661-1704), Тејлор (1685-1731) и др. излажу познате теореме диференцијалног рачуна.

Један историчар је написао да је интегрални и диференцијални рачун најмоћнији инструмент икад пронађен за математичка истраживања физичког сфемира.

Епископ и филозоф Џорџ Беркли (1685-1753) био је огорчен што Њутнова наука подржава материјализам и детерминизам те на тај начин угрожава религију. Његове флуксије и бесконачно мале назива *сене нестајућих величина*. И Лајбница је критиковао.У својој књизи (1734) „Аналитичар, или, Размишљање, адресовано неверноме математичару“, Беркли је говорио: Претпостављајући да прираштаји h и k изчезавају ми можемо закључити да њихови количници и све што из њих произлази такође изчезава.

Лајбниц се у својим радовима обимно бавио интегралима и независно од својих предходника дошао на идеју сабирања површина правоугаоника(Дарбуове суме) на које се разбија одговарајући криволинијски трапез. Проблем је настао када је требало сабрати бесконачно елементарних правоугаоника. Лајбниц је закључио да коначна сума елементарних правоугаоника прелази у бесконачну суму када ширина правоугаоника h постане бесконачно мала. За бесконачну суму бесконачно малих правоугаоника интеграла Лајбниц је увео ознаку $\int ydx$. Открио је основну теорему интегралног рачуна и открио да је операција налажења интеграла обратна операцији диференцирања.

После 12 година упорног рада на диференцијалном и интегралном рачуна Лајбниц је први рад објавио у часопису „Acta eruditorum“ (Журнал учених) за 1684.г. У чланку објављен у Acta eruditorum 1689.,браћа Бернули су прихватили Лајбницове идеје.. Пошто сва Лајбницова објашњења својих уведених појмова нису задовољили његове критичаре, он је формулисао филозовски принцип познат под називом *принцип непрекидности* који се није разликовао од принципа којима се користио Кеплер. Суштина тог принципа је: „Ако промењива у сваком интервалу кроз који пролази има неко својство, тада и њена граница има та својства. До краја живота Лајбниц је објашњавао шта су његове *бм,* али није био убедљив, понекад је тврдио да оне нису баш апсолутне нуле, већ релативне тј. изчезавајуће величине које задржавају особине величина од којих су постале, понекад је говорио да не верује у њихово постојање. По Лајбницу је, у то време, бесконачно мала различита од нуле али је мања од било ког позитивног броја. Са бесконачно малим се по Лајбницу ради као са обичним бројевима. Али за многе и највеће умове тога времена није био убедљив и јасан.

Ојлер је у потпуности одбацио геометрију на којој би се могла изграђивати *Ма*. Разматрао је функције формално, алгебарко- аналитички. Није прихватио Лајбницове *бм* као величине које су мање од сваког заданог броја, различите од нуле. По Ојлеру Лајбницов однос k/h прелази у $0/0$ а $0/0$ може да има више значења јер је $n \cdot 0 = 0$ за сваки n па делењем са 0 (!) добија $n = 0/0$. Он је тврдио да је *бм* h, у горњем количнику, једнака нули, што је објашњавао следећим примером. За функцију $y = x^2$ добијамо $k/h = 2x + h$, одакле се за $h = 0$ добија тачан извод, једнак $2x$. Он је, у почетку, Лајбницове *бм* често називао и идентификовао са тзв *апсолутним нулама*. Ипак је његов значај за ставарање основа *Ма* велики јер се ослободио геометрије и препознао да се *Ма* може изграђивати на основама појма броја.

Ни Лагранж није био задовољан теоријом Лајбницових бесконачно малих, ни Ојлеровим апсолутним нулама. Некоректност њихових поступака он је објашњавао на примеру односа кружног лука и одговарајуће тетиве кад угао тежи нули. Лагранж је желео да у *Ма* уведе грчку строгост доказивања. О његовом погледу на Њутн-Лајбницове основе *Ма* говори његова књига „Теорија аналитичких функција" (1797), са поднасловом: „Садржи (доказане) основне теореме диференцијалног рачуна, без коришћења *бм*, изчезавајућих величина, граничних вредности и флуксија; коришћењем алгебарске анализе коначних величина". Дакле, био је убеђен да му је пошло за руком да у анализи избегне појам лимеса, да користи само алгебру. Лагранжеово мишљење да *Ма* представља само продужење алгебре, поткрепио је извесни С. Лакруа (1765-1843) својим тротомним делом „ Елементарни трактат по диференцијалном и интегралном рачуну". Професор Кебрицског универзитета Ж. Пикок (1791-1858) тврди у својим списима да теорија граница није прихватљива у математици јер она одваја принципе диференцијалног рачуна од алгебре.

Њутн и Лајбниц су, углавном, игнорисали све постојеће критике и били су задовони са својим уведеним појмовима и својим идејема и настављали су да на основу њих даље изграђују *Ма*. На њиховим основама настајале су посебне области *Ма* .

Њутн је 1669. увео појам *бесконачног реда* због операција диференцирања и интеграције (као антидиференцирања). За њега је проблематика бесконачних редова била део алгебре.

О бесконачним редовима писали су и Лајбниц, Даламбер, браћа Берлуни, Ојлер и многи други математичари 18. века.

Примењујући их у разним проблемима они су често, са данашње тачке гледишта, правили грубе грешке.

Посматрајући развој

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots$$

за $x=$ добијани су разни збирови

$$1-1+1-1+\cdots=$$
$$(-)+(-)+\cdots=$$
$$1-(-1)-(-1)-\cdots= \, .$$

На основу таквих закључака Гвидо Гранди (калуђер и професор у Пизи) 1703. долази до закључка да је $0= /2$ и на основу тога се Свет може створити из ништа, говорио је он.

Лајбниц је узимајући само први члан, па прва два, па прва три добијао збирове редом $1,0,1,0,\cdots$ па су за њега 0 и 1 једнако вероватни да буду збир датог реда. Зато је за њега тај збир, збир аритметичка средина броја 0 и 1 тј. $s=1/2$, .

Бернули и Лагранж су се сложили са Лајбницовим закључком.

Ојлер је 1745. предложио недовољно прецизне дефиниције *конвергенције* реда и *суме* реда. На основу својих дефиниција Олјер је правио и овакве закључке

$$\frac{1}{(+x)^2}= -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -(1-x+x^2-x^3+\cdots)'=1-2x+3x^2-4x^3\cdots$$

За $x=-$ (!) добија

$$\infty \; 1+2+3+4+\cdots,$$

а за $x=$ (!) из развоја

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$

добија

$$-1=1+2+4+8+\cdots$$

Будући да је $4>3, 8>4,\cdots$ он закључује да је збир овога реда већи од збира предходног реда тј. да је $-1>\infty$. Тако он закључује да ∞ дели позитивне и негативне бројеве на бројевној правој као што их дели 0.

Он је тврдио и „доказивао“ да је

$$1- + - + \cdots =$$
$$\cdots+1/n^2+1/n+1+n+n^2+\cdots= \, .$$

Али има доста Ојлерових тврђења у вези са редовима која нису била доказана а која су тачна. На пример, Н. Бернули је тврдио да се један исти ред може добити разлагањем две различите функције, што је Ојлер негирао. Ојлер је тврдио: “Ред који је настао разлагањем одређене функције може се користити у математичким операцијама и за оне вредности x за које ред дивергира“

Ојлер се ослободио геометрије и основе *Ма* је заснивао на аритметици и алгебри, тј. анализу је везао за појам броја што је био још један корак напред у постављању основа *Ма.*

Њутн је је свој приступ основама *Ма* углавном заснивао на геометрији, а Лајбниц на алгебри. О Њутн-Лајбницовим основама *Ма* написане су многе књиге. Те основе су јавно нападали многи математичари и филозофи. На пример епископ Беркли је тврдио да се компензацијом некоректних закључака често долази до правилног тврђења. Ојлер је у потпуности одбацио геометрију као основу *Ма.* Функције је проучава строго алгебарски. Упркос више ординрних грешака које правио Ојлер је један од твораца савремене *Ма*. Ојлерова је велика заслуга што је одвојио анализу од традиционалне геометрије и што је њене основе пребацио на проблеме аритметике и алгебре. Један је од оснивача варијационог рачуна. Његова једнакост

$$e^{i\pi} + \quad = $$

се сматра да је „најбоља формула“ у математици (повезује геометрију (π), алгебру (i) и анализу (e); повезује природне бројеве (1), ирационалне бројеве (e), комплексне бројеве (i) и трансцедентне бројеве (π)).

Лагранж је у 18. веку као и Беркли сматрао да се компензацијом грешака може доћи до исправног тврђења. Лагранж није био задовољан ни Лајбницовим изчезавајућим *бм* ни ни Ојлеровим апсолутним нулама. Он је предложио да се за стварање основа *Ма* употребе бесконачни редови који су до тада сматрани да припадају алгебри. Био је убеђен да се основе *Ма* могу направити само алгебарским методама без појма границе.

Крајем 18. века је настао јак покрет међу математичарима да се коначно направе праве основе *Ма*. Оделење математике Берлинске академије наука, на чијем челу је био Лагранж, расписало је конкурс 1784.г за најбоље објашњење појма бесконачности у математици и да се објасни на који су начин у *Ма* добијене многе важне тачне теореме коришћењем некоректно дефинисаних појмова. На конкурсу је победио швајцарски математичар С. Љуиљ, под шифром „ Бесконачност-пучина у коју тону наше мисли“. Те његове резултате објавила је Берлинска академија под насловом „Елементарни приказ Математичке анализе“ .Љуилови резултати утом раду нису били оригинални. Он је сам признао да његови резултати настали на Даламберовим идејама из чланка „Диференцијал“ објављеног у

„Енциклопедији“ и спису „Разно“. Љуиљ је у том свом раду разјаснио неке недоумице око појма граничне вредности, први је употребио симбол $\lim$. Извод dP/dx записао је са $\lim \Delta\ /\Delta$.

Али, правих основа Ма још није било. Још увек се нису разликовали бесконачно велики бројеви од бесконачно великих величина, теорема која је важила за коначно n сматрало се да важи и за бесконачно n, извод функције се замењивао количником k/h, одређени интеграл је замењиван са одговарајућом интегралном сумом..

И тако, и 18. век се завршио остављајући основе диференцијалног и интегралног рачуна и друге делове *Ма* у незадовољавајућем стању. Гиганти науке Ојлер и Лагранж направили су много. Ојлер је објавио Introductio in Analzsis ifinitorum (1748) који се сматра најважнијим математичким уџбеником тога времена (у њему су истакнуте везе геометрије алгебре и анализе, развоји функција у редове) , али логичке основе *Ма* у њему нису биле коректне, није било праве дефиниције граничне вредности.

У 18. в.огромна зграда *Ма* изграђивана на принципима које су постављали Ферма, Њутн, Лајбниц и Ојлер стајала је на климавим темељима. Слична ситуација је била и у првој половини 19. в. Још нису биле дате прецизне дефиниције негативних бројева, ирационалних бројева и комплексних бројева. Поново су били у центру пажње разни типови бројева. И поново се математичари спотичу на суштини тих бројева. Де Морген је 1831. записује: Имагинарни израз $\sqrt{-\ }$ и негативни израз $-$ који се добијају при решењу неког задатка сведоче да у том задатку има неких противуречности или абсурдности. Слично се о тој врсти бројева изјашњавао и Хамилтон (1805-1865) један од највећих математичара 19. века.

Без обзира што праве основе *Ма* нису направљене аналисти су настављали да проширују њену теорију. Биле су дефинисане нове области *Ма*. У 1740. појављује се тзв. *принцип најмањег дејства* извесног научника Мопелтјуи (1698-1754) као одговор на питање: у којој је средини брзина светлости већа, у води (како су тврдили Декарт и Њутн) или у ваздуху(како је тврдио Ферма). Монтелптуи је принцип најмањег дејства изражавао као одређен интеграл од производа масе, брзине и пређеног пута. Принцип најмањег дејства је касније постао централни принцип Варијационог рачуна, нове области *Ма* ,чији је оснивач Лагранж уз помоћ Ојлерових радова.

Почетком 19. века проблеми основа *Ма* привукли су пажњу три велика мислиоца: свештеника, филозофа и математичара Болцана (1781-1848), Абела (1802-1829) и Кошија. Болцана је живео у Прагу па његови резултати дуго времена нису били познати, Абел је умро у 27. г. живота па није могао суштински да проникне у основе *Ма*. Коши је живео у Паризу , у колевци математичких збивања тог времена и у 20. и 19. веку имао је репутацију једног од највећих математичара света. Зато је он имао највећи утицај на своје савременике и следбенике. Он је решио да направи основе *Ма* на правилном појму реалног броја и *лимеса* (граничне вредности низа бројева). Истина, и пре њега је било таквих покушаја и идеја. Тако је Џ. Валис 1655. објавио рад „Аритметика бесконачно малих“ у којем је заступао идеју лимеса, као основе *Ма*. Даламбер је такође тврдио да је преко лимеса најбоље поставити основе *Ма.* У прилог свом тврђењу он је говорио је (1767)

„Свака величина или је нешто или ништа. Ако је величина нешто она не може изчезнути без трага, а ако је величина ништа то она изчезава потпуно“. Он је критиковао Њутна што је извод објашњавао као брзину јер на тај начин у математику уводи кретање, односно физику.

Дакле, почетком 19. века логичке основе *Ма* нису биле направљене иако је до тада било направљено веома много вредних резултата на несигурним основама. Абел се 1826. у писму професору Ханстену пожалио на недопустиву збрку која царује у *Ма* :“У њој нема плана, без икаквог је система. Чудно је што се толико математичара бави *Ма*. Има мало теорема које су доказане са довољном строгости. Свуда се срећу тужни закључци –од појединачног ка општом. Чудно је што такав начин доказивања није довео до већих парадокса“. А поводом дивергентних редова Абел је писао свом учитељу „Све што најбоље постоји у математици је направљено без бесконачних редова. Али чудно је да су сви разултати добијени помоћу редова тачни.

Многи математичари су на свој начин користили појам границе у својим истраживањима. Сви су они без сумње утицали да Болцано 1816. тачно дефинише граничну вредност и Коши детаљно оформи овај појам у својој књизи „Cours d analys algebrique“ 1821.г. Али, и овде је Коши остао веран општим *принципима алгебре*. (Иако ти принципи још нису били коректни). Био је под утицајем својих предходника који су говорили: „Што важи за реалне бројеве важи за комплексне бројеве, што важи за коначне величине важи за бесконачневеличине, што важи за конвергентне редове важи и за неконвергентне редове“, па је и сам често игнорисао строгост.Али, његова безгрешна интуиција га је одржавала и он је дао немерљив допринос основама *Ма*. У својој књизи

„Курс алгебарске анализе“ он је врло брижљиво установио основне појмове *Ма*: функције, граничне вредности, непрекидност, извод, интеграл. Увео је (у одређеном смислу) разлику измађу конвергентног и неконвергентог бесконачног реда. Али, слично својим предходницима, он је био убеђен да из непрекидности функције следи њена диференцијабилност и формулисаоје више теорема у којима уместо диференцијабилности предпоставља само непрекидност. Тврдио је да за сваку непрекидну функцију постоји одређен интеграл, без обзира на интервал интеграције. Тада још није био заживио појам униформне (равномерне) непрекидности. Тај појам су уочили и разумели тек Кантор и Вајерштрас. Погрешно је тврдио да је збир бесконачног рада непрекидних функција непрекидна функција (овде треба предпоставити униформну непрекидност, што данас знају и студенти који слушају *Ма*). Он је правилно формулисао тзв. Кошијев критеријум конвергенције низова, али није могао да докаже довољност тог тврђења јер за тај доказ није имао на располагању *аксиом супремума* реалних бројева. Он је био убеђен да за функцију $z = f(x, y)$ која има граничну вредност у тачки (a, b) и $x \to \ , y \to$ важи $\lim f(x, y) = f(a, b)$ и да у том случају $M(x, y) \to \ (a, b)$, што све није тачно.

Парадоксално је да Коши у три своја уџбеника (1821, 1823, 1829) игнорише строгост доказа. У разним доказима неког тврђења Коши није предпостављао да је дата функција непрекидна, а морао је.“Оперисао је са бесконачним редовима Фуријеовим трансформацијама и несвојственим интегралима не осврћући се на конврге нцију дотичних објеката“ (М. Клајн).

И поред разних недостатака његова беспрекорна интуиција доводила га је до добрих и тачних резултата и до правилних постављања основа *Ма*. Коши је несумњиво био један од највећих математичара прве половине 19. в. Он је основао теорију функција комплексне променљиве иако израз $a + \sqrt{-}$ назива количином лишених сваког смисла. Код њега је једнакост два комплексног броја била само симболички запис две једнакости реалних бројева. Комплексном броју $\sqrt{-}$ Коши није давао никакав смисао.

Дакле, почетком 19. века логичке основе *Ма* нису биле направљене иако је до тада било направљено веома много вредних резултата на несигурним основама. У основама *Ма* један од централних појмова је и *непрекидност функција*. На узајамном односу непрекидности и диференцијабилности функција спотицали су се многи математичари. Али грешке су се наставиле и у разматрању појмова непрекидности функција, диференцијабилности функција, бесконачно малих величина, бесконачно великих величина. Неки математичар по имену Жозеф Луи Франсу 1875. „доказује“ да свака непрекидна функција у тачки има извод у тој тачки. Бертранд Расел који је студирао на чувеном Тринит колеџу, око 1890. записује:“Ти који су ми предавали диференцијални рачун нису знали доказе основних теорема већ су сугерисали да верујемо у оно што нам кажу“.

Лакруа (1765-1843) је све такве „доказе“ објавио у свом познатом тротомном спису „ Трактат о диференцијалном и интегралном рачуну“ (1810). Просто је невероватно колико је било грешака и погрешних закључивања у проблемима везаниха за појмове непрекидности и диференцијабилности поготову ако су их правили такви математичари као што су Фурије, Коши, Лежандр, Гаус и други математичари тог или нижег ранга. Такве грешке су проистицале, вероватно, и из непознавања тачне дефиниције функције. Њу је први дао чешки математичар Болцано 1817.г.

И поред разних некоректности које су присутне, нарочито у раним радовима, Коши је један од главних утемељивача основа *Ма*. Али било је суђено да те основе заврши велики немачки математичар К. Вајерштрас (1815-1897). Своје резултате Вајерштрас је почео да излаже на Берлинском универзитету 1858-1859. Његов ученик Мадеус Шварц је 1851. објавио његове резултате, пре Вајерштасовог излагања. Вајерштрас је у потпуности ослободио *Ма* од кретања, интуитивних претпоставки и геометријских очигледности којима су се до тада служили разни предходници. Вајерштрас закључује да из непрекидности не следи диференцијабилност. Математички свет је био запрепашћен његовим примером функције која је непрекидна у свакој течки а није дифренцијабилна ни у једној тачки. (Саопштио га је на Берлинској академији наука 1872. г. Објављен је тек 1875. г. Напоменимо да је Болцано још 1830. геометријским разматрањем био направио један такав пример функције, али је он био објављен после 1890.г.

Емил Пикар је 1905. рекао: „Да су Њутн и Лајбниц знали да непрекидна функција не мора да буде диференцијабилна тада диференцијани рачун никад не би био направљен“. Дакле, претерана строгост може бити препрека стваралачког почетка.

У почетку својих делатности на основама *Ма* и Коши и Вајерштрас су сматрали да су реални и комплексни бројеви (операције са њима) нешто дато за које није потребно посебно разматрање. Први корак ка логичком фундирању реалних и комплексних бројева направљен је после појаве Хамилтонових кватерниона 1837. г. Вајерштрас је први схватио да основе *Ма* остају незавршене ако се дубље не сагледају својства ирационалних бројева на основама својства рационалних бројева.

Такође су Дедекинд и Кантор су правилно дефинисали ирационалне бројеве на основу својстава рационалних бројева, и доказали су главне особине тих бројева. Њихови радови су објављени 70-их година 19-ог века. Тек тада се могло доказати да је $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Али логичке основе рационалних бројева још увек нису постојале. Дедекинд јо то схватао, па је 1888. у раду „Шта је број и чему служи“ описао основна својства бројева која би могла бити аксиоматски приступ рационалним бројевима. Ђузепе Пеано (1858-1932) користећи Дедекиндову идеју (и неке идеје Грасмана) конструисао је у „Елементи аритметике“(1889) теорију рационалних бројева на основу аксиома природних бројева (које је он и поставио).

Тако је логичка структура реалних и комплексних бројева саздана.

Коши је уместо језика *бм*, увео језик *„епсилон-делта“* (ε, δ). Али остало је још недоумица у смислу да ли су *бм* неки посебни бројеви. М. Лефлер (1846-1927) поставио је питање да ли између класа рационалних бројева и ирационалних бројева постоје неки бројеви посебног смисла. Негативан одговор дао је Кантор. Кантор је 1887. ,ослањајући се на Архимедову аксиому, доказао да не постоје *бм* као бројеви. Пеано је такође показао да *бм* не постоје као неки бројеви. Његовом мишљењу се придружио и Бертранд Расел у својим „Принципима математике“. 1934. г. Сколем (1887-1963) је помоћу реалних бројева и *бм* увео нове бројеве тзв. *хиперреалне бројеве* и установио нека њихова својства. На тим основама настала је тзв. *нестандарна нализа*. У тој теорији поново су се појавиле *бм*. У тој теорији тзв. коначан хиперреалан број има облик $a + \iota$ где је α *бм* која може бити и негативна.

Неке класе реалних бројева који нису били тачно дефинисани користили су се 5000 година пре тачне дефиниције реалног броја.У том периоду користиле су се и многе теореме аритметике, алгебре и геометрије везане за оскудна знања реалних бројева. После аксиоматизације реалних бројева није се показала никаква противуречност са свим достигнућима у математици, напротив показало се да су постојеће теореме тачне. Само су неке теореме *Ма* морале бити преформулисане. И створила се могућност да се докажу нове теореме. Шта то значи. То значи да у основама математике је веома важан здрав смисао интуиције. По речима Адамара строгост аксиоматике и дедукције је оно што је интуицијом замишљено.

Иначе покрет аксиоматизације математичких дисциплина забринуо је неке математичаре, филозофе и теологе да се математике не удаљи сувише од реалног света, формулацијом аксиоме можда смо узели неко не природно својство које касније дедукцијом може довести до противуречност, говорили су они.

Нова теорија без које се основе *Ма* не могу завршити јесте теорија скупова. Као што смо видели још од Аристотела потичу појмови *актуелна бесконачност* и *потенцијалне бесконачности*. Математичари Лајбниц, Коши, Гаус и др. правили су разлику између између ова два појма и искључивали су актуелну бесконачност из својих разматрања. Кантор се задржао на појму актуелне бесконачности. Основна Канторова идеја идеја за дефинисање бесконачних скупова јесте успостављање обострано једнозначних кореспонденција између скупова. Он је дефинисао да је бесконачни скуп онај скуп који је у обострано једнозначној кореспонденцији са својим правим делом , тј са својим подскупом који је различит од самог скупа. Он је показао да је скуп свих подскупова датог скупа „већи“ од датог скупа. У вези са тим појавили су се познати парадокси са скуповима (скуп свих скупова и др.).

Првобитна тзв. наивна теорија скупова морала је бити аксиоматизована. Канторова жеља да уреди све трансфинитне бројеве по „величини" навеле су Е. Зермела (1871-1953) да дефинише тзв. *аксиому избора*, грубо речено: да се из сваког скупа може „издвојити" један елеменат. Аксиома избора се користи у разним математичким дисциплинама (алгебра, топологија, теорија мере, функционална анализа) па и у реалној анализи је неопходна. На пример помоћу аксиоме избора може се доказати теорема да се из сваког ограниченог скупа бројева може издвојити низ који конвергира датој тачки нагомилавања тог скупа. 1923. г. Хилберт је аксиому избора назвао принципом који је неопходан као један од првих елемената *Ма*. Са друге стране многи угледни математичари тог времена, као Е.Борел (1871-1932), Ф. Берштајн (1878-1956), А. Лебег (1875-1941), Ж.Адамар (1865-1963) и др су били против увођења те аксиоме. Замерке су се односиле на то што се у аксиоми избора не указује на правило како се из датог скупа узима по један елемент. По Борелу, избор без правила се прихвата на веру. Али сви покушаји да се та аксиома замени неком једноставнијом били су безуспешни. Она је постала по важности онолико важна колико је била важна аксиома паралелности у геометрији.

Други проблем који се појавио у том периоду јесте тзв. *Хипотеза континуума*: не постоји трансфинитни број који је између $\aleph_0$ и $\boldsymbol{c}$.

И тако на почетку 20. века појавило се више тешких проблема за математичаре. Требало је доказати *непротивуречност* целе математике. Требало је објаснити у ком се смислу треба разумети да неки појам у математици *постоји*. Требало је доказати смисао доказа *постојаности*. Да ли математички објекти морају имати физичке прототипе како је то проповедао Аристотел. Борел, Бер и Лебег су сматрали да су прави докази постојаности бесмислени. Они су предлагали тзв. конструктивне доказе помоћу израчунљивости. А тек Кронекер који је сматрао да је логичким закључивањем немогуће направити разумну теорију у границама оног што је предвиђено интуицијом.

Зермело није правио разлику између својства којим је задат скуп и самог скупа. Зермелов систем аксиома је усавршио А. Френкел 1922.г.

тако да систем Зермел-Френкел ових аксиома не допушта разматрање скупа свих скупова и на тај начин нестају неки парадокси са скуповима. На овом систему аксиома (њих 9) и данас се изграђује *Ма* и геометрија. Бурбакисти тврде да се на основу модификованог Зермело-Френкеловог система аксиома и принципа логике може коректно засновати цела математика.

Добро је познато да су, поводом увођења нових појмова у математику, ко је први увео неки појам, или, да ли уведени појам има смисла и користи, настајале велике полемике и преписке у којима ни увреде нису изостајале. Најчудније је што су то чинили велики математички умови. Овде помињемо само оне полимеки које су везане за *Ма.*

Хипасус, Питагорин ученик се успротивио Питагори што откриће несамерљивих дужи није приписао њему (Хипасусу) већ је то откриће приписао себи (Питагори).

После тога највећи сукоб је био сукоб Тартаље и Кардана око приоритета решења једначине трећег степена.

Веома велики сукоб је настао између Ферме и Декатра. Наиме, Ферма је 1637. године открио да Декарт није исправно извео закон преламања светлости. Ферма је покушавао да дефинише тангенту криве у једној тачки и и у вези са тим да нађе тачке криве максималних (минималних) ордината. Држао се дефиниције да је тангента права која пролази кроз тачку криве тако да између криве и те праве нема других правих (шта је права између две праве?). Декарт се није слагао са том дефиницијом. Изјавио је да је Ферма неспособан као математичар и мислилац. Декарт је сматрао да је тангента криве положај сечице криве кроз „две блиске тачке“ (али, шта су две блиске тачке...). Ту дефиницију је касније прихватио Ферма па и Лагранж.

Сигурно најпознатији сукоб у историји математике је био сукоб Њутна и Лајбница око приоритета открића диференцијалног рачуна. У то доба они су били највећи научници тог времена, Њутн је открио гравитацију а Лајбниц је био највећи филозоф који је желео да створи универзални језик за све науке. У Њутновом писму Лајбницу које је путовало пола године до Лајбница Њутн га је оптужио да му је Лајбниц украо методу. Наиме, Њутн је разрадио своју методу много пре Лајбница али је није објавио, потпуни увид у свој инфинитезимални рачун Њутн је објавио тек 1704.г. Лајбниц је објавио своје резултате 1684. г. Поред тога Лајбницова нотација и његов инфинитезимални метод постају опште прихваћени на континенту, апосле 1820. г. и у Британској империји. Почев од 1699. г. остали чланови Краљевског друштва оптужују Лајбница за плагијат и овај спор достиже свој врхунац 1711. г. Та горка расправа ће трајати све до Лајбницове смрти 1716. г. Ова расправа створиће поделу између математичара Британије и континенталне Европе, која је можда за читав век успорила напредак математике у Британији. Процес је завршен међународном математичком арбитражом, која је пресудила да су њихова открића независна једна од другог.

Абел је свој чувени рад о елиптичним интегралима показао Кошију очекујући његово мишљење. Коши га је само погледао и вратио без коментара. Абел је био увређен и изјавио је: “Коши је луд и ту се не може ништа направити иако је он једини који зна како треба радити математику“.

За тај рад Абел је заједно са Јакобијем касније добио „Гранд при“ од Француске академије наука.

Ермит је у вези са Лебеговим радовима изјавио: “Са страхом и ужасом одвраћам поглед од те беде-функција које немају извод“

Завршимо овај део сукоба сукобом Кронекера и Кантора. Кронекер (1823-1891) радикални конструктивиста, професор Берлинског универзитета, говорио је: “Природни бројеви су једино што нам је Бог дао, све остало је човекова измишљотина“. Одбацивао је актуелну бесконачност као вештачку творевину. Дозвољавао је само оне дефиниције математичких појмова до којих се стиже само коначним бројем корака. Тврдио је (1981) да Кантор својим идејама квари омладину. Због њега Кантор није могао доћи на Берлински универзитет. Кронекер је имао сукобе и са Вајерштрасом.

Извори

[1] Д. Я. Стройк, *Краткий очерк истории математики*, „Наука“,Москва 1984.

[2] И. М. Виноградов (Главный редактор), *Математическая энициклопедия* 1-5, Москва 1970.

[3] Г.Е. Шилов, *Математический анализ,Функции одново переменово части 1-2,* Nauka, Москва 1969.

[4] М. Клайн, *Математика Утрата определенности*, Мир ,Москва 1984.

[5] E. T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb 1972.

[6] П. М. Миличић, *О почецима заснивања основа диференцијалног и интегралног рачуна,*MAT-KOL (Banja Luka), XXI (1)(2015), 51--71