MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN: 0354-6969 (p), ISSN: 1986-5228 (o)
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
Vol. XXV (3)(2019), 177-190
DOI 10.7251/1903177S

Marcinkijevičeva teorema interpolacije sa primjenom (The Marcinkiewicz Interpolation Theorem and Application)

Ivana Savković

SAŽETAK. Cilj istraživanja je da se prikaže važan rezultat iz teorije interpolacije, naime Marcinkijevičeva teorema o interpolaciji te osim samog rezultata predstavi i autor istog , Jozef Marcinkijevič kao jedna od najznačajnijih ličnosti u poljskoj matematici. Spomenuta teorema će se u radu koristiti za dobijanje bitnih nejednakosti u harmonijskoj analizi pa metoda rada podrazumjeva korišćenje elemenata funkcionalne analize i teorije mjere i integracije kao i Marcinkijevičeve teoreme.

Abstract. The aim of the research is to present important result from the interpolation theory, namely Marcinkiewicz interpolation theorem and also to present the author of this result, Jozef Marcinkiewicz, one of the most important persons in Polish mathematics. The theorem will be used for obtaining important inequalities in harmonic analysis, so the working method uses elements of functional analysis and theory of measure and integration, likewise Marcinkiewicz theorem.

1. Uvod

Rad je namijenjen matematičarima koji se bave harmonijskom analizom, teorijom mjere te funkcionalnom analizom ali rad mogu čitati i studenti koji su upoznati sa osnovnim pojmovima iz teorije mjere i integracije te teorije operatora. Budući da kao posljednju sekciju sadrži i zanimljive činjenice o matematičaru čije ime nosi teorema predstavljena u radu te kratak istorijski pregled o njegovom rezultatu, rad

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46B70, 42B25.

Ključne riječi i fraze. Slabi L^p prostori, interpolacija, Marcinkijevičeva interpolacijska teorema, procjena norme, maksimalna funkcija

Keywords and phrases. Weak L^p spaces, interpolation, Marcinkiewicz interpolation theorem, norm estimate, maximal function.

Ovaj članak je dio mog master rada pod naslovom Teoreme interpolacije sa primjenama, koji sam odbranila na Prirodno-matematičkom fakultetu u Banjoj Luci 2018. godine

bi mogao biti interesantan ljubiteljima istorije matematike. S druge strane, teorema koja se razmatra predstavlja osnovu moderne teorije interpolacije operatora te moćan alat za dokazivanje bitnih nejednakosti te zbog toga i ima značajnu ulogu u harmonijskoj analizi. Marcinkijevičeva teorema predstavlja realnu metodu interpolacije operatora. Prije formulacije same teoreme u radu su navedeni preliminarni pojmovi kojima se bavi pomenuta teorema.

2. Preliminarni pojmovi

Neka je $(X, \mathscr{M}, \mu)$ mjerljiv prostor tj. zadata je mjera μ na sigma algebri $\mathscr{M}$ na skupu X.

Definicija 2.1. Neka je f mjerljiva funkcija na X. Funkcija raspodjele od f je funkcija d_f definisana na $[0, \infty)$ sa

$$d_f(\alpha) = \mu\big(\{x \in X :| f(x) |> \alpha\}\big).$$

Napomena 2.1. d_f je opadajuća funkcija jer važi implikacija

$$\alpha_1 < \alpha_2 \implies \mu\big(\{x \in X :| f(x) |> \alpha_1\}\big) \geqslant \mu\big(\{x \in X :| f(x) |> \alpha_2\}\big)$$

.

Stav 2.1. Neka su f i g mjerljive funkcije na (X, μ). Onda za svako $\alpha, \beta > 0, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(1) $| g |\leqslant| f | \mu$ s.s. $\implies d_g \leqslant d_f$

(2) $d_{cf}(\alpha) = d_f(\frac{\alpha}{|c|})$

(3) $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leqslant d_f(\alpha) + d_g(\beta)$

(4) $d_{fg}(\alpha\beta) \leqslant d_f(\alpha) + d_g(\beta)$

Dokaz. (1) Neka je $G = \{x \in X :| g(x) |> \alpha\}$, $F = \{x \in X :| f(x) |> \alpha\}$. Tada $x \in G \implies \alpha <| g(x) |$. Kako je po pretpostavci $|g| \leqslant |f|\mu$ s.s. otuda imamo $\alpha < |f(x)|$ tj. $x \in F$. Dakle $G \subset F \implies \mu\big(G\big) \leqslant \mu\big(F\big)$ tj. $d_g \leqslant d_f$, na osnovu monotonosti mjere.

(2) Budući da je

$$d_{cf}(\alpha) = \mu\big(\{x \in X : |cf(x)| > \alpha\}\big) \text{ i}$$

$$\{x \in X : |cf(x)| > \alpha\}\big) = \{x \in X : |c||f(x)| > \alpha\}\big) = \{x \in X : |f(x)| > \frac{\alpha}{|c|}\}\big)$$

imamo $d_{cf}(\alpha) = d_f(\frac{\alpha}{|c|})$.

(3) Neka je $S = \{x \in X : |(f + g)(x)| > \alpha + \beta\}$, $G = \{x \in X : |g(x)| > \beta\}$, $F = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$. Tada $x \in S \iff |(f + g)(x)| > \alpha + \beta$. Odavde $|f(x)| + |g(x)| > \alpha + \beta$ što daje $|f(x)| > \alpha \vee |g(x)| > \beta$ Dakle,

$$x \in F \cup G \implies S \subset F \cup G$$

što daje $\mu(S) \leqslant \mu(F \cup G) \leqslant \mu(F) + \mu(G)$ tj.

$$d_{f+g}(\alpha + \beta) \leqslant d_f(\alpha) + d_g(\beta)$$

.

(4) Neka je $T = \{x \in X : |(fg)(x)| > \alpha\beta\}$. Tada $x \in T \implies |(fg)(x)| > \alpha\beta$ i $|f(x)||g(x)| > \alpha\beta$ odakle slijedi $|f(x)| > \alpha \vee |g(x)| > \beta$ tako ds imamo $x \in F \cup G$. $\square$

Ako je poznata funkcija raspodjele d_f, možemo izračunati L^p normu funkcije f. Navodimo važan stav o predstavljanju L^p norme funkcije f pomoću funkcije raspodjele.

Stav 2.2. Neka je $f \in L^p(X, \mu),\ 0 < p < \infty$. Tada je

$$\|f\|_{L^p}{}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big) d\alpha \\ &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \int_X \chi_{\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}} d\mu(x) d\alpha \\ = \int_X \int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1} d\alpha d\mu(x) &= \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \|f\|_{L^p}{}^p, \end{aligned}$$

gdje smo koristili Fubinijevu teoremu u trećoj jednakosti. $\square$

Sada uvodimo takozvane slabe L^p prostore koji se javljaju pri realnom metodu interpolacije.

Definicija 2.2. Neka je $0 < p < \infty$. Skup svih μ - mjerljivih funkcija f takvih da je

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\{\alpha d_f(\alpha)^{1/p} : \alpha > 0\} < \infty$$

se naziva slabi L^p prostor i označava sa $L^{p,\infty}(X, \mu)$.

Napomena 2.2. Slabi $L^\infty(X, \mu)$ je $L^\infty(X, \mu)$. Dvije funkcije u $L^{p,\infty}(X, \mu)$ su jednake ako su jednake μ skoro svugdje.

Stav 2.3. $\|f\|_{L^{p,\infty}}$ nije norma, $L^{p,\infty}$ je kvazinormiran linearni prostor za $0 < p < \infty$ i važi

$$\|f + g\|_{L^{p,\infty}} \leqslant c_p(\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}) \ gdje\ je\ c_p = max(2, 2^{\frac{1}{p}}).$$

Dokaz. Ako je $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0$ tada je $d_f(\alpha) = 0$ za sve $\alpha > 0$ tj. $\mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big) = 0$ što daje $f(x) = 0$, $\mu - s.s. x \in X$.

Neka je $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tada

$$\begin{aligned} \|cf\|_{L^{p,\infty}} &= \sup\{\alpha d_{cf}(\alpha)^{1/p} : \alpha > 0\} = \sup\{\alpha d_f\left(\tfrac{\alpha}{|c|}\right)^{1/p} : \alpha > 0\} \\ &= |c| \sup\{\tfrac{\alpha}{|c|} d_f(\tfrac{\alpha}{|c|})^{1/p} : \alpha > 0\} = |c| \|f\|_{L^{p,\infty}}. \end{aligned}$$

Dokažimo još da važi:

$$\|f + g\|_{L^{p,\infty}} \leqslant c_p(\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}),\ \text{uz}\ c_p = max(2, 2^{\frac{1}{p}}).$$

Da bismo dokazali ovu nejednakost koristićemo sljedeću nejednakost:

$$(a+b)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{c_p}{2}(a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}), \text{ pri čemu je } a, b, p > 0$$

koju ćemo prethodno dokazati.

Za $p > 1$ važi $2^{\frac{1}{p}} < 2$ pa je $c_p = 2$ u ovom slučaju tj. treba dokazati $(a+b)^{\frac{1}{p}} \leqslant a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}$. Definišimo funkciju f sa $f(a) = (a+b)^q - a^q - b^q$. Posmatrajmo prvi izvod funkcije f.

$$f^{'}(a) = q(a+b)^{q-1} - qa^{q-1} = q((a+b)^{q-1} - a^{q-1}) \leqslant 0$$

jer je funkcija $a \to a^{q-1}$ opadajuća za $a > 0$ *i* $q - 1 < 0$, gdje je $q = \frac{1}{p}$. Kako je f opadajuća, dostiže maksimum u 0 tj. $f(a) \leqslant f(0) = 0$ pa važi $(a+b)^{\frac{1}{p}} \leqslant a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}$.

Za $p < 1$ važi $2^{\frac{1}{p}} > 2$ pa je $c_p = 2^{\frac{1}{p}}$ u ovom slučaju tj. treba dokazati $(a+b)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{2^{\frac{1}{p}}}{2}(a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}})$. Funkcija $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$ je konveksna na intervalu $[0, \infty)$ pa važi $g(\frac{a+b}{2}) \leqslant \frac{g(a)+g(b)}{2}$. Dakle, važi $(\frac{a+b}{2})^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{a^{\frac{1}{p}}+b^{\frac{1}{p}}}{2}$ pa je $(a+b)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{2^{\frac{1}{p}}}{2}(a^{\frac{1}{p}}+b^{\frac{1}{p}})$ čime je dokazana pomoćna nejednakost.

Na osnovu tvrdjenja (3) Stava 2.1, uzimajući da je $\alpha = \beta = \frac{\alpha}{2}$, dobijamo da je $d_{f+g}(\alpha) \leqslant d_f(\frac{\alpha}{2}) + d_g(\frac{\alpha}{2})$ pa je

$$d_{f+g}(\alpha)^{\frac{1}{p}} \leqslant (d_f(\frac{\alpha}{2}) + d_g(\frac{\alpha}{2}))^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{c_p}{2}(d_f(\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{p}} + d_g(\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{p}})$$

gdje posljednja nejednakost važi na osnovu dokazane pomoćne nejednakosti. Množeći gornju nejednakost sa α i uzimajući supremum po $\alpha > 0$ dobijamo

$$\|f+g\|_{L^{p,\infty}} \leqslant c_p(\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}) \; gdje \; je \; c_p = max(2, 2^{\frac{1}{p}}).$$

□

L^p prostori su sadržani u slabim L^p prostorima, što je posljedica nejednakosti Čebiševa. [**5**]:

$$\mu(\{x \in X : |g(x)| > \epsilon\}) \leqslant \frac{\|g\|_{L^p}^p}{\epsilon^p}, \; g \in L^p(X, \mu), \; \epsilon > 0, \; 1 \leqslant p < +\infty$$

Zapravo važi sljedeće:

Stav 2.4. Neka je $0 < p < \infty$. Tada je

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leqslant \|f\|_{L^p}$$

i, dakle $L^p(X, \mu) \subset L^{p,\infty}(X, \mu)$.

Dokaz.

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\{\alpha d_f(\alpha)^{1/p} : \alpha > 0\}$$

po definiciji 2.2. $\alpha^p d_f(\alpha) = \alpha^p \mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big) \leqslant \|f\|_{L^p}{}^p$ na osnovu nejednakosti Čebiševa. Dakle vrijedi $\|f\|_{L^{p,\infty}}{}^p \leqslant \|f\|_{L^p}{}^p$ pa i $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leqslant \|f\|_{L^p}$. □

Veoma je korisna sljedeća činjenica [**4**]

$$f \in L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu) \implies f \in L^r(X,\mu) \ za \ p < r < q$$

što se lako može uočiti. Značaj slabog L^p prostora se vidi iz sljedećeg pooštrenja gore navedenog tvrđenja.

Teorema 2.1. Neka je $0 < p < q \leqslant \infty$ i $f \in L^{p,\infty}(X,\mu) \cap L^{q,\infty}(X,\mu)$. Tada $f \in L^r(X,\mu)$ za $p < r < q$. Pri tome je

$$\|f\|_{L^r} \leqslant (\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r})^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,\infty}}^{\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \|f\|_{L^{q,\infty}}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}.$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je $q < \infty$.

$$d_f(\alpha) \leqslant \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p} \wedge d_f(\alpha) \leqslant \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}$$

$$\Downarrow$$

$$d_f(\alpha) \leqslant min(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}) \tag{2.1}$$

Neka je

$$B = (\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p})^{\frac{1}{q-p}} \tag{2.2}$$

Ograničimo L^r normu od f. Na osnovu stava 2.2 i nejednakosti 2.1 važi:

$$\|f\|_{L^r}^r = r\int_0^\infty \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha \leqslant r\int_0^\infty \alpha^{r-1} min(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}) d\alpha \tag{2.3}$$

Za $0 < \alpha < B$ tj. $\alpha < (\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p})^{\frac{1}{q-p}}$ važi $\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p} < \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}$, što nam ukazuje zašto smo napravili baš taj izbor konstante B, pa je u ovom slučaju

$$min(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}) = \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}.$$

Za $\alpha > B$ tj. $\alpha > (\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p})^{\frac{1}{q-p}}$ važi $\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p} > \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}$ pa je u ovom slučaju

$$min(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}) = \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}.$$

Sada se desna strana nejednakosti 2.3 može predstaviti kao zbir integrala:

$$r\int_0^B \alpha^{r-1-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p d\alpha + r\int_B^\infty \alpha^{r-1-q} \|f\|_{L^{q,\infty}}^q d\alpha$$
$$= \frac{r}{r-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p B^{r-p} + \frac{r}{q-r} \|f\|_{L^{q,\infty}}^q B^{r-q}$$

Oba integrala konvergiraju jer je $r - p > 0$ i $r - q < 0$. Iz 2.2 slijedi da je gornja suma jednaka

$$\frac{r}{r-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p (\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p})^{\frac{r-p}{q-p}} + \frac{r}{q-r} \|f\|_{L^{q,\infty}}^q (\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p})^{\frac{r-q}{q-p}}$$

$$= (\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r})(\|f\|^p_{L^{p,\infty}})^{\frac{q-r}{q-p}}(\|f\|^q_{L^{q,\infty}})^{\frac{r-p}{q-p}}.$$

Sada nejednakost 2.3 postaje:

$$\|f\|^r_{L^r} \leqslant (\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r})(\|f\|^p_{L^{p,\infty}})^{\frac{q-r}{q-p}}(\|f\|^q_{L^{q,\infty}})^{\frac{r-p}{q-p}}$$

odakle slijedi tvrđenje za $q < \infty$.

Slučaj $q = \infty$ je jednostavnije dokazati. Očito je $d_f(\alpha) = 0$ za $\alpha > \|f\|_{L^\infty}$. Koristićemo nejednakost

$$d_f(\alpha) \leqslant \frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p} \text{ za} \alpha \leqslant \|f\|_{L^\infty} :$$

$$\|f\|^r_{L^r} = r\int_0^\infty \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha \leqslant r\int_0^\infty \alpha^{r-1-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} d\alpha$$

$$= r\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{r-1-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} d\alpha = r\frac{\|f\|^{r-p}_{L^\infty}}{r-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}$$

a to je zapravo nejednakost koju treba dokazati za $q = \infty$. □

3. Teorema

Definicija 3.1. Neka je T operator definisan na linearnom prostoru mjerljivih funkcija na mjerljivom prostoru (X, μ) sa kompleksnim vrijednostima i uzima vrijednosti u skupu svih mjerljivih funkcija na mjerljivom prostoru (Y, ν) sa kompleksnim vrijednostima.

T je *linearan* ako za svako f, g *i svako* $\lambda \in \mathbb{C}$, važi

$$T(f+g) = T(f) + T(g) \text{ i } T(\lambda f) = \lambda T(f).$$

T je *sublinearan* ako za svako f, g *i svako* $\lambda \in \mathbb{C}$, važi

$$|T(f+g)| \leqslant |T(f)| + |T(g)| \text{ i } |T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|.$$

T je *kvazilinearan* ako za svako f, g i svako $\lambda \in \mathbb{C}$, važi

$$|T(f+g)| \leqslant K(|T(f)| + |T(g)|) \text{ i } |T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|$$

za neku konstantu $K > 0$.

Sublinearnost je specijalan slučaj kvazilinearnosti ($K = 1$).

Teorema 3.1. (Marcinkijevičeva teorema) Neka su (X, μ) i (Y, ν) mjerljivi prostori i neka je $0 < p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Neka je T sublinearan operator definisan na prostoru $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ i uzima vrijednosti u prostoru mjerljivih funkcija na Y. Pretpostavimo da postoje konstante $A_0 > 0$ i $A_1 > 0$ takve da

$$\|Tf\|_{L^{p_0,\infty}(Y)} \leqslant A_0\|f\|_{L^{p_0}(X)} \text{ za svako } f \in L^{p_0}(X) \tag{3.1}$$

$$\|Tf\|_{L^{p_1,\infty}(Y)} \leqslant A_1\|f\|_{L^{p_1}(X)} \text{ za svako } f \in L^{p_1}(X) \tag{3.2}$$

Onda za svako $p_0 < p < p_1$ i svako $f \in L^p(X)$ važi

$$\|Tf\|_{L^p(Y)} \leqslant A\|f\|_{L^p(X)}, \tag{3.3}$$

gdje je

$$A = 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} \tag{3.4}$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je $p_1 < \infty$. Fiksirajmo $f \in L^p(X)$ i $\alpha > 0$. Neka je je $f_0^\alpha \in L^{p_0}(X)$ i $f_1^\alpha \in L^{p_1}(X)$

$$f_0^\alpha(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > \delta\alpha \\ 0, & |f(x)| \leqslant \delta\alpha \end{cases}$$

$$f_1^\alpha(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant \delta\alpha \\ 0, & |f(x)| > \delta\alpha, \end{cases}$$

za $\delta > 0$ koje će se naknadno odrediti. Jasno, $f = f_0^\alpha + f_1^\alpha$.

Pošto je $p_0 < p$ važi

$$\|f_0^\alpha\|_{L^{p_0}}^{p_0} = \int_{|f|>\delta\alpha} |f|^p |f|^{p_0-p} d\mu(x) \leqslant (\delta\alpha)^{p_0-p} \|f\|_{L^p}^p$$

i kako je $p < p_1$ i L^{p_1} norma funkcije f_1^α se može ograničiti slično

$$\|f_1^\alpha\|_{L^{p_1}}^{p_1} = \int_{|f|\leqslant\delta\alpha} |f|^p |f|^{p_1-p} d\mu(x) \leqslant (\delta\alpha)^{p_1-p} \|f\|_{L^p}^p.$$

Dakle, $f = f_0^\alpha + f_1^\alpha$ pri čemu $f_0^\alpha \in L^{p_0}$ i $f_1^\alpha \in L^{p_1}$. Zbog osobine sublinearnosti operatora T imamo: $|T(f)| \leqslant |T(f_0^\alpha)| + |T(f_1^\alpha)|$ što povlači

$$\{x : |T(f)(x)| > \alpha\} \subset \{x : |T(f_0^\alpha)(x)| > \frac{\alpha}{2}\} \cup \{x : |T(f_1^\alpha)(x)| > \frac{\alpha}{2}\}$$

i zbog toga

$$d_{T(f)}(\alpha) \leqslant d_{T(f_0^\alpha)}(\frac{\alpha}{2}) + d_{T(f_1^\alpha)}(\frac{\alpha}{2})$$

po definiciji norme slabog L^p prostora je

$$d_{T(f_0^\alpha)}(\frac{\alpha}{2}) \leqslant \frac{1}{(\alpha/2)^{p_0}} \|Tf_0^\alpha\|_{L^{p_0,\infty}}^{p_0}$$

i $d_{T(f_1^\alpha)}(\frac{\alpha}{2}) \leqslant \frac{1}{(\alpha/2)^{p_1}} \|Tf_1^\alpha\|_{L^{p_1,\infty}}^{p_1}$. Dakle,

$$d_{T(f)}(\alpha) \leqslant \frac{1}{(\alpha/2)^{p_0}} \|Tf_0^\alpha\|_{L^{p_0,\infty}}^{p_0} + \frac{1}{(\alpha/2)^{p_1}} \|Tf_1^\alpha\|_{L^{p_1,\infty}}^{p_1}.$$

Sada je na osnovu pretpostavki (3.1) i (3.2)

$$d_{T(f)}(\alpha) \leqslant \frac{A_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \|f_0^\alpha\|_{L^{p_0}}^{p_0} + \frac{A_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \|f_1^\alpha\|_{L^{p_1}}^{p_1}$$

$$= \frac{A_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \int_{|f|>\delta\alpha} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) + \frac{A_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{|f|\leqslant\delta\alpha} |f(x)|^{p_1} d\mu(x)$$

Na osnovu stava 2.2 i gornje nejednakosti dobijamo

$$\|Tf\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha) d\alpha$$

$$\leqslant p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\frac{A_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}}\int_{|f|>\delta\alpha}|f(x)|^{p_0}d\mu(x)d\alpha$$
$$+p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\frac{A_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}}\int_{|f|\leqslant\delta\alpha}|f(x)|^{p_1}d\mu(x)d\alpha$$
$$=p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{p-1}\alpha^{-p_0}\int_{|f|>\delta\alpha}|f(x)|^{p_0}d\mu(x)d\alpha$$
$$+p(2A_1)^{p_1}\int_0^\infty \alpha^{p-1}\alpha^{-p_1}\int_{|f|\leqslant\delta\alpha}|f(x)|^{p_1}d\mu(x)d\alpha$$
$$=p(2A_0)^{p_0}\int_X|f(x)|^{p_0}\int_0^{|f(x)|/\delta}\alpha^{p-1-p_0}d\alpha d\mu(x)$$
$$+p(2A_1)^{p_1}\int_X|f(x)|^{p_1}\int_{|f(x)|/\delta}^\infty\alpha^{p-1-p_1}d\alpha d\mu(x)$$
$$=\frac{p(2A_0)^{p_0}}{p-p_0}\frac{1}{\delta^{p-p_0}}\int_X|f(x)|^{p_0}|f(x)|^{p-p_0}d\mu(x)$$
$$+\frac{p(2A_1)^{p_1}}{p_1-p}\frac{1}{\delta^{p-p_1}}\int_X|f(x)|^{p_1}|f(x)|^{p-p_1}d\mu(x)$$
$$=p(\frac{(2A_0)^{p_0}}{p-p_0}\frac{1}{\delta^{p-p_0}}+\frac{(2A_1)^{p_1}}{p_1-p}\delta^{p_1-p})\|f\|_{L^p}^p$$

gdje integrali po α konvergiraju jer je $p_0<p<p_1$. Izaberimo $\delta>0$ tako da

$$(2A_0)^{p_0}\frac{1}{\delta^{p-p_0}}=(2A_1)^{p_1}\delta^{p_1-p}$$

tj.

$$\delta=2^{\frac{p_0-p_1}{p_1-p_0}}A_0^{\frac{p_0}{p_1-p_0}}A_1^{\frac{p_1}{p_0-p_1}}>0.$$

Sada

$$\|Tf\|_{L^p}^p\leqslant(2A_1)^{p_1}\delta^{p_1-p}(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p})\|f\|_{L^p}^p$$
$$=(2A_1)^{p_1}(2^{\frac{p_0-p_1}{p_1-p_0}}A_0^{\frac{p_0}{p_1-p_0}}A_1^{\frac{p_1}{p_0-p_1}})^{p_1-p}(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p})\|f\|_{L^p}^p$$
$$=2^{p_1+\frac{(p_0-p_1)(p_1-p)}{p_1-p_0}}A_0^{\frac{p_0(p_1-p)}{p_1-p_0}}A_1^{p_1+\frac{p_1(p_1-p)}{p_0-p_1}}(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p})\|f\|_{L^p}^p$$
$$=2^{p_1-(p_1-p)}A_0^{p\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}}A_1^{p\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}}(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p})\|f\|_{L^p}^p$$
$$=2^pA_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}p}A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}p}(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p})\|f\|_{L^p}^p$$

pa važi (3.3).

Dokazali smo teoremu kada je $p_1<\infty$. Sada dokažimo teoremu za $p_1=\infty$. Predstavimo f u obliku $f=f_0^\alpha+f_1^\alpha$, gdje je

$$f_0^\alpha(x)=\begin{cases} f(x), & |f(x)|>\gamma\alpha\\ 0, & |f(x)|\leqslant\gamma\alpha\end{cases}$$

$$f_1^\alpha(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant \gamma\alpha \\ 0, & |f(x)| > \gamma\alpha, \end{cases}$$

za zadato $\gamma > 0$. Ako izaberemo $\gamma = \frac{1}{2A_1}$ dobijamo

$$\|T(f_1^\alpha)\|_{L^\infty} \leqslant A_1 \|f_1^\alpha\|_{L^\infty} \leqslant A_1\gamma\alpha = \frac{\alpha}{2}$$

što povlači da je $\mu\{x : |T(f_1^\alpha)(x)| > \frac{\alpha}{2}\} = 0$ *tj.* $d_{T(f_1^\alpha)}(\frac{\alpha}{2}) = 0$ pa je $d_{T(f)}(\alpha) \leqslant d_{T(f_0^\alpha)}(\frac{\alpha}{2})$. Pošto T slika L^{p_0} u $L^{p_0,\infty}$, na osnovu definicije $L^{p_0,\infty}$ prostora i pretpostavke (3.1) slijedi da

$$d_{T(f_0^\alpha)}(\frac{\alpha}{2}) \leqslant \frac{1}{(\alpha/2)^{p_0}} \|Tf_0^\alpha\|^{p_0}_{L^{p_0,\infty}} \leqslant \frac{(2A_0)^{p_0}\|f_0^\alpha\|^{p_0}_{L^{p_0}}}{\alpha^{p_0}} = \frac{(2A_0)^{p_0}}{\alpha^{p_0}} \int_{|f|>\gamma\alpha} |f(x)|^{p_0} d\mu(x)$$

Sada na osnovu stava 2.2 i prethodne nejednakosti dobijamo

$$\|Tf\|^p_{L^p} = p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha) d\alpha$$

$$\leqslant p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{T(f_0^\alpha)}(\frac{\alpha}{2}) d\alpha$$

$$\leqslant p\int_0^\infty \alpha^{p-1} \frac{(2A_0)^{p_0}}{\alpha^{p_0}} \int_{|f|>\frac{\alpha}{2A_1}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) d\alpha$$

$$= p(2A_0)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{2A_1|f(x)|} \alpha^{p-p_0-1} d\alpha d\mu(x)$$

$$= \frac{p(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}}{p-p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} |f(x)|^{p-p_0} d\mu(x)$$

$$= \frac{p(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}}{p-p_0} \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = 2^p \frac{p}{p-p_0} {A_1}^{p(1-\frac{p_0}{p})} {A_0}^{p\frac{p_0}{p}} \|f\|^p_{L^p(X)}$$

pa važi $\|Tf\|_{L^p(Y)} \leqslant A\|f\|_{L^p(X)}$ gdje je $A = 2(\frac{p}{p-p_0})^{\frac{1}{p}} {A_1}^{1-\frac{p_0}{p}} {A_0}^{\frac{p_0}{p}}$. Uočimo da je za $p_1 = \infty$, gornja konstanta A zapravo konstanta iz (3.4). □

Napomena 3.1. Ako je T linearan operator, onda možemo oslabiti pretpostavku prethodne teoreme. Dovoljno je da nejednakosti iz (3.1) i (3.2) važe za sve proste funkcije f na X. Onda su funkcije f_0^α i f_1^α iz dokaza teoreme takođe proste, i zaključujemo da (3.3) važi za sve proste funkcije f na X. Zbog gustine, T ima jedinstveno proširenje na $L^p(X)$ koje takođe zadovoljava (3.3).

4. Primjena Marcinkijevičeve teoreme na ograničenost maksimalne funkcije u L^p normi

Marcinkijevičevu teoremu ćemo koristiti da bismo ograničili maksimalnu funkciju u L^p normi. Najprije definišimo maksimalnu funkciju.

Definicija 4.1. Neka je $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Hardi-Litlvudova maksimalna funkcija od f u oznaci Mf je definisana sa

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|dy$$

$B_r(x)$ je otvorena lopta poluprečnika r sa centrom u $x \in \mathbb{R}^n$. Dakle, maksimalna funkcija je supremum srednje vrijednosti od $|f|$ nad loptama sa centrom u $x \in \mathbb{R}^n$.

Uočimo da je $|M(\lambda f)| = |\lambda||Mf|$ i $|M(f+g)| \leqslant |M(f)| + |M(g)|$ tj. operator M je sublinearan.

Sada navodimo lemu o pokrivanju koju ćemo koristiti da dokažemo da je maksimalna funkcija ograničena u L^p normi za $1 < p < \infty$.

Lema 4.1. Neka je $\mathcal{U}$ kolekcija lopti u $\mathbb{R}^n$ i $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Ako je $m(V) > a$ za neko $a \geqslant 0$ onda postoje u parovima disjunktni $U_1, U_2, ..., U_k$ takvi da

$$\sum_{j=1}^{k} m(U_j) > \frac{a}{3^n}$$

Dokaz. Zbog regularnosti Lebegove mjere možemo izabrati $K \subset V$ kompaktan i $a < m(K) \leqslant m(V)$. $\mathcal{U}$ predstavlja otvoren pokrivač skupa K pa zbog kompaktnosti skupa K postoji konačan podpokrivač odnosno podkolekcija $V_1, V_2, ..., V_m \in \mathcal{U}$ koja takođe pokriva K. Neka je U_1 lopta V_i sa najvećim poluprečnikom. Neka je U_2 lopta V_i sa najvećim poluprečnikom takva da je $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Neka je U_3 lopta V_i sa najvećim poluprečnikom među loptama disjunktnim sa U_1 i sa U_2. Nastavljamo birati U_j među V_i tako da je U_j lopta sa najvećim poluprečnikom disjunktna sa ostalim već izabranim sve dok se V_i-ovi ne istroše. Primjetimo da je V_i ili jednako nekom U_j ili presjeca neko U_j sa većim radijusom ($U_j \cap V_i \neq \emptyset$). Neka je W_j lopta koncentrična sa U_j koja ima radijus tri puta radijus lopte U_j. Svako V_i je sadržano u nekom W_j. Imamo

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} W_j \implies a < m(K) \leqslant \sum_{j=1}^{k} m(W_j) = \sum_{j=1}^{k} 3^n m(U_j) = 3^n \sum_{j=1}^{k} m(U_j).$$

Dakle, važi

$$\sum_{j=1}^{k} m(U_j) > \frac{a}{3^n}.$$

□

Teorema 4.1. Maksimalna funkcija je ograničena na $L^p(\mathbb{R}^n)$ za $1 < p < \infty$ tj. postoji $C = C_p > 0$ tako da $\|Mf\|_{L^p} \leqslant C\|f\|_{L^p}$.

Dokaz.

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|dy \leqslant \sup_{r>0} \frac{m(B_r(x))}{m(B_r(x))} \|f\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty}.$$

Definišimo $A_\alpha = \{x : M(f)(x) > \alpha\}$. Ako $A_\alpha = \emptyset$ onda je $d_{Mf}(\alpha) = \mu(\emptyset) = 0$ pa važi

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \alpha d_{Mf}(\alpha) = 0 \leqslant A_0 \|f\|_{L^1}.$$

Ako $A_\alpha \neq \emptyset$, onda za svako $x \in A_\alpha$ možemo izabrati r_x tako da $\frac{1}{m(B_{r_x}(x))} \int_{B_{r_x}(x)} |f(y)|dy > \alpha$. $\{B_{r_x}(x)\}$ pokriva A_α tj. $A_\alpha \subset \bigcup_{x \in A_\alpha} B_{r_x}(x)$.

Fiksirajmo $\beta > 0$ tako da je $m(A_\alpha) > \beta$. Na osnovu leme o pokrivanju možemo izabrati disjunktne kugle $B_{r_{x_1}}(x_1), B_{r_{x_2}}(x_2), ..., B_{r_{x_k}}(x_k)$ koje ćemo označiti sa $B_1, B_2, ..., B_k$ takve da

$$\sum_{i=1}^{k} m(B_i) > \frac{\beta}{3^n}.$$

Tada

$$\beta < 3^n \sum_{i=1}^{k} m(B_i) \leqslant \frac{3^n}{\alpha} \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} |f(y)|dy \leqslant \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy$$

Puštajući da $\beta \to m(A_\alpha)$ dobijamo da je $m(A_\alpha) \leqslant \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_{L^1}$ pa je $\alpha m(A_\alpha) \leqslant 3^n \|f\|_{L^1}$ odakle dobijamo da je $\sup_\alpha \alpha m(A_\alpha) \leqslant 3^n \|f\|_{L^1}$ tj.

$$\sup_\alpha \alpha d_{Hf}(\alpha) \leqslant 3^n \|f\|_{L^1}$$

Dakle, važi

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \leqslant 3^n \|f\|_{L^1}.$$

Kako su ispunjene pretpostavke Marcinkijevičeve teoreme o interpolaciji za svako $p \in (1, \infty)$ to važi

$$\|Mf\|_{L^p} \leqslant C \|f\|_{L^p}$$

□

5. Zaključne napomene

Teorema predstavljena u radu predstavlja osnovu moderne teorije interpolacije. Marcinkijevičeva tehnika se razvila u realan metod interpolacije. Postoji mnogo knjiga o interpolaciji operatora i njenoj primjeni koja je veoma velika. Operatori predstavljaju glavni objekat proučavanja klasične funkcionalne analize. Zbog prirode teorije interpolacije operatora u radu su izloženi pojmovi iz funkcionalne i harmonijske analize. Teoreme interpolacije predstavljaju moćan alat za dokazivanje nejednakosti odnosno procjenu norme operatora, kao što smo vidjeli u četvrtoj glavi gdje je teorema primijenjena na ograničenost L^p norme maksimalne funkcije. Teorema se može primjeniti i na procjenu norme Hilbertove transformacije ali ova primjena nije razmatrana u radu. Navedene nejednakosti su veoma bitne u funkcionalnoj i harmonijskoj analizi, otuda i veliki značaj teorije interpolacije u harmonijskoj analizi. Marcinkijevičeva teorema se dalje može generalizovati i na mnogo širu klasu

prostora poznatu kao Lorencovi prostori. Takođe, spomenuta teorema se može generalizovati u okviru interpolacije prostora. Pored Marcenkijevičeve teoreme koja se razvila u realnu metodu interpolacije, osnovu moderne teorije interpolacije predstavlja i Ris-Torinova teorema koja se razvila u kompleksan metod interpolacije, a koja nije dio ovog rada. Spomenuta teorema se koristi za procjenu norme operatora te daje dobro i prirodniju procjenu norme, s tim da je za njenu primjenu potrebno da imamo jake procjene norme operatora. U slučaju procjene norme maksimalne funkcije nije pogodno koristiti ovu teoremu jer maksimalna funkcija nema dobre granične procjene norme. Zapravo, Marcinkijevičeva teorema je prikladnija u slučajevima kada možemo procjeniti slabu normu operatora tj. kada operator zadovoljava procjenu slabog tipa. Osim toga, Marcinkijevičeva teorema je primjenjiva na mnogo širu klasu operatora, naime na sublinearne operatore.

6. Život Jozefa Marcinkijeviča i njegovi rezultati

Slika 1. Jozef Marcinkiewicz, 1910.- 1940.

Jozef Marcinkijevič je jedna od najznačajnijih ličnosti u poljskoj matematici. Rođen je 12. aprila 1910. u malom selu Čimoska (Cimoszka) blizu Bjelistoka (Bialystok) (Poljska). Roditelji su mu bili Klemens Marcinkijevič i Aleksandra Marcinkijevič. Jozef je bio četvrto od njihovih petoro djece. Marcinkijevič je odrastao sa zdravstvenim problemima, imao je problema sa plućima ali ovo ga nije sprječilo da se bavi sportom, posebno je bio vješt u plivanju i skijanju. Zbog slabog zdravlja, prvo je pohađao privatne časove kod kuće, zatim je završio osnovnu školu u Janovu (Janow) te gimnaziju u Sokolkoj (Sókołka). U periodu od 1924 - 1930. školovao se u državnoj gimnaziji Zigmund August (Zygmunt August). Maturirao je 22. juna 1930. godine.

1930. upisao je Stefan Batori (Stefan Batory) univerzitet (USB) u Vilnu(Wilno). Od prve godine je pokazao znanje i izuzetan matematički talenat čime je privukao

pažnju tri profesora. Najviše je sarađivao sa Antonijem Zigmundom. Na drugoj godini studija je učestvovao u Zigmundovom kursu o ortogonalnim redovima. Iako je ovaj kurs bio pretežak za prosječnog studenta druge godine Marcinkijevič je dobio dozvolu Zigmunda da pohađa isti. To je bio početak njihove uspješne matematičke saradnje. Zigmund ga je smatrao za svog najboljeg studenta iako je imao mnogo studenata u Poljskoj i Americi.

Zahvaljujući Zigmundu koji je preživio rat i postao značajan matematičar u svijetu, ime Marcinkijevič je takođe postalo široko poznato među matematičarima. Marcinkijeviča je zanimala muzika, slikanje, poezija te je i sam pisao poeziju. Zapravo je bio veoma svestran i pričao o raznim temama. Učio je engleski, francuski i italijanski. Ipak, matematika je uvijek bila na prvom mjestu. Diplomirao je 1933. nakon samo tri godine studija a već 20.juna 1933. je magistrirao sa tezom pod naslovom Konvergencija Furije - Lebegovih redova i mentorstvom profesora Zigmunda. Teza je sadržala prve originalne rezultate iz matematike i sadržala je između ostalog dokaz nove interesantne teoreme da postoje neprekidne periodične funkcije čiji trigonometrijski interpolirajući polinomi koji odgovaraju ekvidistantnim nodalnim tačkama, divergiraju skoro svugdje. Ovi rezultati su u proširenoj formi predstavljeni u njegovoj doktorskoj tezi, dvije godine kasnije. U međuvremenu je služio vojsku, odmah nakon završetka master studija. Marcinkijevič je svoje vojne dužnosti shvatao ozbiljno ali sa smislom za humor. Nakon što je završio vojni kurs sa odličnim uspjehom, premješten je u rezervu i bio je asistent na univerzitetu u Vilnu. Nakon odbrane doktorske teze dobio je jednogodišnju stipendiju Fonda za nacionalnu kulturu pa je boravio na Univerzitetu Jan Kazimir (Jan Kazimierz) u Lavovu (Lwów) u Ukrajini. Ovdje je sarađivao sa Juliusom Pavel Sauderom (Juliusz Paweł Schauder) koji je prethodno proveo vrijeme u Parizu radeći sa Adamarom (Hadamard). Takođe je sarađivao sa Stefanom Kacmarsom (Stefan Kaczmarz) i Vladislavom Orličem(Władisław Orlicz) te se zainteresovao za problem opštih ortogonalnih sistema i napisao seriju članaka na tu temu. Kada se u jesen 1936. vratio u Vilno postao je viši asistent a sljedeće godine i docent. Sa 27 godina je bio najmlađi docent doktor na USB-u. Marcinkijevič je dobio još jednu stipendiju Fonda za nacionalnu kulturu, ovaj put je boravio u Parizu od proljeća 1939. Dok je boravio u Parizu dobio je ponudu za poziciju šefa katedre za matematiku na Univerzitetu u Poznanu i čekao je odobrenje Ministarstva obrazovanja kako bi to preuzeo 1939/40 akademske godine, međutim zbog izbijanja rata nisu ostvareni planovi. Takođe, u Parizu je imao ponudu za profesora na američkom univerzitetu koju je odbio. Za vandrednog profesora izabran je u junu 1939. na Univerzitetu u Poznanu. U Parizu je od kraja 1938. devet mjeseci boravila Irena Slavinska, svršeni student poljske i romanske literature na USB-u u Vilnu koja je bila njegova zaručnica. Iz Pariza je otišao u Englesku gdje je bio u avgustu 1939. kada ga je pogoršana politička situacija opredijelila da se vrati u Poljsku jer je bio oficir u vojnoj rezervi te je osjećao dužnost prema svojoj zemlji. Ovo pokazuje da Marcinkijevič nije bio samo naučnik, nego i veliki patriota. Rat je izbio nekoliko dana nakon što se vratio u Vilno. Posljednja vijest o Marcinkijeviču je da je bio zatvorenik te da je tražio matematičke knjige, o tome je pisao Zigmund. Tačan datum smrti je nepoznat jer su oficijalni sovjetski dokumenti nedostupni ili

uništeni. Jedina poznata informacija je da je to bilo između 5. aprila i 12. maja 1940. Tokom svog boravka u Parizu i Londonu Marcinkijevič je pisao matematičke radove u formi rukopisa koje je ostavio roditeljima na čuvanje. Nažalost i roditelji su tragično nastradali u ratu i nema tragova ovih rukopisa.

Marcinkijevič je 1939. publikovao članak koji se sastojao od dvije stranice i koji je sadržao Marcinkijevičevu teoremu interpolacije bez dokaza. On je poslao pismo Zigmundu u kojem je dokazao teoremu za $p_0 = q_0 = 1$ i $p_1 = q_1 = 2$. Nakon rata Zigmund je rekonstruisao sve dokaze i objavio ih 1956. Zato se ponekad ova teorema naziva Marcinkijevič - Zigmundova interpolacijska teorema. 1953. Zigmund je predstavio sve dokaze na seminaru u Čikagu, informišući učesnike da je razvijao Marcinkijevičeve ideje. Takođe, teoremu za $p_0 = q_0$ i $p_1 = q_1$ je 1953. dokazao Zigmundov student doktorskih studija Miša Kotlar (Mischa Cotlar)1953. te Viliam Riordan (William J. Riordan) 1955. za $1 \leqslant p_i \leqslant q_i \leqslant \infty, i = 0, 1$. Marcinkijevič je vjerovatno prvi koristio izraz interpolacija operatora. Ris i Torin su pričali o teoremama konveksnosti.

References

[1] L. Maligranda, *Jozef Marcinkiewicz (1910.-1940.)- on the centenary of his birth*, Marcinkiewicz centenary volume, Banach center publications, volume 95, Institute of mathematics Polish academy of sciences , Warszawa (2011), 111–222.

[2] C. Bernard. Interpolations theorem and applications. University of Chicago REU 2013. Dostupno na: http://math.uchicago.edu/ may/REU2013/REUPapers/Bernard.pdf

[3] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Springer, 2008.

[4] Giovanni Leoni, L^p Spaces and Interpolation, 2015. dostupno na: http://giovannileoni.weebly.com/uploads/3/1/0/5/31054371/singulars15-lectures-2015-05-01.pdf

[5] M. Arsenović, M. Dostanić i D. Jocić. *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora.* Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 1998.

Mašinski fkultet, Univerzitet u banjoj Luci, 78000 Banja Luka, Bosna i Hercegovina
E-mail address: ivana.savkovic@mf.unibl.org