**MAT-KOL (Banja Luka)** **ISSN 0354-6969 (o)**
**XXV (3)(2019),** 161-175 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1903161P

# ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗОВА[1]
# (Limits of the arrays)

**Марија Петровић**

Економска школа у Нишу,
Мајаковског 2, 18000 Ниш, Србија,
(делатност ван седишта-Дољевац)

e-mail: marija.petrovic20@yahoo.com

**Сажетак**: У овом раду су објашњене основне особине конвергентних и дивергентних низова.

**Кључне речи и изрази**: Бројевни низ, конвергентан низ, дивегентан низ, гранична вредност низа.

**Abstract**: In this paper, some basic properties of convergent and divergent arrays are explained.

**Key words and phrases**: series, convergent series, divergent series, limit of the series.

**AMS** Subject Classification (2010): **40A05, 97B20, 97I30**

**AMS** Subject Classification (2010): **D40, I20, I30, U30**

Наставни предмет: Математика
Наставна тема: Низови
Наставна јединица: Гранична вредност низа
Тип часа: Утврђивање
Облик рада: Фронтални, индивидуални
Наставне методе: Усмено излагање, дијалошка метода, самостални рад ученика
Наставна средства: Пано са дефиницијама, Прилози 1-4 (копирани материјал)
Остварени стандарди: 2.МА. 2.3.2 Разуме концепт конвергенције низа и израчунава граничну вредност низа у једноставним случајевима

[1] Ову лекцију аутор је предавао као саставни део испита за лиценцу

Циљ часа: Утврђивање појма граничне вредности низова, примена особина бројевних низова при решавању задатака

Задаци наставног часа:

Образовни задаци: Ученици треба да:

- утврде знања о бројевним низовима,
- увежбају израчунавање граничне вредности различитих низова

Васпитни задаци: Ученици треба да:

- развију концентрацију као и упорност за упоран и предан рад,
- развију поступност и систематичност у раду
- развију позитиван однос према математици,
- развију самопоуздање у сопствене математичке способности,
- развију процес самовредновања и критичког мишљења кроз проверу тачности решења

Функционални задаци: Ученици треба да:

- развију логичко и аналитичко размишљање,
- јачају концентрацију и увежбавају прецизност у раду,
- увежбавају писмено математичко изражавање

Школа: Прва економска школа у Београду

Разред и одељење и смер: $III_6$, економски техничар

Датум реализације часа: 26. 11. 2018. г.

Место извођења наставе: Кабинет за математику

Корелација: Математички садржаји из области граничних вредности функција и испитивања особина реалних функција

Међупредметне компетенције: Компетенција за целоживотно учење, сарадња, комуникација

Исход часа: Ученици ће умети да одређују конвергенцију низа и граничну вредност различитих бројевних низова

Литература:

[1] Г. Војводић, М. Вукасовић, Ђ. Паунић, В.Петровић, Р. Тошић, *Математика са збирком задатака за III разред средњег образовања*, Научна књига, Завод за издавање уџбеника, Нови Сад, 1989.

[2] С. Огњановић, Ж. Ивановић, *Математика 3, збирка решених задатака* за *III разред гимназија и техничких школа,* Круг, Београд,1996.

[3] В. Богославов, *Збирка решених задатака из математике 3*, Завод за уџбенике, Београд, 2011.

У овом раду, намењеном ученицима трећег и четвртог разреда средњих школа, приказане су основне особине низова, конвергентност и дивергентност, као и гранична вредност низа и објашњене су јасним и конструктивним примерима. Коришћена је литература ([1], [2], [3]).

**Уводни део часа: (8 минута)**

Након представљања ученицима, наставник, кратким питањима, заједно са ученицима, обнавља до сада научено градиво у вези са низовима:

1. Шта је бројевни низ?

*Бројевни низ је свако пресликавање скупа природних бројева у скуп реалних бројева,* $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

2. Како обележавамо општи члан низа?

*Општи члан бројевног низа означавамо са* $a_n$.

3. Где најчешће представљамо чланове бројевног низа?

*Низове обично представљамо на бројевној правој.*

4. Када кажемо да је $a$ тачка нагомилавања низа $(a_n)$ ?

*Тачка* $a$ *је тачка нагомилавања низа* $(a_n)$ *када се близу ње налази бесконачно чланова низа* $(a_n)$, *док је ван околине само коначан број чланова.*

Наставник истиче циљ данашњег часа.

На овом часу утврдићемо већ стечена знања о граничним вредностима низова и одређивати граничне вредности различитих низова.

Познавање граничне вредности низа биће нам од користи током даљег проучавања низова на предстојећим часовима, а такође и када наредне школске године, будемо проучавали реалне функције.

Затим наставник пише наслов на табли:

**ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗОВА**

**Главни део часа: (25 минута)**

Наставник дели ученицима припремљени материјал, ПРИЛОГ 1, на коме се налази потребан материјал о наставној јединици и ПРИЛОГ 2.1 на коме су задаци које ће ученици решавати.

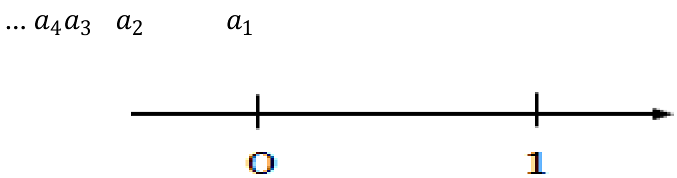
Посматраћемо следеће бројевне низове:

$$a_n = \left(\frac{1}{n}\right), a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right), a_n = (-1)^n,\ a_n = (2n-1).$$

Како бисмо боље анализирали ове низове, одредићемо првих неколико чланова сваког низа и представићемо их на бројевној правој.

- Првих неколико чланова низа $a_n = \frac{1}{n}$ су

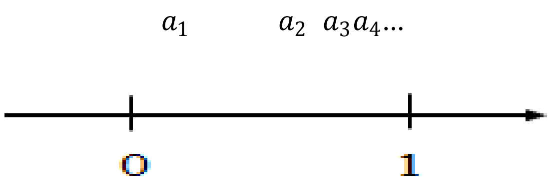
$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \cdots$$




Овај низ је конвергентан и важи да је $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

- Првих неколико чланова низа $a_n = \frac{n-1}{n}$ су

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{3}{4} \dots$$

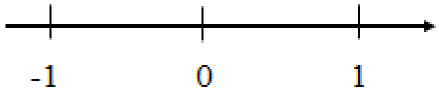



И овај низ је конвергентан и важи да је $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

- Првих неколико чланова низа $a_n = (-1)^n$ су

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1 \ldots$$

$a_1, a_3, \ldots$ $a_2, a_4, \ldots$



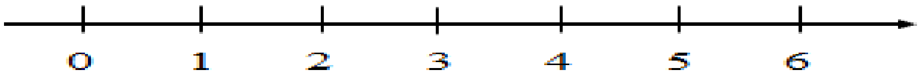

Тачке нагомилавања овог низа су 1 и $-1$ и овај низ је дивергентан.

- Првих неколико чланова низа $a_n = 2n - 1$ су

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7 \ldots$$

и овај низ је дивергентан.

$a_1$ $a_2$ $a_3$ $a_4 \ldots$




$\lim_{n\to\infty} 2n - 1 = +\infty$.

Наставник показује ученицима пано на коме се налази већ позната дефиниција граничне вредности низа. Објашњава ученицима све делове математичког записа

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)|a_n - a| < \varepsilon$$

и појашњава дефиницију:

Низ $(a_n)$ је конвергентан и има граничну вредност $a$, ако се у свакој околини броја $a$ налази бесконачно чланова низа $(a_n)$, док се ван околине налази само коначан број чланова низа.

Ово записујемо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Дакле, да поновимо:

Конвергентни су низови $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ и $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)$ и то записујемо овако: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

Трећи низ, $a_n = (-1)^n$ није конвергентан. Он има две тачке нагомилавања. То су $-1$ и $1$ и овај низ је дивергентан.

Ни четврти низ, $a_n = (2n - 1)$ није конвергентан. И за њега кажемо да је дивергентан, а његови чланови теже ка $+\infty$. Ово записујемо

$$\lim_{n\to\infty} 2n - 1 = +\infty.$$

Дефиницију дивергентних низова ученици могу пронаћи у ПРИЛОГУ 1.

Наставник ученицима показује на паноу дефиниције дивергентних низова, као и особине конвергентних низова, којима ће се детаљније бавити на наредним часовима.

Након тога, ученици проналазе у Прилогу 2.1 задатке за вежбу.

Треба пажљиво да прочитају текст и да дођу до решења, користећи до сада стечено знање.

**Активности ученика:**

Ученик прати инструкције наставника, пише, црта, одговара на питања, поставља питања, решава задатке на наставном листићу и на табли и тражи помоћ уколико му је потребна.

**Активности наставника:**

Наставник поставља питања, одговара на питања, усмерава ученике да правилно решавају задатке, даје инструкције и додатна објашњења, прати индивидуални рад ученика, подстиче рад, охрабрује ученике да слободно питају све што им није јасно.

Први задатак би, без проблема, требало да реше сви ученици.
Други и трећи задатак би требало прокоментарисати на табли.
Гранична вредност низа $a_n = \frac{6n+1}{3n-1}$ одређује се тако што цео разломак делимо променљивом n, док код низа $a_n = \frac{4n+3}{n^2}$ смемо да поделимо и са $n^2$.
Постоје и задаци са звездицом, за талентованије ученике.

Ученици индивидуално решавају задатке, док их наставник обилази и надгледа њихов рад.

Наставник поново разјашњава одређене кораке, ако за то постоји потреба.

Наставник дели ученицима радне листове за самосталну вежбу у ПРИЛОГУ 2.2. у коме се налази и домаћи задатак (1208. и 1209. задатак из ([2])) и евалуациони листић. Сугерише ученицима да пажљиво прочитају задатке, рашчлане проблем и покушају сами да их реше.
Такође требало би да издвоје кључне речи из данашње лекције.

Ако наставник у току рада примети да неки ученик ни уз његову помоћ не може да уради ни један задатак, даје му наставни листић предвиђен за ученике који слабије напредују.

Такође, ученике који брже напредују подсећа да ураде задатке са звездицом.
Овој категорији задатака припада и следећи пример, који би, уколико су за то створени услови, свакако требало урадити.

Одредити граничну вредност низа задатог општим чланом:

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)},\ n \in \mathbb{N}.$$

Сабирци у општем члану овог низа се могу записати у облику $\frac{1}{k\cdot(k+1)}$, $k = 0,1,2,\dots,n$, а како је некима од вас који сте у нижим разредима ОШ ишли на такмичења познато, $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa+1}$. До овог закључка се може доћи и коришћењем метода неодређених коефицијената:
$\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{(A+B)k+A}{k\cdot(k+1)}$, одакле је, упоређивањем коефицијената уз одговарајуће степене непознате (први и нулти степен) лако израчунати да је $A = 1$ и $B = -1$.
Сада је

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Лако је израчунати да је $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$.

**Завршни део часа: (12 минута)**

Овај део часа наставнику служи да обнови дефиниције, да ученици сами наведу кључне речи и да, заменом радних листова са другом из клупе, провере добијена решења задатака. Затим наставник сакупља евалуационе листиће на којима су ученици оценили квалитет одржаног часа.

Наравно, треба похвалити највредније ученике и подстаћи све да на време ураде домаћи задатак.

ПРИЛОГ 1

Бројевни низ је свако пресликавање скупа природних бројева у скуп реалних бројева, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Општи члан бројевног низа означавамо са $a_n$, а низове обично представљамо на бројевној правој.

Број $a$ је гранична вредност низа $(a_n)$ ако се у свакој $\varepsilon-$ околини броја $a$ налази бесконачно чланова низа $(a_n)$, док је ван $\varepsilon-$ околине само коначан број чланова.

Симболички, записујемо:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)|a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Бројевни низ може имати више тачака нагомилавања и тада је дивергентан и нема граничну вредност.

Такође дивергентни су и низови за које је испуњено следеће:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall M \in R)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0) \Longrightarrow a_n > M$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall M \in R)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0) \Longrightarrow a_n < M$$

Низ $(a_n)$ је ограничен ако постоје реални бројеви $a$ и $b$ такви да за све чланове низа важи да је $a \leq a_n \leq b$ .

За низ $(a_n)$ кажемо да је:
*строго растући,* ако је за све $n \in N$: $a_n < a_{n+1}$
*растући,* ако је за све $n \in N$: $a_n \leq a_{n+1}$
*строго опадајући,* ако је за све $n \in N$: $a_n > a_{n+1}$
*опадајући,* ако је за све $n \in N$: $a_n \geq a_{n+1}$ .

**Монотон и ограничен низ је конвергентан**.

За конвергентне низове $(a_n)$ и $(b_n)$ важи:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ уз услов да важи $b_n \neq 0$ и $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Посматраћемо следеће бројевне низове:

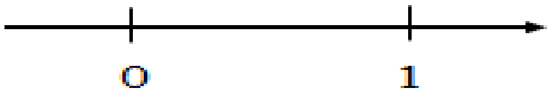
$a_n = \left(\frac{1}{n}\right), a_n = \left(\frac{n\,1}{n}\right), a_n = (-1)^n, a_n = (2n - 1).$

Како бисмо боље анализирали ове низове, одредићемо првих неколико чланова сваког низа и представићемо их на бројевној правој.

- Првих неколико чланова низа $a_n = \frac{1}{n}$ су

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \cdots$$

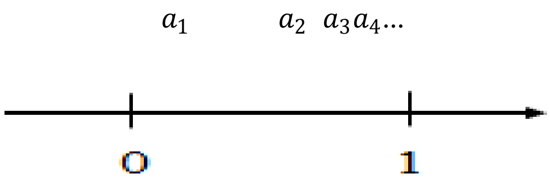
... $a_4 a_3$ $a_2$ $a_1$




Овај низ је конвергентан и важи да је $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

- Првих неколико чланова низа $a_n = \frac{n-1}{n}$ су

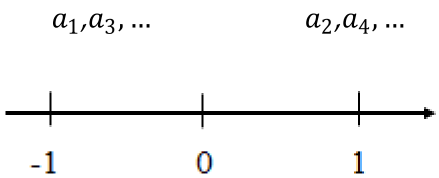
$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{3}{4} \ldots$$




И овај низ је конвергентан и важи да је $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1$.

- Првих неколико чланова низа $a_n = (-1)^n$ су

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1 \ldots$$

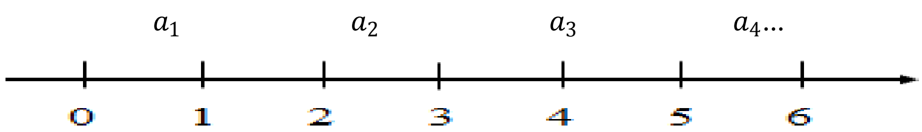



Тачке нагомилавања овог низа су 1 и $-1$ и овај низ је дивергентан.

- Првих неколико чланова низа $a_n = 2n - 1$ су

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7 \ldots$$

и овај низ је дивергентан.




$\lim_{n\to\infty} 2n - 1 = +\infty.$

## ПРИЛОГ 2.1

**Задатак 1**. Одредити првих пет чланова и граничну вредност низа
$$a_n = \frac{1}{n^2}.$$

**Задатак 2**. Да ли је конвергентан следећи низ $a_n = (1-n)$?
Напиши неколико његових чланова.

**Задатак 3**. Одреди следеће граничне вредности:
а) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{3n-1}$ б) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{n^2}$.

**Задатак 4***. Да ли је низ $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ конвергентан? Образложи одговор.

**Задатак 5***. Израчунај граничне вредности:
а) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+2}$ б) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$.

## ПРИЛОГ 2.2

**Задатак 1**. Одредити првих пет чланова и граничну вредност низа:
а) $a_n = \frac{1}{2n}$ б) $a_n = \frac{2n+1}{n}$

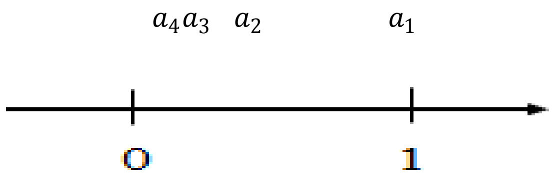
**Задатак 2**. Одреди следећу граничну вредност:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{2n+1}.$$

**Задатак 3**. Одреди следећу граничну вредност:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+6}{n^2+1}.$$

## ПРИЛОГ 3.1

## Решења задатака из Прилога 2.1

**Задатак 1**. Првих пет чланова низа су: $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{16}, a_5 = \frac{1}{25} \ldots$ и гранична вредност низа је $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.




**Задатак 2**. Неколико чланова низа су :

$a_1 = 1 - 1 = 0, a_2 = 1 - 2 = -1, a_3 = 1 - 3 = -2, a_4 = 1 - 4 = -3, a_5 = 1 - 5 = -4 \ldots$

Низ је дивергентан и важи да је $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ .

**Задатак 3**. Тражене граничне вредности су:

а) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{3n-1}^{(:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6n+1}{n}}{\frac{3n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{6+0}{3-0} = 2.$

б) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{n^2}^{(:n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} = 0 + 0 = 0.$

**Задатак 4∗**. Првих неколико чланова низа су :

$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = -\frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}, a_2 = -\frac{5}{6}, a_3 = \frac{6}{7} \ldots.$

Сви чланови овог низа нагомилавају се око тачака $1$ и $-1$, па закључујемо да низ $(-1)^n \frac{n}{n+1}$ има две тачке нагомилавања и због тога није конвергентан.

**Задатак 5∗**.

а) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+2}^{(:n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}{1+\frac{2}{n}}=$

$\frac{\lim_{n\to\infty}1+\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}}{\lim_{n\to\infty}1+\frac{2}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\lim_{n\to\infty}1+\frac{2}{n}}=\frac{1+1}{1}=\frac{2}{1}=2.$

б) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)\cdot(\sqrt{n^2+1}+n)}{(\sqrt{n^2+1}+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2}{(\sqrt{n^2+1}+n)}=$

$\frac{\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}+1}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{0}{1+1}=0.$

## ПРИЛОГ 3.2

## Решења задатака из Прилога 2.2

**Задатак 1**. Првих пет чланова низа су и гранична вредност једнаки су:

а) $a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{4}, a_3=\frac{1}{6}, a_4=\frac{1}{8}, a_5=\frac{1}{10}$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$

б) $a_1=3$, $a_2=\frac{5}{2}$, $a_3=\frac{7}{3}$, $a_4=\frac{9}{4}$, $a_5=\frac{11}{5}$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2.$

**Задатак 2**. $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{2n+1}^{(:n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n-1}{n}}{\frac{2n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=$

$=\frac{4-0}{2+0}=\frac{4}{2}=2.$

**Задатак 3.** $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+6}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+6}{n^2+1}^{(:n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2+5n+6}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0+0}{1+0}=\frac{3}{1}=3.$

Домаћи задатак: Задаци 1208. и 1209.

## ПРИЛОГ 2.3

## Задаци за индивидуални приступ:

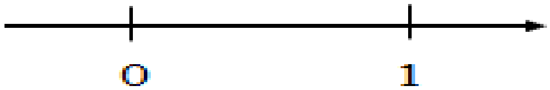
**Задатак 1**. На бројевној правој представи неколико чланова низа

$$a_n=\frac{1}{2n}.$$

Попунити таблицу:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | | | | | |

$a_1 = \quad , a_2 = \quad , a_3 = \quad , a_4 = \quad , a_5 =$




Ком броју теже ови чланови низа? Како бисмо то симболички записали?

**Задатак 2**. Одреди следећу граничну вредност: $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{n+1}$.

ПРИЛОГ 3.3

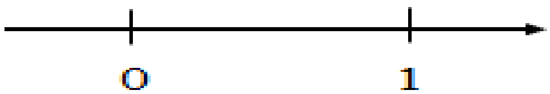
Решења задатака за индивидуални приступ

**Задатак 1**. Почетни чланови датог низа су:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{6}, a_4 = \frac{1}{8}, a_5 = \frac{1}{10},$$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{10}$ |

$a_3 \quad a_2 \quad a_1$




Чланови овог низа теже броју 0 и то записујемо овако: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

**Задатак 2**. Поделимо дати разломак променљивим $n$ и добијамо да је:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{n+1}^{(:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+3}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{4+0}{1+0} = 4.$$

ПРИЛОГ 4

Пано

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)|a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall M \in R)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0) \Rightarrow a_n > M$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall M \in R)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0) \Rightarrow a_n < M$$

За конвергентне низове $(a_n)$ и $(b_n)$ важи:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ уз услов да важи $b_n \neq 0$ и $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$

ЕВАЛУАЦИОНИ ЛИСТИЋ

1. Да ли ти се допада овакав рад на часу? ДА НЕ

2. Да ли те овај начин организације часа мотивише за рад? ДА НЕ

3. Којом оценом би оценио/ла час? 1 2 3 4 5