MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXV (3)(2019), 147-159 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1903147Z

ГЕОМЕТРИЈА НА ШАХОВСКОЈ ТАБЛИ

Милан Живановић

Висока школа струковних студија за образовање васпитача,
Крушевац, Ћирила и Методија, Србија e-mail:
E'mail: mzivanovic@vaspks.edu.rs

Сажетак: *Шаховска табла и особине фигура поред неисцрпне теорије саме шаховске игре имају огроман потенцијал за конструкцију и решавање разноврсних математичких проблема. Та разноликост се реализује како у рекреативној математици тако и у математичкој теорији. У оквиру својих истраживања овом проблематиком се првенствено баве комбинаторика, геометрија, алгебра, кибернетика, програмирање, али и друге математичке дисциплине. У овом раду ће бити дат осврт на неке од геометријских проблема на шаховској табли. Биће представљен један доказ Питагорине теореме, могућност увођења координата и симетрија, проблеми деобе и покривања шаховске табле. На крају ће бити описан и проблем „Путања скакача на шаховској табли“.*

Кључне речи и фразе: геометрија и шах, Питагорина теорема, резања шаховске табле, путање скакача

GEOMETRY ON THE CHESS TABLE

Milan Živanović

Preschool Teacher Training College,
Kruševac, Ćirila and Metodija, Serbia
e-mail: mzivanovic@vaspks.edu.rs

Abstract. Chessboard and figures on it besides the enviable chess game theory have great potential for constructing and solving various mathematical problems. This diversity is realized in both recreational mathematics and mathematical theory. Within their research, these issues are primarily focused on combinatorics, geometry, algebra, cybernetics, programming, and other mathematical disciplines. This paper will give an overview of some of the geometric problems on the chessboard. We will present a proof of Pythagorean Theorem, the possibility of introducing coordinates and symmetry, problems of division and covering of the chessboard. Finally, the problem of " Knight's tour" will be described.

Key words and phrases: *Geometry and chess, Pythagoras Theorem, cutting the chessboard, Knight's tour*

AMS Subject classification (2010): 00A08, 97D50, 97G10

Увод

Математика и шах имају много тога заједничког. Форме мишљења математичара и шахисте су веома блиске те није чудно што су математичари имали прилично доста успеха на шаховским такмичењима. Баш као што се шаховска партија одвија у складу са правилима игре, не остављајући никакве сумње о томе који је потез могућ а који не, тако се математичка теорија развија на основу њених „правила игре“ - аксиома и правила закључивања; као шаховски потез, сваки корак математичког доказа мора бити дозвољен правилима. Решавање шаховог проблема је као доказ математичке теореме: читава шаховска игра се у потпуности уклапа у оквир математике, представљајући неку врсту сложеног „рачуна“. Својом природом математички проблеми на шаховској табли залазе у различите математичке дисциплине. Ти проблеми су у почетку били најчешће комбинаторног, аритметичког или геометријског типа. Касније се решавању шаховске проблематике прилази и са позиција теорије графова и кибернетике. У овом тексту ће бити детаљније описани неки геометријски проблеми на шаховској табли.

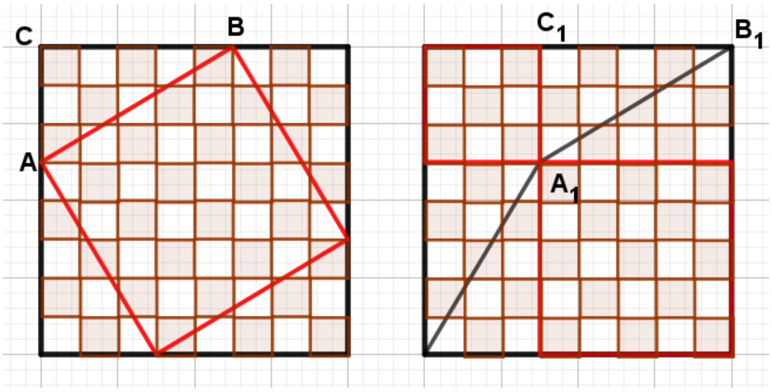
Питагорина теорема на шаховској табли

Питагорина теорема је, ако не најзначајниј,е онда сигурно најпознатије математичко тврђење, са веома богатом историјом. До данашњих дана објављено је више стотина њених доказа. Најимпозантнију збирку тих доказа објавио је Елиша Скот Лумис[1] 1940. године у књизи „Питагорина теорема“ у којој је сакупио 370 различитих доказа Питагорине теореме. Књига је репринтована 1968. године. Лумис је доказе класификовао на геометријске, алгебарске, динамичке и доказе коришћењем кватерниона. У

[1] Elisha Scott Loomis (18 септембар 1852 – 1 децембар 1940), био је амерички учитељ, математичар, генеалог, писац и инжењер

последње време има доста тзв. визуелних доказа, који представљају интерпретације геометријских доказа као низа узастопних слика, код којих су одговарајуће површине обојене истим бојама, или као компјутерске анимације.

Доказ који ћемо овде представити модификација је доказа из Лумисове поменуте књиге описаног на странама 49-50. Он о томе каже: „Доказ је осмислио средњошколац Морис Леснез из школе у Јужном Бенду Индија, а послао ми га је 16. маја 1939. његов наставник Вилсон Тортон“. Докааз је објављен и у чланку који је за часопис *Mathematics Magazine*, бр. 48 (1975) припремио Исак Руфус[2].



Слика 1.

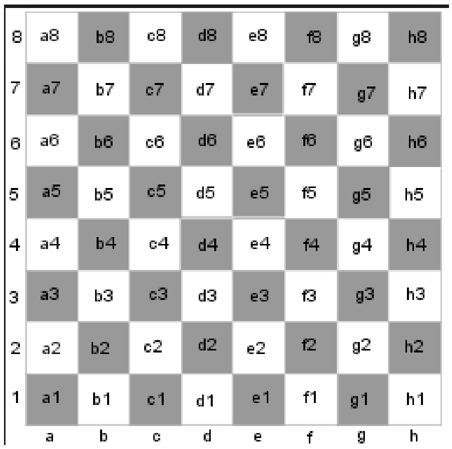
Посматрајмо две подударне шаховске табле и на њима два подударна троугла ABC и $A_1B_1C_1$ у положајима као на слици 1. Површина квадрат над хипотенузом AB се добије кад од површине шаховске табле на левој страни слике одузмемо четвороструку површину троугла ABC (доказ препуштамо читаоцу). Ако на десној шаховској табли одстранимо 4 конструисана троугла подударна троуглу $A_1B_1C_1$, а самим тим и троуглу ABC остају два мања квадрата. Страница једног од њих је катета A_1C_1, а другог једнака катети B_1C_1. Како су шаховске табле и на њима уочени подударни троуглови изабрани произвољно закључујемо да једнакост површине квадрата над хипотенузом са збиром квадрата конструисаних над катетама подударних троуглова важи уопште.

Координате и симетрије на шаховској табли

Сама шаховска табла својим обликом и поделом има предуслове математичког позиционирања поља и фигура на њима. Самим тим представља очигледно дидактичко средство за демнострацију правоуглог координатног система и особина изометријских трансформација у равни. То што њена симболика није чисто нумеричка, додатно поспешује могућност развијања апстрактних способности 1-1 придруживања.

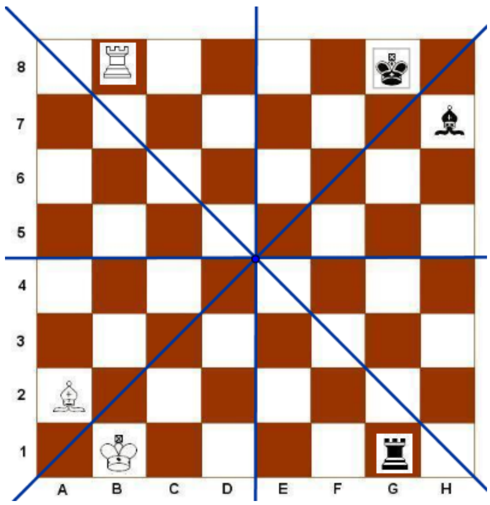
[2] Rufus Philip Isaacs (11. јун 1914. - 18. јануар 1981.) био је американски математичар (теорија игара)

Дакле, колоне су на табли обележене латиничним словима од a до h, а врсте природним бројевима од 1 до 8. Тако, рецимо ознака $h3$ представља поље које се налази у пресеку колоне h и врсте 3. На слици 2. је шаховска табла са свим обележеним пољима. Додатно обележавање фигура карактеристичним словима развија симболичко мишљење ученика.



Слика 2.

Постоје два основна типа задатака за увежбавање симболике шаховске табеле. Први је да се задата позиција фигура на табли „прочита“ а затим симболички запише. Захтев другог типа задатака је да симболички записану позицију ученик практично постави на таблу. Овакве проблеме могу решавати ученици нижих разреда основне школе што ће им касније бити одлична подлога за разумевање Декартовог правоуглог, а касније и других референтних система.

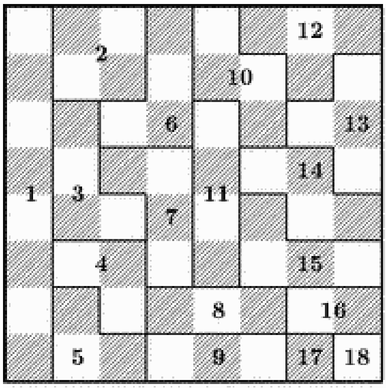


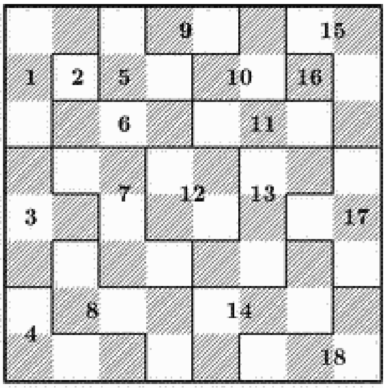
Слика 3.

Занемарујући боју поља на шаховској табли можемо уочити 4 осе симетрије: хоризонталну, вертикалну и две по дијагоналама, као и централну симетрију. Сама почетна позиција фигура на табли је симетрична у односу на хоризонталну осу. Узимајући и боју поља празна табла је централно симетрична. На слици 4. белом краљу симетрични су у односу на: хоризонталну осу бели топ, у односу на вертикалну осу црни топ, у односу на дијагоналу a1h8 бели ловац, у односу на дијагоналу h1a8 црни ловац, а централно симетричан је црни краљ. Ове појмове треба увести очигледно пре формалне дефиниције симетрија. Пред ученике можемо поставити захтев да неку фигуру поставе на таблу тако да са фиксираном буде симетрична у односу на изабрану осу или да у датој позицији уоче да ли има и које су фигуре симетрично постављене у односу на уочену осу. Померање фигуре у датом правцу и смеру је одлична препевдетичка активност за развијање појма вектора и транслације. Тако су два узастопна потеза истом фигуром идеалан пример композицију двеју транслација, а касније и других изометријских трансформација у равни. Тиме се може доћи до закључка о представљању изометријских трансформација преко осних симетрија.

Поплочавања и деобе шаховске табле

Под поплочавањем шаховске табле подразумевамо њено прекривање геометријским фигурама без преклапања и шупљина. Геометријске фигуре којим се врши поплочавање се састоје од целих квадратних поља на шаховској табли. Доказано је да се шаховска табла може покрити са највише 18 различитих фигура, рачунајући као различите и оне подударне које се користе за прекривање различито обојених поља. На слици 4. су два таква прекривања.





Слика 4.

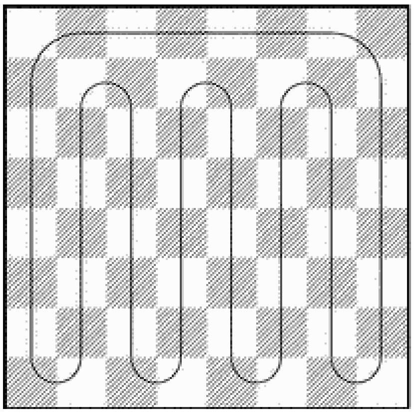
Погледајмо још неке занимљиве проблеме прекривања и резања шаховске табле.

Задатак 1. *Са шаховске табле су исечена два црна угаона поља a1 и h8. Да ли је такву таблу могуће прекрити са 31 домино плочицом*?

Решење: Свака домино плочица може покрити тачно једно бело и једно црно поље. Односно са 31 плочицом могуће је покрити по исто толико белих и црних поља. Плоча без два угаона поља садржи различит број црних и белих поља, те је стога немогуће покрити је са 31 домином.

Задатак 2. *Са шаховске табле исечено је једно бело и једно црно поље. Да ли је такву таблу увек могуће покрити са 31 домино*?

Решење: Показаћемо да је могуће увек. Посматрајмо затворену линију на шаховској табли као на слици 5. Ако са плоче уклонимо два суседна поља дуж уочене линије, то ће се прекинута линија састојати из 62 поља која дуж линије наизменично мењају боју. Постављањем домина дуж остатка линије прекрићемо сва преостала поља. Ако уклонимо било која два несуседна поља различите боје дуж посматране линије, она ће бити прекинута на два дела који пролазе кроз паран број поља. Сваки део линије, а тиме и плочу, је дакле, могуће покрити са датим доминама.



Слика 5.

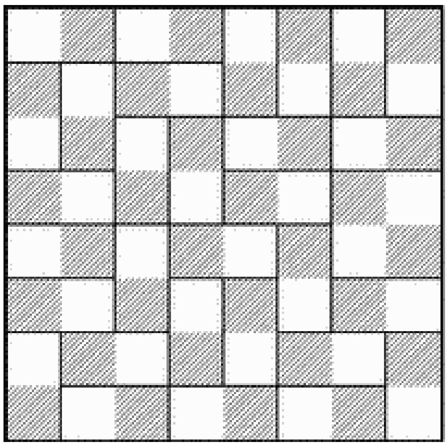
Задатак 3. *Који је минималан број поља потребно одстранити са шаховске табле тако да на остатак табле није могуће поставити ниједно домино*?

Решење: Ако са плоче уклонимо сва бела или сва црна поља на остатку плоче није могуће поставити ниједно домино. Докажимо да је број 32 минималан који задовољава тражени услов. Ако би уконили мање од 32 поља, међу преосталима, по Дирихлеовом принципу, има бар једно које се бојом разликује од других. У том случају оно мора бити суседно са неким пољем друге боје. Самим тим на та два поља је могуће поставити домино.

Задатак 4. *На колико начина је могуће прекрити шаховску таблу доминама, ако тачно две домине стоје у вертикалном положају*?

Решење: Прво закључујемо да обе домине морају бити у истим врстама иначе би број преосталих поља бар у две врсте био непаран и самим тим те врсте не би могли прекрити хоризонталним доминама. Takođe вертикалне домине морају бити или суседне или да је између њих паран број поља у једној врсти, уз услов да је и између домина и ивица табле паран број поља у једној врсти. Под тим условима у прве две врсте вертикалне домине могу бити суседне на 4 начина, да су између њих 2 поља у једној врсти 3 начина, са 4 поља између 2 начина и са 6 поља између 1 начин. Укупно 10 начина. Парова суседних врста у које можемо распоређивати по две домине је 7. Закључујемо да је шаховску таблу са две вертикалне и 30 хоризонталних домина могуће прекрити на 70 начина.

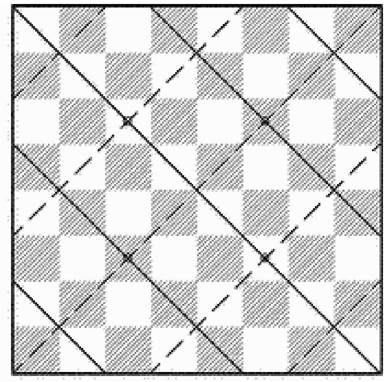
Напомена: Под стабилним домино поплочавањем подразумевамо оно које се не може разложити ни једном непрекидном вертикалном нити хоризонталном линијом између шаховских поља на два или више делова. Пример таквог поплочавања приказан је на слици 6.



Слика 6.

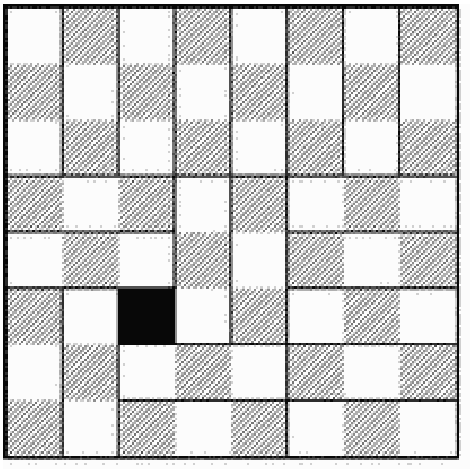
Задатак 5. Да ли је могуће шаховску таблу прекрити са 21 правим тримином и једним мономином?

Решење: За одређивање положаја мономина поставимо на табли два система паралелних правих као на слици 7.



Слика 7.

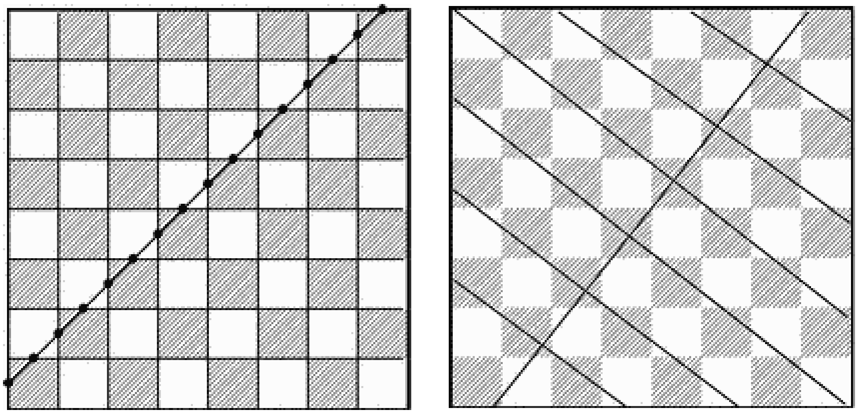
Праве су постављене тако да свака од њих може сећи само један тримино и да је сваки тримино сечен тачно једном правом из оба скупа. Оба скупа правих секу по 22 поља а имамо 21 тримино. Закључујемо да тримино неће покрити једно од два пута сечених поља. То су поља c3, c6, f3 и f6. На једно одтих поља треба поставити мономино, а остала прекрити триминима. Једно решење је дато на слици 8.



Слика 8.

Задатак 6. Одредити праволонијско сечење које пресеца максималан број шаховских поља, као и минималан број праволинијских сечења којима је пресечено свако поље шаховске табле.

Решење: Оба решења без коментара представљена су на слици 9.

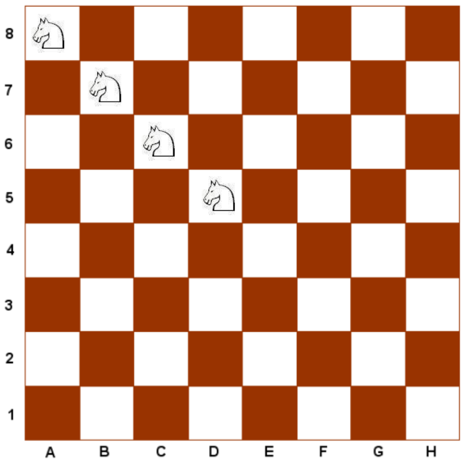


Слика 9.

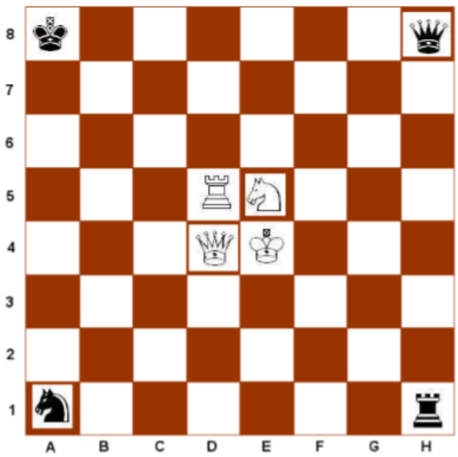
Решења два наредна задатка деобе табле даћемо на крају текста.

Задатак 7. *Шаховску таблу са слике 10. поделити на 4 подударна дела тако да у сваком буде по један скакач.*

Задатак 8. *Шаховску таблу са слике 11. Поделити на 4 подударна дела тако да у једном буду оба краља, у другом обе даме, у трећем оба топа и у четвртом оба скакача.*



Слика 10.



Слика 11.

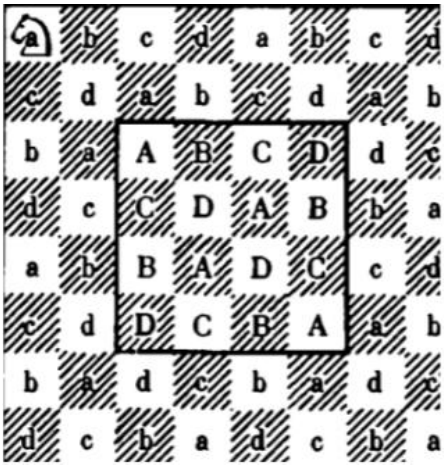
Путање скакача на шаховској табли

Проблем кретања скакача на шаховској табли се састоји у проналажењу путње скакача којом он треба да посети свако поље табле тачно једанпут крећући са по правилима шаховске игре. Ојлер је овом проблему посветио студију „Решење необичног питања које изгледа не подлеже никаквом истраживању“.

Ојлер је нашао више решења овог проблема, али није успео да пронађе тзв. магичну путању. То би била путања чији редни бројеви узастопних позиција скакача чине магични квадрат. Тек у августу 2003. године помоћу копјутера је доказано да не постоји магична путања скакача. За добијање тог резултата било је потребно 2 месеца непрекидног рада на компјутеру Pentium IV, 2.4 Mhz. Тим поступком пронађено је 130 полумагичних квадрата (неки од њих су били познати и раније) код којих је збир бројева по врстама и колонама 260, али збир бројева на дијагоналама одступа од тог магичног броја.

Постоји више поступака за одређивање неких од потпуних путања скакача. Овде ћемо описати два.

Метода Колинија[3]: Табла се подели на централни 4X4 квадрат и 48 спољашњих квадрата око централног. Централни квадрат се попуни великим словима A, B, C, D, а спољашњи одговарајућим малим као на Слици 12.



Слика 12.

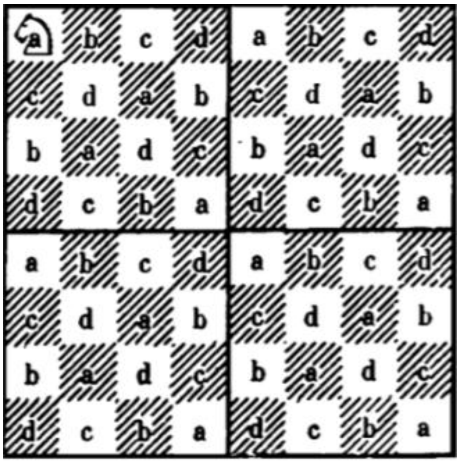
Путању полазимо са једног малог слова и обилазимо кретањем скакача око централног квадрата. При томе водимо рачуна да на последњи потез около не буде угаоно поље табле. Затим прелазимо у централни квадрат али на поље које није обележено истим словом и у том квадрату наставимо скакачев пут по пољима обележеним са истим словом. Кад завршимо путању у централном квадрату опет излазимо из њега на слододно поље обележено другим словом и тако до краја.

Метод Полињака[4] и Рожеа[5]: Шаховска табла се подели на 4 подударна 4X4 квадрата и обележи као на слици 13.

[3] Cosimo Alessandro Collini (14 окробар 1727 – 21 март 1806.), италијански историчар.

[4] Alphonse de Polignac (1826–1863), француски математичар.

[5] Peter Mark Roget (18 јануар 1779 - 12 септембар 1869), био је британски лекар, природни теолог и лексикограф.



Слика 13.

Скакач путању почиње избором произвољног поља. Најпре заврши кретање по пољима обележеним истим словима, а затим прелази у следећи квадрат на исто слово. Путању наставља тако док не пређе исто обележена поља у другом, а затим у трећем и четвртом квадрату. Након тога прелази на следеће слово и по истом принципу се креће до краја.

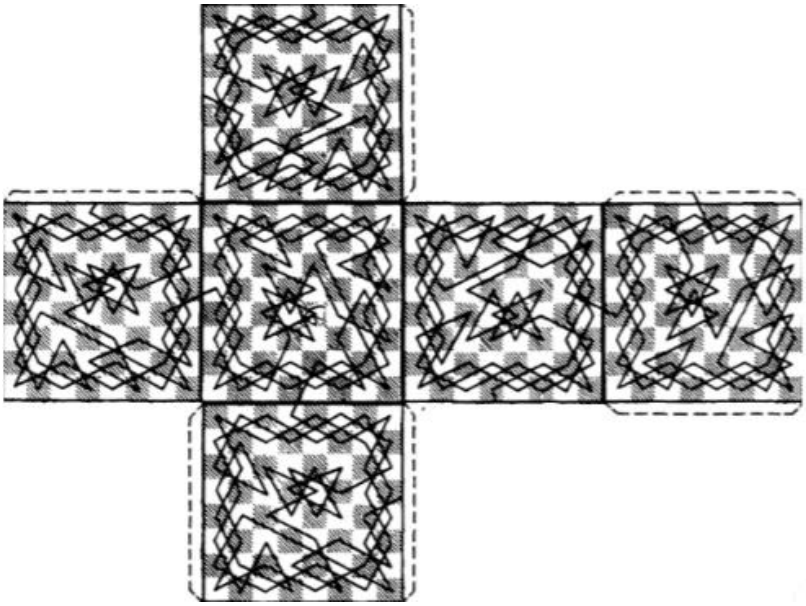
Једно од најинтересантнијих решења је путања Беверлија[6]. Она чини полумагични квадрат код кога су збирови по врстама и колонама 260. Додатно и квадрати 4X4 који настају деобом табле помоћу хоризонталне и вертикалне осе су такође полумагични са збиром 130. Такође, ако се табла подели на 16 квадрата типа 2X2 збир бројева у њима је такође 130. Путања Беверлија приказана је на слици 14.

8-	01	30	47	52	05	28	43	54
7-	48	51	02	29	44	53	06	27
6-	31	46	49	04	25	08	55	42
5-	50	03	32	45	56	41	26	07
4-	33	62	15	20	09	24	39	58
3-	16	19	34	61	40	57	10	23
2-	63	14	17	36	21	12	59	38
1-	18	35	64	13	60	37	22	11
	a	b	c	d	e	f	g	h
Beverley,1848 a8-c1								

Слика 14. Преузето са https://magictour.free.fr

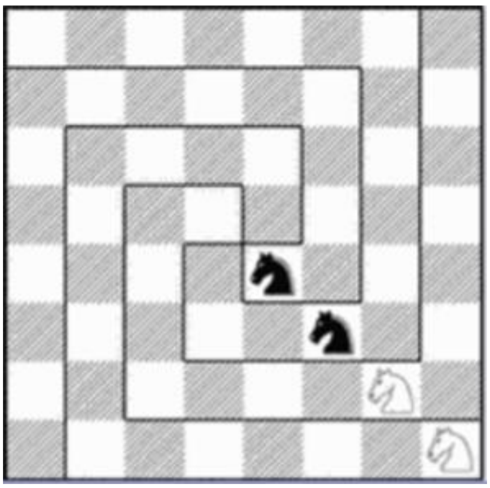
[6] William Roxby Beverley (1814 – 17 мај 1889),

Једно од уопштења проблема кретања скакача на шаховској табли је и путања по коцки којој су стране шаховске табле. Мрежа те коцке представљена је на слици 15.



Слика 15.

На сликама 16. и 17. дата су решења задатака 7 и 8.



Слика 16. Слика 17.

Литература:

[1] Е. Я. Гик . *Математика и шахматы*, Библиотечка Квант, Выпуск 24. Москва: Наука, 1983.

[2] H. E. Dudney. *536 puzzles & curious problems*, New York: Charles Scribner's Sons, 1967.

[3] E. S. Loomis. *The Pythahorean proposition.* Washington: The national council of teacher of mathematics. 1940. Доступно на адреси https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf, посећено 10.07.2019.

[4] S. D. Novčić. *Šah i matematika.* Beograd: Zavod udžbenike i nastavna sredstva, 1986.

[5] Cut the Knot. *Pythagorean Theorem*. Доступно на адреси: https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/#Loomis, посећено 28.04.2019.

[6] Computing Magic Knight Tours. Доступно на адреси: https://magictour.free.fr, посећено 12.07.2019.