

DRUŽENJE SA POLINOMIMA (Friendship with polynomials)

Dušan J. Simjanović

OŠ „Vuk Karadžić“, Doljevac b.b., 18410 Doljevac, Srbija
Fakultet Informacionih Tehnologija, Centar u Nišu
Bulevar Svetog Cara Konstantina 80A, 18000 Niš, Srbija

e-mail: dsimce@gmail.com

Sažetak: U ovome radu su, na interesantan i neobičan način, predstavljeni zadaci sa polinomima u kojima se javlja broj tekuće godine (2019).

Ključne reči i izrazi: Polinom, kvadrat binoma, rastavljanje polinoma na činioce, funkcija, funkcionalna jednačina.

Sažetak: In this paper, several polynomial problems with number 2019 involved, on interesting and unusual way, are presented.

Key words and phrases: Polynomial, square binomial, breaking polynomials into factors, function, functional equation.

AMS Subject Classification (2010): 97B20, 97H30, 08A40, 11R09, 12D05

ZDM Subject Classification (2010): H20, H30, I20

U ovom radu, namenjenom đacima viših razreda osnovne škole, kao i gimnazijalcima, opisane su, nadamo se, na lep i elegantan način, neke važne osobine polinoma, funkcija i funkcionalnih jednačina. Takođe, kako bi zadaci bili interesantniji i kako bi mlade čitaoce podstakli na razmišljenje i kreativan rad, iskorišćen je broj tekuće godine.

Glavni akteri:

NEDA, učenica sedmog razreda, vredna i marljiva devojčica

DANIJELA, Nedina sestra, talentovana učenica prvog razreda gimnazije prirodno-matematičkog smera

MAMA, uvek zabrinuta...

MAMA: Needo, hajde da ručamo! Ostavi te zadatke, pomoći će ti sestra kada dođe iz škole.

NEDA : Ali mama, moram da uradim domaći, imam polinome, da ih saberem i oduzmem, i još mnogo toga...

MAMA: Dolazi, evo i Danijele, pa posle radite zajedno.

Nakon 20 minuta...

DANIJELA: Da vidimo, malecka, kakvi su to teški zadaci, šta to treba da se sabere.

NEDA: Evo, zadatak kaže

ZADATAK 1. ([1], [2]) Dati su polinomi $P(x) = 2017x^2 - 2x + 2019$ i $Q(x) = 3x^2 - 2020x + 1$. Izračunati zbir i razliku ovih polinoma.

Rešenje:

DANIJELA: Pre nego što sabereš i oduzmeš polinome, moraš da uočiš koji su monomi slični, pa ih tek onda sabereš. Kada za monome kažemo da su slični?

NEDA: Monomi su slični ako se razlikuju samo u koeficijentu. U našem slučaju su to $2017x^2$ i $3x^2$ jer su ovde uz x^2 brojevi 2017 i 3 i $-2x$ i $-2020x$, ovde su koeficijenti uz x jednaki -2 i -2020 .

To znači da je

$$P(x) + Q(x) = (2017 + 3)x^2 + (-2 - 2020)x + (2019 + 1) = 2020x^2 - 2022x + 2020 \text{ i}$$

$$P(x) - Q(x) = (2017 - 3)x^2 + (-2 - (-2020))x + (2019 - 1) = 2014x^2 + 2018x + 2018.$$

Kapiram, sada je ovo jasno. Hvala seko.

A kako to da iskoristim formulu za kvadrat binoma da bih izračunala vrednost 2019^2 ?

ZADATAK 2. ([3]) Korišćenjem formula za kvadrat binoma izračunati 2019^2 .

Rešenje:

NEDA: Znam da je $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ali kako ovo da upotrebim u zadatku?

DANIJELA: Probaj broj 2019 da napišeš kao zbir dva broja čije je kvadrate jednostavno izračunati. Znaš kako?

NEDA: Paaaa, najbolje je $2019 = 2000 + 19$, lako je odrediti 2000^2 i 19^2 .
Ahaaaaaa, sada je

$$2019^2 = (2000 + 19)^2 = 2000^2 + 2 \cdot 2000 \cdot 19 + 19^2 = 4000000 + 76000 + 361 = 4076361.$$

A za formulu sa minusom, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, treba $2019 = 2020 - 1$, pa je onda

$$2019^2 = (2020 - 1)^2 = 2020^2 - 2 \cdot 2020 \cdot 1 + 1^2 = 4080400 - 4040 + 1 = 4076361.$$

A kako treba da rastavim na činioce? Nastavnik je pomenuo da ćemo u drugom razredu gimnazije ovo moći lako da rešimo, kaže da se to zove kvadratna jednačina. Šta sada da radimo?

DANIJELA: Misliš, šta da radiš?

ZADATAK 3. ([4]) Rastaviti na činioce kvadratni trinom $x^2 - 2019x + 2018$.

Rešenje:

DANIJELA: Rastavimo linearni član $2019x$ na sabirke x i $2018x$ i dobijamo da je

$$x^2 - 2019x + 2018 = x^2 - x - 2018x + 2018.$$

Sada iz prva dva člana izvučemo x , a iz trećeg i četvrtog izvučemo 2018. Imamo da je

$$\begin{aligned} x^2 - 2019x + 2018 &= x^2 - x - 2018x + 2018 = \\ x(x - 1) - 2018(x - 1) &= (x - 1)(x - 2018) \end{aligned}$$

i dobili smo činioce $x - 1$ i $x - 2018$.

NEDA: Nastavnik je dao još jedan zadatak u kome se javljaju x, y, x^2 i y^2 i rekao da nam neko od starijih da ideju kako da dati uslov namestimo do kvadrata binoma.

ZADATAK 4. ([4]) Ako je $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$, izračunati vrednost polinoma $P(x, y) = x^{2019} + 2020y + 2020$.

Rešenje:

DANIJELA: Vidiš, ovde je najvažnije doći do kvadrata binoma. Ako pogledaš prva dva člana uslova, $x^2 - 2x$, možeš da vidiš kako je to deo kvadrata binoma, samo mu nedostaje još +1. Slično je i sa $y^2 + 4y$, samo tu nedostaje +4. Ali, ako poslednji član, broj 5 napišemo kao

$5 = 4 + 1$, i malo promenimo redosled članova, dobijamo da je

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0.$$

Odavde, kako je zbir kvadrata jednak nuli ako i samo ako su ti kvadrati jednaki nuli, dobijamo da je $x - 1 = 0$ i $y + 2 = 0$, odnosno $x = 1$ i $y = -2$.

Sada samo zamenimo vrednosti $x = 1$ i $y = -2$ i imamo da je

$$P(x, y) = P(1, -2) = 1^{2019} + 2020 \cdot (-2) + 2020 = 1 - 4040 + 2020 = -2019.$$

DANIJELA: A sada da vidiš šta smo mi radili ovih dana. Pogledaj, isto rastavljamo na činioce.

ZADATAK 5. ([4], [6]) Rastaviti na činioce polinom $P(x) = x^4 + 2020x^2 + 2019x + 2020$.

Rešenje:

DANIJELA: Dodavanjem i oduzimanjem monoma x^3 i korišćenjem formule za razliku kubova dobijamo

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 2020x^2 + 2019x + 2020 \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + 2019(x^2 + x + 1) + 1 - x^3 \\ &= x^2(x^2 + x + 1) + 2019(x^2 + x + 1) + (1 - x)(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2020). \end{aligned}$$

Vidiš, uči na vreme kako se radi sa kubovima, trebaće ti uskoro.

Ovo je malo teže za tebe jer niste učili deljenje polinoma, ali pogledaj ovaj zadatak:

ZADATAK 6. ([5], [6]) Odrediti ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^{2019} - 2018x - 2017$ polinomom $f(x) = x^2 - 2019x + 2018$.

Rešenje:

NEDA: Kako to delite polinome? To ne može, nama nastavnik kaže da polinomi mogu samo da se sabiraju, oduzimaju i množe.

DANIJELA: Pa vidi, kao što možeš da поделиš dva broja i dobiješ količnik i ostatak, slično možeš da uradiš i sa polinomima, ali moraš da vodiš računa o stepenu ostatka.

Zato, napišemo polinom $P(x)$ u obliku $P(x) = f(x) \cdot Q(x) + r(x)$, gde je, zbog uslova $st(r(x)) < st(f(x))$, $r(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. To znači da je ostatak najviše linearan. Kada sve zamenimo, dobijamo da je

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{2019} - 2018x - 2017 = (x^2 - 2019x + 2018) \cdot Q(x) + ax + b \\ &= \\ &= (x - 1)(x - 2018) \cdot Q(x) + ax + b. \end{aligned}$$

NEDA: A šta je sa polinomom $Q(x)$, koji je njegov oblik? Kako njega da izračunamo?

DANIJELA: To nam nije važno, jer kada umesto x uzmemo brojeve 1 i 2018, dobijamo da je

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 - 2018 - 2017 = a + b, \text{ odakle je } a + b = -4034 \text{ i} \\ P(2018) &= 2018^{2019} - 2018 \cdot 2018^{2018} - 2017 = 2018a + b, \\ &\text{ odakle je } 2018a + b = -2017. \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema $a + b = -4034$, $2018a + b = -2017$ dobijamo da je $a = 1$ i $b = -4035$, pa je $r(x) = x - 4035$.

NEDA: Ovo poslednje sam i ja mogla da izračunam, da iz prve jednačine izrazim a i da to zamenim u drugu jednačinu.

DANIJELA: Ima još jedan zadatak koji povezuje funkcije, funkcionalne jednačine i polinome.

ZADATAK 7. ([6]) Ako je $f(x + 1) = x^2 + 2019x$ i $f(x + 1) + f(x + 2) = ax^2 + bx + c$, odrediti vrednost $a - b + c - 1$.

Rešenje:

DANIJELA: Ovde prvo treba da rešimo jednostavnu funkcionalnu jednačinu u kojoj smenom dolazimo do oblika za $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x + 1) &= x^2 + 2019x, \\ x + 1 &= t, x = t - 1 \end{aligned}$$

$$f(t) = (t - 1)^2 + 2019(t - 1) = t^2 - 2t + 2019t - 2019 =$$

$t^2 + 2017t - 2018$, pa je

$$f(x) = x^2 + 2017x - 2018.$$

Zatim treba iskoristiti uslov $f(x + 1) + f(x + 2)$, odnosno, posebno izračunati oba sabirka.

Kada ovo izračunamo i uporedimo koeficijente polinoma sa obe strane znaka jednakosti, dobijamo vrednosti a, b i c .

$$f(x + 1) + f(x + 2) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2017(x + 1) - 2018 = x^2 + 2019x$$

$$f(x + 2) = (x + 2)^2 + 2017(x + 2) - 2018 = x^2 + 2021x + 2020$$

$$f(x + 1) + f(x + 2) = 2x^2 + 4040x + 2020 = ax^2 + bx + c,$$

pa je $a = 2, b = 4040, c = 2020$.

Zamenimo dobijene vrednosti i dobijamo rezultat:

Vrednost traženog izraza je

$$a - b + c - 1 = 2 - 4040 + 2020 - 1 = -2019.$$

MAMA: Bravo, pametnice moje, svaka čast! Nedo, idi kupi sladoled. Ne zaboravi, Daca voli onaj od jagode ;)

Ostvareni ishodi:

Učenik će biti u stanju da:

- *sabira, oduzima i množi polinome
- *primenjuje formule za kvadrat binoma
- *rastavlja polinome na činioce
- *određuje ostatak pri deljenju polinoma
- *rešava funkcionalne jednačine

Literatura:

- [1] Nebojša Ikodinović, Slađana Dimitrijević, *Matematika za sedmi razred osnovne škole, udžbenik*, Klett, Beograd, 2013
- [2] Sanja Milojević, Nenad Vulović, *Matematika za sedmi razred osnovne škole, zbirka zadataka*, Klett, Beograd, 2013

- [3] Lj. Vuković, B. Jevremović, J. Ćuković, *Matematika VII, zbirka zadataka za sedmi razred osnovne škole sa rešenjima*, Arhimedes, Beograd 2004.
- [4] Vladimir Stojanović, *Mathematiskop 2, Stazama šampiona, dodatna nastava, pripreme za takmičenja za VII i VIII razred*, Matematiskop, Beograd, 1999.
- [5] Vladimir Stojanović, *Mathematiskop 3, Zbirka rešenih zadataka za prvi razred srednjih škola*, Matematiskop, Beograd, 2003.
- [6] Vene Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 1*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2010.