MAT-KOL (Banja Luka)
XXV (2)(2019), 95-100
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1902095A

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5828 (o)

PET RAZNIH DOKAZA JEDNE ALGEBARSKE NEJEDNAKOSTI

(Five diverses proofs of one algebraic inequality)

Šefket Arslanagić

Sažetak: U ovom radu su data pet raznih dokaza jedne algebarske nejednakosti:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2},$$

gdje su $a,b,c>0$.

Ključne riječi i izrazi: algebarska nejednakost, nejednakosti između sredina, nejednakosti Koši-Bunjakovski-Švarca, Čebiševa Jensena.

Abstract: In this paper we give five diverses proofs of one algebraic inequality:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2},$$

where $a,b,c>0$.

Key words and phrases: algebraic inequality, inequalities between means, inequalities of Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, Chebishev and Jensen.

AMS Subject Clasiffication (2010): 97 F 50
DMS Subject Clasiffication (2010): F50, N 50

U ovom radu ćemo dati pet raznih dokaza jedne algebarske nejednakosti koja glasi:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}, \tag{1}$$

gdje su a,b,c realni pozitivni brojevi.

Dokaz 1. Nakon množenja date nejedankosti sa $2(b+c)(c+a)(a+b)>0$, dobijamo ekvivalentnu nejednakost:

$$2\left[a^2(c+a)(a+b)+b^2(b+c)(a+b)+c^2(b+c)(c+a)\right]\geq(a+b+c)(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 2\left[a^2\left(ac+a^2+bc+ab\right)+b^2\left(ab+ac+b^2+bc\right)+c^2\left(bc+ab+c^2+ac\right)\right]\geq$$

$$\geq\left(ab+ac+b^2+bc+bc+c^2\right)\left(ac+a^2+bc+ab\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^4+b^4+c^4+a^3c+a^2bc+a^3b+ab^3+ab^2c+b^3c+b^3c+abc^2+ac^3\right)\geq$$

$$\geq 4a^2bc+4ab^2c+4abc^2+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2+a^3b+a^3c+b^3c+ab^3+ac^3+bc^3$$

$$\Leftrightarrow 2(a^4+b^4+c^4)+a^3b+ab^3+b^3c+a^3c+ac^3$$
$$\geq 2a^2bc+2ab^2c+2abc^2+2a^2b^2++2b^2c^2+\ 2a^2c^2 \qquad (2)$$

Koristeći dobro nam poznatu nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja, imamo:

$$a^3b+ab^3\geq 2a^2b^2, \qquad (3)$$

$$b^3c+bc^3\geq 2b^2c^2, \qquad (4)$$

$$c^3a+ac^3\geq 2a^2c^2. \qquad (5)$$

Na osnovu nejednakosti:

$$x^4+y^4+z^4\geq\ x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2\ (za\ x,y,z\in\boldsymbol{R}),$$

što je ekvivalentno sa valjanom nejednakošću

$$\frac{1}{2}[(x^2-y^2)^2+(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2]\geq 0,$$

imamo:

$$a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\geq ab\cdot bc+bc\cdot ac+ab\cdot ac,$$

tj.

$$2\left(a^4+b^4+c^4\right)\geq\left(ab^2c+abc^2+a^2bc\right). \tag{6}$$

Sabirajući sada nejednakosti (3), (4), (5) i (6), dobijamo nejednakost (2), a ovim je data nejednakost (1) dokazana.

Vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $a=b=c$.

Dokaz 2. U ovom dokazu ćemo koristitit nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca. Na osnovu te nejednakosti imamo:

.

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{c+a}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{c+a}\right)^2+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right]\geq$$

$$\geq\left(\frac{a}{\sqrt{b+a}}\cdot\sqrt{b+c}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}\cdot\sqrt{c+a}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\cdot\sqrt{a+b}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\left[2\left(a+b+c\right)\right]\geq\left(a+b+c\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a+b+c\right)},$$

tj.

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}, \text{ q.e.d.}$$

Dokaz 3. Ne umanjujući opštost, pretpostavićemo da je $a\geq b\geq c$, a odavde slijedi:

$$\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}.$$

Na osnovu nejednakosti Čebiševa sada slijedi:

$$\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}\geq\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right). \tag{7}$$

Koristeći nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine za tri pozitivna broja, imamo:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\frac{a+b+c}{3},$$

tj.

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2. \tag{8}$$

Iz (7) i (8) dobijamo nejednakost:

$$\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}\geq 2\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right). \tag{9}$$

Iskoristimo sada i nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine za tri pozitivna broja koja glasi:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq\frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{b+c}}+\frac{1}{\frac{1}{c+a}}+\frac{1}{\frac{1}{a+b}}},$$

tj.

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}. \tag{10}$$

Najzad, iz (9) i (10) slijedi nejednakosti:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2},$$

a ovo je nejednakost (1) koju je trebalo dokazati.

Dokaz 4. U ovom dokazu ćemo koristiti nejednakost Jensena. Koristićemo funkciju koja glasi:

$$f(x)=\frac{x^2}{s-x};\ (0<x<s).$$

Kako je $f'(x)=\frac{2xs-x^2}{(s-x)^2}$ te $f''(x)=\frac{2s^2}{(s-x)^3}>0$, $\forall x\in(0,s)$, to je funkcija f konveksna pa na osnovu Jensenove nejednakosti, imamo:

$$f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right);\ (0<a,b,c<s)$$

te uzimamjući da je $a+b+c=s$, dobijamo iz gornje nejednakosti:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq 3\cdot\frac{\left(\frac{s}{3}\right)^2}{s-\frac{s}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq 3\cdot\frac{\frac{s^2}{9}}{\frac{2s}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq \frac{a+b+c}{2} \text{. q.e.d.}$$

Dokaz 5. Ovdje ćemo koristiti opet nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\right)\geq\sqrt{\frac{a^2}{b+c}\cdot\frac{b+c}{4}}\text{, tj.}$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq a\,. \tag{11}$$

Imamo i analogne nejednakosti:

$$\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\geq b \tag{12}$$

i

$$\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq c\,. \tag{13}$$

Sabirajući sada nejednakosti (11), (12) i (13), dobijamo nejednakosti:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\geq a+b+c\,,$$

a odavde

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq \frac{a+b+c}{2} \text{. q.e.d.}$$

Sada ćemo prokomentarisati svih pet datih dokaza.

Dokaz 1. je najduži i zahtijeva puno „fizičkog rada". Obično se učenici opredijele za ovaj dokaz s namjerom da se oslobode razlomaka. Oni koji se odluče za ovaj dokaz znaju nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja, ali ne poznaju poznate klasične nejednakosti kao što su nejednakosti Koši-Bunjakovski-Švarca i Čebiševa.

Za **Dokaz 2**. se koristi nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca koja igra izuzetno važnu ulogu u teoriji o nejednakostima. Ovdje je važno napomenuti da se data nejednakost napiše u obliku nejednakosti Koši-Bunjakovski-Švarca.

Dokaz 3. zahtijeva poznavanje i primjenu nejednakosti Čebiševa. Važna je ovdje pretpostavka da možemo uzeti ne umanjujući pri tome opštost da je $a \geq b \geq c$ (ili $a \leq b \leq c$), a odavde $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$ (ili $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$). Naravno, za ovaj dokaz je potrebno znati nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine odnosno između aritmetičke i harmonijske sredine za tri pozitivna broja.

Za **Dokaz 4**. se koristi nejednakost Jensena. Ovdje je najvažnije formulisati funkciju f koja je u datom intervalu konveksna. Riječ je o funkciji:

$$f(x) = \frac{x^2}{s-x};\ (0 < x < s).$$

Nakon uvođenja smjene $a+b+c=s$, gdje važi $a,b,c \in (0,s)$, brzo se dođe do date nejednakosti.

Dokaz 5 je po mom skromnom mišljenju pravi „biser" zbog svoje kratkoće i elegancije. Ovdje je potrebno znati samo nejedankost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja. Ideja za dokaz je također briljantna. Ovaj dokaz može da bude od velike koristi učenicima i studentima koji pokazuju veći interes za ovu oblast matematike.

Na kraju mišljenja sam da će ovaj rad biti od većeg interesa i koristi njegovim budućim čitaocima.

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić. *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike.* Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] R. Bulajich Manfrino, J.A. Gomez Ortega and R. Valdez Delgado. *Inequlities - A Mathematical Olympiad Approach.* Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2009.

[4] Z. Cvetkovski. *Inequalities-Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2012.