MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXV (2)(2019), 88-94 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1902088M

О геометријским конструкцијама
само лењиром и шестаром

Павле М. Миличић

Београд, Србија
pavle.milicic@gmail.com

Свим извођачима насатаве математике у основним и средњим школама добро је познато да се међу садржајима наставе математике обавезно налази поглавље *Конструкције геометријских фигура само помоћу лењира и шестара.* Наставници рутински обаве тај део програма, углавном, онако како су то радили стари Грци пре више од 2500. година. Не упуштајући се у суштину тог садржаја да објасне, зашто је тај садржај потребан, како је настао, кад је настао и који су његови домети у развоју геометрије. Наставници се, углавном, задрже на неким простијим конструкцијама троуглова и других геометријских ликова. Неки и не помену веома значајне проблеме везане за такве конструкције. Не обраде конструкцију *Златног пресека* дужи, не истакнунемогућност конструкција, при томе, неких *правилних многоуглова* и три чувена антична проблема: *Трисекциоја угла, Квадратура круга и Подвостручење коцке*. Сви ови проблеми су стари више од 22 века.

Златни пресек дужи се дефинише као подела дужи на два одсечка тако да се цела дужина дужи према дужини већег одсечка односи као дужина већег одсечка према дужини мањег одсечка. Значи, ако је $\boldsymbol{a}$ већи одсечак и $\boldsymbol{b}$ мањи одсечак онда је

$$(a+b)/a=a/b.$$

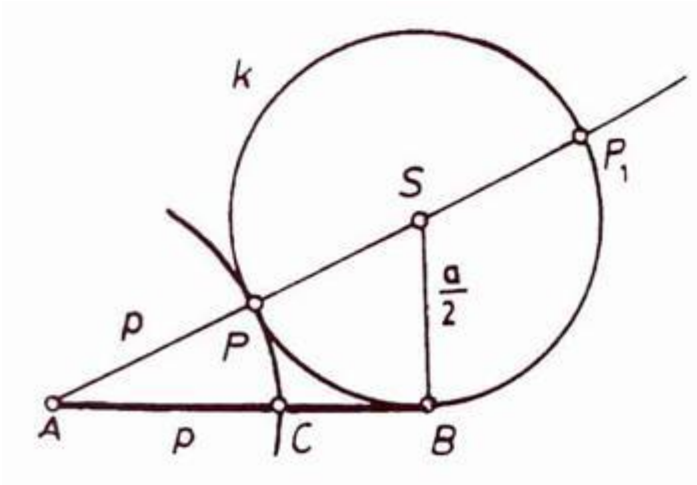
Из ове једнакости лако закључујемо да је овај однос једнак ирационалном броју

$$\emptyset=\left(1+\sqrt{5}\right)/2.$$

Ознака $\emptyset$ је везана за име чувеног грчког скулптора Фидије[1] (око 490-430 п.н.е) који је у градњи чувеног грчког Партенона користио однос Златног пресека.

Питагорејци[2] су знали да поделе дуж конструкцијом (само лењиром и шестаром) у наведеном односу и да помоћу тога конструишу правилни петоугаоник. Ево једне разумљиве конструкције тог пресека.

Нека је $\boldsymbol{a}$ дужина дужи AB (сл.1) и $\boldsymbol{SB = a/2}$ нормала на $\boldsymbol{AB}$**.** Круг $\boldsymbol{k}$ са центром у $\boldsymbol{S}$ полупречника $\boldsymbol{a/2}$ сече дуж $\boldsymbol{A\ S}$ у тачки $\boldsymbol{P}$. Круг са центром у $\boldsymbol{A}$ полуптречника $\boldsymbol{AP = p}$ сече $\boldsymbol{AB}$ у тачки $\boldsymbol{C}$. Тада тачка $\boldsymbol{C}$ дели дуж $\boldsymbol{AB}$ у траженом односу. Наиме, применом Питагорине теореме на троугао $\boldsymbol{ABC}$ долазимо до закључка да је



(Слика 1.)

$$p = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Будући да је p $> a/2$ то је p већи одсечак дужи AB. Из горње једнакости добијамо $\frac{a}{p} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, што је и требало доказати.

[1] **Фидија** (Phidias or Pheidias (Greek: Φειδίας, *Pheidias*; c. 480 – 430 BC) би је Грчки вајар, сликар и архитекта.

[2] **Питагорејци** су били следбеници учења грчког философа Питагоре. Питагорејство је философски и духовни покрет који је основао Питагора у VI веку п. н. е. Имао је егзотеричне ознаке, а утицао је на многе философе укључујући и Платона. У питагорејским заједницама се живело по строгим правилима за очишћење душе и тела. Важну су улогу давали музици и ритму, из чега се вероватно развило занимање за аритметику, коју су схватали као теорију целих бројева.

Уопштења односа Златног пресека на опште величине има непроцењиво значење у разним областима људске делатности. У значајној је вези са Фибоначијевим низом бројева[3] (количник n-тог члана Фибоначијевог низа и његовог предходника тежи броју ∅. У ренесансним сликама Мона Лиза и Тајна вечера експерти налазе трагове Златног пресека или божанског пресека.У архитектури и уопште у грађевинарству се користи Златни пресек.

Неки наставници који помену три велика проблема старе Грчке не истакну чињеницу да су њихова решења (само лењиром и шестаром) немогућа. Немогућност је доказана још у 18. и 19. веку, (када је дефинитивно фундирано поље реалних бројева, односно пошто је дата прецизна дефиниција ирационалног броја. Неуважавајући или не знајући ту немогућност решавања (у изворном облику) зачуђујућа је чињеница да неки не свршени математичари па и неки наставници математике, и данас, покушавају да реше неки од тих проблема. У време док сам био активни професор математике имао сам више прилика да убеђујем такве „решаватеље"да су у заблуди. Неки су насртали и на неке акдемике САНУ да добију од њих потврду да су направили „епохална достигнућа". Неки таблоидни медији су их величали. У једним Вечерњим новостима налазимо наслов: "Ужичански професор шестаром и лењиром победио Гауса и Декарта", или, "Заваривач из 3.маја решио 3 велика античка роблема". Итд.

Осим објашњења како се решавају неки конструктивни задаци било би упутно да се ученицима објасни како је и зашто је настала потреба да се врше конструкције у геометрији само шестаром и лењиром. Колико је мени познато, нема у литературу прецизног одговора на питање, зашто су настале конструкције, само лењиром ишестаром. У Еуклидовим Елементима имамо само постулате за такве конструкције. Ево шта можемо понудити као одговор на горе постављена питања.

Потреба да се врше такве конструкције (само лењиром и шестаром) су настале у старој Грчкој пре више од 2500 г. Први који је истакао захтев, таквих конструкција, био је велики грчки математичар Аполоније (262-190 п.н.е). Чувен

[3] **Фибоначијев низ** је математички низ примећен у многим физичким, хемијским и биолошким појавама. Име је добио по италијанском математичару Фибоначију. Представља низ бројева у коме збир претходна два броја у низу дају вредност наредног члана низа. **Леонардо Фибоначи** (итал. *Leonardo Fibonacci*, ?1170—1250), такође познат и као **Леонардо из Пизе**, **Леонардо Пизано**, **Леонардо Боначи** или **Леонардо Пизано Биголо**, био је италијански математичар из Пизе који је сматран „најталентованијим западним математичарем средњег века". Име Фибоначи (Fibonacci), по коме је данас познат, настало је 1838. године, а осмислио га је француски математичар Гијом Либри и представља скраћеницу од filius Bonacci (син Боначија).

је његов задатак који се и данас налази у свкој геометриској књизи: „ конструисати круг који додирује три дата круга“ (при чему сваки од датих кругова може да дегенерише у тачку или параву). Али значајнија је његова делатност што је бавећи се решавањем Трећег античнког проблема (подвостручењем коцке) предочио математичарима *конусне пресеке.*

Питагора (око 530-510) је открио да су страница и дијагола квадрата несамерљиве дуже, што је значило да дијагоналу квадрата није могуће мерити целим и рационалним бројевима. Аристотел (384-322) је методом *ad absurdum* доказао да $\sqrt{2}$ (то јест дужина дијаголе квадрата чија је страница 1) није рационалан број. Дакле, Грци су знали да се дужина дијагонале квадрата чија је страница дужине 1 не може изразити целим ни рационалним бројем, а ирационалне бројеве нису познавали. Али, знали су како се конструише та дијагонала *само лењиром и шестаром*. Могли су ту дужину користити иако је нису могли записати децималним записом. Тако се може конструисати $\sqrt{3}$ и многи други ирационални бројеви. Еуклид (355-300) је у својим *Елементима*[4] описао сва три велика античка проблема). Код Еуклида $\sqrt{a}$ је страница квадрата чија је површина ***a***. Први математичар који се бавио квадратуром круга пре Еуклида био је Анаксагора око 450.г.п.н.е. Грци су помоћу геометрије стварали и развијали алгебру служећи се геометријским величинама, дужинама дужи, површинама паралелограма и запреминама тела. Помоћу једнакости геометријских величина (површина) доказивали су и нека алгебарска правила и идентитете, на пример,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

стим што су под ***a.b*** подразумевали површину правоугаоника чије су странице са дужинама ***a*** i ***b.***

Векови су пролазили а математичари (понекад и нематематичари) су упорно покушавали да реше бар неки од поменута три проблема у њиховој изворној формулацији. Нису их решили али су њихови напори, поред других потреба, подстакли да дође у 18. веку до дефиниције ирационалнопг броја. Тек дефинисањем ирационалних бројева створена је могућност да се докаже да су такве конструкције немогуће. Математичар *Ј. Х. Ламберт*[5] је 1760. доказаода је број π

[4] **Еуклидови Елементи** (грч. Στοιχεῖα, Стоихеиа) су античко дело о елементарној математици хеленског научника Еуклида из 3. века старе ере. Еуклидови Елементи садрже 13 књига и представљају систематско излагање грчке математике тог времена по одељцима: елементарна геометрија, теорија бројева, алгебра, теорија мерења геометријских величина, елементи теорије граничних вредности.

[5] **Јохан Хајнрих Ламберт** (нем. *Johann Heinrich Lambert*; Милуз, 26. август 1728 — Берлин, 25. септембар 1777) је био швајцарски математичар и физичар, члан Берлинске и Минхенске академије наука.

ирационалан број, што је значило да траженим конструкцијама није могуће конструисати квадрат чија је површина једнака површини датог круга. Дакле, Квадртурукруга није немогуће решити траженим конструкцијама. Француски математичар *Пјер Вантзрл*[6] 1830. је доказао немогућност решења Првог и Трећег проблема траженим конструкцијама.

Зашто је настао проблем Трисекције угла? Објашњење може да буде следеће. Грци су своје храмове и многе споменике украшавали разним орнаментима чија је конструкција захтевала поделу угла на три подударна угла. Иначе као проблем, Трисекција угла потиче од грчког филозофа Хипија из Еледе (4. век п.н.е).

Зашто је настао проблем Квадратуре круга? Одговор може да буде овакав. Граци су знали да мере површине разних полигона помоћу површине квадрата. Пра мера им је била на пр. квдрат чија је дужина странице 1. Проблем је био како измерити површину криволинијских фигура. Наслућивали су да је за то користан круг који је по површини једнак површини пра мере квадрата.

У вези са Трећим проблемом наведимо анегдоту, према којој се наводно дошло до дефиниције *конусних пресека.* На грчком острву Делу око 400. г.п.н.е. појавила се болест *куга* епидемијских размера. Становништво се обратило за помоћ делфском пророчанству са питањем како да се обузда епидемија. Добили су савет да удвострче жртвеник у богомољи који је био у облику коцке. Становници су ставили још једну коцку на предходну али побољшања није било. Касније су схватили да треба постојећи жртвеник заменити са новим, са новом коцком дупло веће запремине. Како направити такву коцку?.Тако је настао чувени не решиви проблем поменутим конструкцијама. Проблем подвостручења коцке**,** на савременом математичком језку је проблем конструкције (само лењиром и шестаром) решења једначине $x^3 = 2a^3$. (Ивица прве коцке је $\boldsymbol{a}$)

Сматра се да је конусне пресеке открио Еуклидов ученик **Менехмо**[7] (4. век п.н.е.). Менехмо је „решио“ делски проблем тако што је закључио да је $\boldsymbol{X}$ апсциса пресека кривих

$$x^2 = ay,\ \ y^2 = 2ax$$

[6] **Пиерре Лаурент Вантзел** (Pierre-Laurent Wantzel, 5. јуни 1814. у Паризу - 21. мај 1848. у Паризу) био је француски математичар који је доказао да је неколико старих геометријских проблема било немогуће ријешити само компасом и равнањем

[7] Менехмо (Greek: Μέναιχμος *Menaechmus*, око 375—325. године пре нове ере), Платонов ученик и тутор Александра Великог. Мехнемов рад није сачуван тако да данас о њему сазнајемо само из различитих списа његових савременика. Менехмо био је стари грчки математичар и геометар рођен у Алопецоннесусу у Трачанском Херсонасу, који је био познат по свом пријатељству са познатим филозофом Платоном и за његово очигледно откриће конике и његово рјешење затим дугогодишњи проблем удвостручења коцке помоћу параболе и хиперболе.

(две параболе) или пресек кривих $x^2 = ay$, $xy = 2a^2$ (парабола и хипербола). Тако су настала нова „геометријска места" , која су нашла своја оличења у Аполонијевим *конусним пресецима.*

А сада нека моја размишљања о методској јединици „геометријске конструкције само лењиром и шестаром" упућена састављачима програма за математику у основним и средњим школама. Колико знам те се конструкције и данас мало разликују од оних које су стари Грци изводили. Та геометријска област нема никакву научну надградњу. Анахроно је да се у 21. веку у образовању користимо истим методама којима су се стари Грци служили. Потребе архиктетуре и технике, уопште, за садржајима цртања само шестаром и лењиром не могу бити оправдање да се те методе форсирају. Зар не би било корисније решавати те задатке методом аналитичке геометрије коју ће ученици вероватно сретати у даљем математичком образовању. Зар, данас са *IT технологијом* немамо савршеније алате и методе за цртање „геометријских места тачака"(*ГМТ*). Интернет нам нуди *3D* и *CAD* програме за цртање разних *ГМТ.*

На крају приметимо следећу интересантну чињеницу. Конструкције о којима је реч остварују се само пресецима правих линија и кружних лукова. Добијањем тачке овим пресецима. Међутим у Природи не постоји објекат *права линија* ни објекат *идеална кружна линија*. Не постоји ни објекат *тачка* (Одбацили смо давно Еуклидсе дефиниције тих објеката). Помоћу материјалних објеката *лењира* и *шестара* ми те објекте „реализујемо". Само математичари могу нестварне објекте реализовати помоћу стварних објеката, па после помоћу тих нестварних објеката правити најчудније стварне објекте на Земљи!. Изградити техничку цивилизацију!