MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XXV (2)(2019), 83-87 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1902083M

TRI DOKAZA JEDNE ALGEBARSKE NEJEDNAKOSTI I JEDNO NJENO UOPŠTENJE

Three Proofs of One Algebraic Inequality and One its Generalization

Dragoljub Milošević

Gornji Milanovac, Srbija

Sažetak. U ovom radu dajemo tri dokaza nejednakosti za pozitivne brojeve a i b takve da je $ab \geq 1$:

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geq 16,$$

a potom i njenog uopštenja

$$\left(a+bn+\frac{n}{a+n-1}\right)\left(b+an+\frac{n}{b+n-1}\right) \geq (n+2)^2 ,$$

gdje je n prirodan broj.

Ključne riječi i izrazi: algebarska nejednakost, nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine pozitivnih brojeva (A - G nejednkost), nejednakost Koši – Bunjakovski – Švarca, uopštenje.

Abstract. In this short article we give three proofs for one algebraic inequality for the positive real numbers a i b such that $ab \geq 1$:

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geq 16,$$

and after that we also five one its generalization

$$\left(a+bn+\frac{n}{a+n-1}\right)\left(b+an+\frac{n}{b+n-1}\right) \geq (n+2)^2,$$

where n is a positive integer.

Key words and phrases: algebraic inequality, AM – GM inequality, Cauchy – Buniakowsky – Schwarz inequality, generalization.

AMS Subject Classification (2010): **97F50**

ZDM Subject Classificatiion (2010): **F50, N50**

Na 17. Juniorskoj matematičkoj olimpijadi održanoj u Antaliji (Turska), juna 2013, godine, postavljen je sljedeći

Zadatak: *Dokaži da nejednakost*

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq 16 \tag{1}$$

vrijedi za bilo koje pozitivne brojeve a *i* b *takve da je* $ab \geq 1$.

Ovdje ćemo dokazati nejednakost (1) na tri načina, a potom ćemo dokazati i uopštenje (generalizaciju) te nejednakosti:

$$\left(a + bn + \frac{n}{a+n-1}\right)\left(b + an + \frac{n}{b+n-1}\right) \geq (n+2)^2, \tag{2}$$

gdje je n prirodan broj i $ab \geq 1$. Manje upućeni čitaoci, termine i tvrdnje koje se koriste u ovom tekstu a nisu prethodno determinisani, mogu pronaći u knjizi [1].

Dokaz 1. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja $\frac{a+1}{2}$ i $\frac{2}{a+1}$ imamo

$$\frac{a+1}{2} + \frac{2}{a+1} \geq 2\sqrt{\frac{a+1}{2} \cdot \frac{2}{a+1}} \geq 2,$$

odakle, dodajući lijevoj i desnoj strani prethodne nejednakosti po $\frac{a-1}{2} + 2b$, sledi

$$a + 2b + \frac{2}{a+1} \geq \frac{a+3}{2} + 2b = \frac{a+4b+3}{2}.$$

Na isti način (ali i permutacijom varijabli a i b) dobijamo

$$b + 2a + \frac{2}{b+1} \geq 2a + \frac{b+3}{2} = \frac{b+4a+3}{2}.$$

Zbog toga je

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq \frac{a+4b+3}{2} \cdot \frac{b+4a+3}{2}. \tag{3}$$

Nadalje, koristićemo nejednakost Koši – Bunjakovski – Švarca za pozitivne brojeve $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2). \tag{4}$$

Ako u (4) stavimo

$$a_1 = \sqrt{a}, a_2 = 2\sqrt{b}, a_3 = \sqrt{3}, b_1 = \sqrt{b}, b_2 = 2\sqrt{a} \text{ i } b_3 = \sqrt{3},$$

dobijamo

$$(\sqrt{ab}+4\sqrt{ab}+3)^2 \le (a+4b+3)(b+4a+3). \tag{5}$$

Iz nejednakosti (3) i (5), zbog uslova (uvjeta) $ab \ge 1$, slijedi tražena nejednakost (1).

Dokaz 2. S obzirom da su a i b pozitivni brojevi i $ab \ge 1$, pozivajući se opet na odnos između aitmetičke i geometrijske sredine za brojeve a i $\frac{1}{a}$, dobijamo procjenu

$$a+b \ge a+\frac{1}{a} \ge 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}} = 2.$$

Prvo ćemo transformisati zbir $a+2b+\frac{2}{a+1}$ na sledeći način

$$\begin{aligned} a+2b+\tfrac{2}{a+1} &= b+(a+b)+\tfrac{2}{a+1} \\ &\ge b+2+\tfrac{2}{a+1} \quad (\text{zbog } a+b\ge 2) \\ &= (b+1)+\tfrac{2}{a+1}+1 = \tfrac{b+1}{2}+\tfrac{b+1}{2}+\tfrac{2}{a+1}+1 \end{aligned}$$

i ako sada koristimo aritmetičko – geometrijsku nejednakost za ova četiri pozitivna broja, dobijamo:

$$a+2b+\tfrac{2}{a+1} \ge 4\sqrt[4]{\tfrac{(b+1)^2}{2(a+1)}} \tag{6}$$

Po analogiji (ali i koristeći se permutacijom varijabli a i b u prethodno dobijenoj nejednakosti (6)), dobijamo

$$b+2a+\tfrac{2}{b+1} \ge 4\sqrt[4]{\tfrac{(a+1)^2}{2(b+1)}}. \tag{7}$$

Na temelju nejednakosti (6) i (7), te primjenom A–G nejednakosti za dva pozitivna broja i uslova $ab \ge 1$, imamo redom:

$$\begin{aligned} (a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1}) &\ge 16\sqrt[4]{\tfrac{(b+1)^2}{2(a+1)}\cdot\tfrac{(a+1)^2}{2(b+1)}} \\ &= 16\sqrt[4]{\tfrac{b+1}{2}\cdot\tfrac{a+1}{2}} \\ &\ge 16\sqrt[4]{\tfrac{2\sqrt{b}}{2}\cdot\tfrac{2\sqrt{a}}{2}} \\ &= 16\sqrt[8]{ab} \\ &\ge 16, \end{aligned}$$

tj. dobijamo traženu nejednakost (1).

Dokaz 3. Primjenom nejednakosti Koši – Bunjakovski – Švarca (4) dobijamo procjenu

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right)=(\,(a+b)+b+\frac{2}{a+1})((a+b)+a+\frac{2}{b+1})$$
$$\geq (a+b+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}})^2 \qquad (8)$$

pri čemu smo se sada očigledno koristili zamjenama

$$a_1=b_1=\sqrt{a+b},\ \ a_2=\sqrt{b},\ \ a_3=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(a+1)}},\ \ b_2=\sqrt{a},\ \ b_3=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(b+1)}}$$

S druge strane, na osnovu A-G nejednakosti i uslova $ab\geq 1$, sada imamo procjene

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ \geq 2 \quad \text{i} \quad (a+1)+(b+1)\geq 2\sqrt{(a+1)(b+1)},$$

tj.

$$\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}\ \geq\ \frac{4}{a+b+2},$$

što znači da je

$$a+b+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}\geq\ a+b+1+\frac{4}{a+b+2}$$
$$=\frac{(a+b+1)(a+b-2)}{a+b+2}+4$$
$$\geq 4,$$

pa iz (8) sledi tražena nejednakost (1).

Sada ćemo dokazati generalisanu nejednakost (1), tj. nejednakost (2).

Dokaz. Ako u nejednakost Koši – Bunjakovski – Švarca

$$(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\,)^2\ \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2\,)(\,\sum_{i=1}^{n} b_i^2\,)$$

stavimo

$$a_1=\sqrt{a},\ a_2=\cdots=\ a_{n+1}=\sqrt{b}\ ,\ a_{n+2}=\sqrt{\frac{n}{a+n-1}}\ ,$$
$$b_{n+2}=\sqrt{\frac{n}{b+n-1}},\ b_2=\cdots=b_{n+1}=\sqrt{a}\ \ i\ \ b_1=\sqrt{b},$$

Imamo procjenu

$$(a+bn+\frac{n}{a+n-1})\left(b+an+\frac{n}{b+n-1}\right)\geq(n\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{an}{b+n-1}}+\sqrt{\frac{bn}{a+n-1}})^2. \qquad (9)$$

Procjenićemo sabirke na desnoj strain nejednakosti 9. Prvo, nejednakost

$$\sqrt{\frac{an}{b+n-1}}+\sqrt{\frac{bn}{a+n-1}}\geq 2 \qquad (10)$$

je ekvivalentna sa

$$\sqrt{n(a^2 + a(n-1))} + \sqrt{n(b^2 + b(n-1))} \geq 2\sqrt{(a+n-1)(b+n-1)}. \quad (11)$$

Sabirke na lijevoj strani prethodne nejednakosti procjenjujemo ovako

$$\sqrt{n(a^2 + a(n-1))} \geq a + (n-1)\sqrt{a} \ \text{ i } \ \sqrt{n(b^2 + b(n-1))} \geq b + (n-1)\sqrt{b}$$

budući da su ekvivalentne sa tačnim nejednakostima

$$(\sqrt{a} - 1)^2 \geq 0 \ \text{ i } (\sqrt{b} - 1)^2 \geq 0.$$

Sada, imamo da je

$$\sqrt{n(a^2 + a(n-1))} + \sqrt{n(b^2 + b(n-1))} \geq a + b + (n-1)(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\geq (a+b) + (n-1) \cdot 2\sqrt{\sqrt{ab}} \quad (\text{uz } \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab}})$$

$$\geq a + b + 2(n-1), \text{ zbog } ab \geq 1$$

$$= (a+n-1) + (b+n-1)$$

$$\geq 2\sqrt{(a+n-1)(b+n-1)} \quad (\text{uz primjena A-G nejednakosti}).$$

Dakle, nejednakost (11) je tačna, a sasim tim je tačna i nejednakost (10). Iz nejednakosti (9) i (10), zbog $n\sqrt{ab} \geq n$, slijedi željena nejednakost (2).

Napomena. Specijalno, za $n = 2$ nejednakost (2) jeste nejednakost (1).

LITERATURA

[1] D. S. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.