MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN: 0354-6969 (p), ISSN: 1986-5228 (o)
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
Vol. XXV (2)(2019), 77-82
DOI: 10.7251/1902077R

OBRNUTA NEJEDNAKOST PRERASPODJELE
REVERSE REARRANGEMENT INEQUALITY

Daniel A. Romano

ABSTRACT. Nejednakost preraspodjele (Rearrangement inequality) je dobro poznata nejednakost. Ovaj članak predstavlja malu rekapitulaciju porijekla ove nejednakosti. Nedavno, 2014, Daniel S. Liu konstruisao je 'Obrnutu nejednakost preraspodjele' (Reverse rearrangement inequality) a potom 2015 konstruisao je i njenu generalizaciju. U ovoj kratkoj noti prezentirane su ideje kojima se rukovodio autor ovih konstrukcija.

Rearrangement inequality is a well-known inequality. This article presents a small recapitulative of the origin of this inequality. Recently, 2014, Daniel S. Liu constructed the 'Reverse rearrangement inequality', and then constructed his generalization in 2015. In this short note, were presented the author's ideas of these constructions.

1. Uvod

U poslednjih pedeset godina pojavio se niz nejednakosti koji uključuju preraspodjelu komponenti elemenata u prostoru $\mathbb{R}^n$ i mjerljive funkcija na nekom konanom prostoru mjere. Ove nejednakosti nisu samo interesantne same po sebi. One su važne ([**3**]) u istraživanjima koja uključuju preuredjenje invarijantni Banachovih funkcijskih prostora i interpolacionih teorema za ove prostore (na primjer, [**12, 13**]). Najpoznatija nejednakost ovog tipa za n-torke realnig brojeva je rezultat koji se pripisuje ([**3**]) H. G. Hardiju[1], J. E. Littletwoodu[2] i G. Poliu[3]. Pri tome se misli na Theorem 368 u knizi [**6**], st. 261. Jedno poglavlje (Poglavlje 10) u

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 26D15.
Key words and phrases. Rearrangement inequality, reverse rearrangement inequality.

[1]Godfrey Harold Hardy (7. 02. 1877. - 01. 12. 1947.) bio je engleski matematičar, poznat po svojim dostignuima u teoriji brojeva i matematikoj analizi.

[2]John Edensor Littlewood (09. 06. 1885. - 06. 09. 1977.) bio je engleski matematičar. Radio je na temama koje se odnose na analizu, teoriju brojeva i diferencijalne jednadbe, te je imao dugu suradnju sa G. H. Hardyjem.

[3]George Pólya (madjarski: Pólya Gyorgy) (13. 12. 1887. - 07. 09. 1985.) bio je madjarski matematičar. Bio je profesor matematike od 1914. do 1940. na ETH Zrichu i od 1940. do 1953. na Stanford univerzitetu. On je dao fundamentalne doprinose kombinatorici, teoriji brojeva, numeričkoj analizi i teoriji verovatnoće. Takodje je poznat po svom radu u heuristici i matematičkom obrazovanju.

klasičnoj knjizi "Nejednakosti" Hardija, Littlewooda i Polya posvećeno je nejednakostima koje uključuje nizove i koncept 'preuredjenja'. Glavni primjer u tom poglavlju je sledeći. Neka su $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ su nizovi realnih brojeva i neka je σ bilo koja permutacije skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \leqslant \sum_{o=1}^{n} a_i b_i. \tag{1.1}$$

Postoje mnoge varijacije i generalizacije ove nejednakosti preuredjenja (čitalac može podledati tekstove: [**1, 4, 8, 11, 12, 13, 17, 18**]). Na primjer, Luxemburg ([**13**]) je dokazao analoge nejednakosti za diskretne preraspodjele za mjerljive funkcije na konačnom prostoru mjere.

Example 1.1. Za početak ćemo pokazati verziju sa samo dva sabirka na svakoj strani. ([**8**], Lemma 1) Neka su a_1 i a_2 realni brojevi i neka su $f_i : [a_1, a_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i \in \{1, 2\})$ realne funkcije takve da vrijedi $(\forall x \in [a_1, a_2])(f_1'(x) \leqslant f_2'(x))$. Tada je

$$f_1(a_2) + f_2(a_1) \leqslant f_1(a_1) + f_2(a_2).$$

Neke od ovih varijacija i generalizacija su sledeće.

Example 1.2. U ovoj bilješci nizovi $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ su neopadajući u smislu $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, a sve sume i proizvodi su od $i = 1$ do $i = n$ osim ako nije drugačije navedeno. Takodje, $\bar{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ i S_n označava grupu svih permutacija skupa $\bar{n}$.

1. ([**17**]) Za nizove $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ sa pozitivnim realnim brojevima i za svako $\sigma \in S_n$ vrijedi

$$\prod (a_i + b_{n-i+1}) \geqslant \prod (a_i + b_{\sigma(i)}) \geqslant \prod (a_i + b_i).$$

2. ([**11**]) Jedna generalizacija Hardi-Littlewood-Polieve nejednakosti (1.1) je kao što slijedi:

Neka su $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ nizovi pozitivnih realnih brojeva i neka je f neopadajuća konveksna funkcija. Tada za svako $\sigma \in S_n$, vrijedi

$$\sum f(a_i b_{n-i+1}) \leqslant \sum f(a_i b_{\sigma(i)}) \leqslant \sum f(a_i b_i).$$

Pri tome, pod terminom 'neopadajuća funkcija' podrazumijevamo funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$(\forall x, y)(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y))$$

a terminom 'konveksna funkcija' pokrivena je sledeća osobina funkcije f

$$(\forall x, y)(\forall a \in [0, 1])(f(ax + (1-a)y) \leqslant af(x) + (1-a)f(y)).$$

3. Takodje, i sledeća tvrdnja je jedna generalizacija nejednakosti (1.1): ([**18**]) Neka su g_1, g_2,..., g_n realne funkcije definirane na intervalu I. Tada je

$$\sum g_i(b_{n-i+1}) \leqslant \sum g_i(b_{\sigma(i)}) \leqslant \sum g_i(b_i)$$

za svaki neopadajući niz $\{b_i\}$ i za svako $\sigma \in S_n$ ako i samo ako su funkcije $g_{i+1} - g_i$ neopadajuće za svako $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Na primjer, odabir $g_i(x) = a_i x$ daje klasinu Hardi-Littlewood-Polievu nejednakost (1.1).

4. ([**8**], Theorem 1) Neka σ, $\pi \in S_n$ su bilo koje permutacije skupa $\{1, 2, ..., n\}$. Za permutaciju σ se kaže da strogo minorira permutaciju π ako vrijedi: Za bilo koje $i \in \{1, 2, ..., n-k+1\}$ i-ti najveći član od $\sigma(k), \sigma(k+1), ..., \sigma(n)$ je manji ili jednak i-tom najvećem od $\pi(k), \pi(k+1), ..., \pi(n)$.

Neka su $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$ realni brojevi i neka su $f_i : [a_1, a_n] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) realne funkcije takve da vrijedi $(\forall x \in [a_1, a_n])(f_1'(x) \leqslant f_2'(x) \leqslant ... \leqslant f_n'(x))$. Tada za permutacije σ, $\pi \in S_n$ takve da σ strogo minorira π, vrijedi je

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(a_{\sigma(i)}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f_i(a_{\pi(i)}).$$

Neka je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ uredjena n-torka realnih brojeva. U daljem što slijedi, sa $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ označavaćemo n-torku dobijenu od $\mathbf{x}$ nekom prerasporedom njenih elemenata u nerastućem rasporedu $x_1^* \geqslant x_2^* \geqslant ... \geqslant x_n^*$ a sa $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', ..., x_n')$ označavaćemo n-torku dobijenu od $\mathbf{x}$ nekom preraspodjelom njenih elemenata u neopadajućem rasporedu $x_1' \leqslant x_2' \leqslant ... \leqslant x_n'$. Još 1971. godine Minc ([**15**]) je pokazao da ako su $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ dvije n-torke nenegativnih realnih brojeva, tada vrijedi

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i' + b_i') \leqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i') \leqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i^* + b_i'). \tag{1.2}$$

Ako su a_1, a_2, ..., a_n pozitivni, tada je nejednakost (1.2) ekvivalentna ([**17**], Teorem 2) sa

$$\sum_{i=1}^{n} log(1 + \frac{b_i'}{a_i'}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} log(1 + \frac{b_i'}{a_i}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} log(1 + \frac{b_i'}{a_i^*}). \tag{1.3}$$

U radu [**11**], London je pokazao da su ove nejednakosti posebni slučajevi nejednakosti preuredjenja koje vrijede za funkcije koje imaju neke osobine konveksnosti.

Nejednakost (1.1) je veoma lako naučiti, a ona je moćno sredstvo. Mnoge fundamentalne nejednakosti, npr. nejednakost AM-GM-HM, Cauchy-Schwarzova nejednakost, i 'Chebyshevova Sum' nejednakosti, mogu se generisati iz nejednakost preraspodjele (Pogledati, na primjer [**7**]). Zapravo, ova nejednakost preraspodjele je rezultat fundamentalne važnosti u matematici [**3, 14**] ali i u praksi [**4, 5**]. Stoga je interesantno proučiti svaki aspekt ove nejednakosti. Dobijeni rezultati su podijeljeni u tri kategorije. Prva je neki oblik obrnute nejednakosti preraspodjele koja se povezuje sa poznatom nejednakošču Kantorovića [**16**] i Bourinovom nejednakošču [**2**]. Druga kategodija podrazumijeva proširenje nejednakosti preraspodjele na vektore i matrice, što uključuje jedan od oblika von Neumannove nejednakosti, Richterovu nejednakost, nejednakost Mirskyja, i neke druge. Treća kategorija su rezultati dobijeni primjenom ideje preraspodjele u prostorima funkcija (npr. Hardy-Littlewood nejednakost i Rieszova nejednakost).

U članku [**2**], Bourin je dokazao sledeću obrnutu nejednakost najosnovnijoj nejednakosti preuredjivanja. Strelica okrenuta dole znači da se posmatra nerastuća preraspodjela.

THEOREM 1.1 ([**2**], Theorem 1.1). *Neka su* $\{a_i\}$ *and* $\{b_i\}$ *konačni nizovi pozitivnih realnih brojeva takvi da vrijedi*

$$(\exists p > 0)(\exists q > 0)(\forall \in \bar{n})(p \geqslant \frac{a_i}{b_i} \geqslant q).$$

Then vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\downarrow} b_i^{\downarrow} \leqslant \frac{p+q}{2\sqrt{pq}} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Kako je u dokazu prethodne teoreme korišten matrični račun, autor postavlja zahtjev da se pronadje direktan dokaz ([**2**], Problem 2.1)

2. Lui'eva obrtnuta nejednokost preraspodjele

Za dva konačna niza $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ kaže se da su slično uredjena ako je

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n \ \text{ i } \ b_1 \leqslant b_2 \leqslant ... \leqslant b_n,$$

ili ako je

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n \ \text{ i } \ b_1 \geqslant b_2 \geqslant ... \geqslant b_n.$$

Za nizove $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ kažemo se da su obrnuto uredjena ako je

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n \ \text{ i } \ b_1 \geqslant b_2 \geqslant ... \geqslant b_n,$$

ili ako je

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n \ \text{ i } \ b_1 \leqslant b_2 \leqslant ... \leqslant b_n.$$

Daniel S. Lui je 2014. godine koristeći se matematičkom indukcijom pokazao sledeću teoremu (tzv. Reverse Rearrangement Inequality). Sem toga, u svom sljedećem tekstu [**10**], Lui je dao još jedan dokaz Reverse Rearrangement Inequality.

THEOREM 2.1 ([**9**]). *Ako su dva konačna niza* $\{a_i\}$ *i* $\{b_i\}$ *slično uredjena, tada za svaku permutaciju* $\sigma \in S_n$ *vrijedi*

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i + b_{\sigma(i)}). \tag{2.1}$$

Ako su dva konačna niza $\{a_i\}$ *i* $\{b_i\}$ *obrnuto uredjena, tada za svaku permutaciju* $\sigma \in S_n$ *vrijedi*

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \geqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i + b_{\sigma(i)}). \tag{2.2}$$

Ove dve nejednakosti se mogu kombinovati i kompaktno pisati kao

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i + b_{\sigma(i)}) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i + b_{b-i+1}). \tag{2.3}$$

Dalje, Lui je pokazao sledeće tvrdnje, takodje.

Tvrdnja 2.1 ([**9**], Corollary 1a). *Za nenegativnu opadajuću realnu funkciju f i nenegativne realne brojeve $a_1, a_2, ..., a_n$ i svaku permutaciju $\sigma \in S_n$ vrijedi*

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + f(a_i) \geqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i + f(a_{\sigma(i)})).$$

Tvrdnja 2.2 ([**9**], Corollary 1b). *Za nenegativnu rastuću realnu funkciju f i nenegativne realne brojeve $a_1, a_2, ..., a_n$ i svaku permutaciju $\sigma \in S_n$ vrijedi*

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + f(a_i) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i + f(a_{\sigma(i)})).$$

Tvrdnja 2.3 ([**9**], Corollary 2a). *Za pozitivnu opadajuću realnu funkciju f i nenegativne realne brojeve $a_1, a_2, ..., a_n$ i svaku permutaciju $\sigma \in S_n$ vrijedi*

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i f(a_i) + 1) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i f(a_{\sigma(i)}) + 1).$$

Tvrdnja 2.4 ([**9**], Corollary 2b). *Za pozitivnu rastuću realnu funkciju f i nenegativne realne brojeve $a_1, a_2, ..., a_n$ i svaku permutaciju $\sigma \in S_n$ vrijedi*

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i f(a_i) + 1) \geqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i f(a_{\sigma(i)}) + 1).$$

3. Uopštenje obrnute nejednakost preraspodjele

Nastojeći da konstruiše generalizaciju nejednakosti (2.3), Lui je pokazao je da za n slično uredjenih konačnih nizova $\{a_i^j : 1 \leqslant i \leqslant m \wedge 1 \leqslant j \leqslant n\}$ od m pozitivnih realnih brojeva i niz permutacija $\{\sigma_i\}_{i=1}^{n}$ skupa S_n vrijedi

Theorem 3.1 ([**10**]).

$$\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma_j(i)}^{j} \geqslant \prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i^j.$$

References

[1] C. Borell. A note on an inequality for rearrangements. *Pacific J. Math.*, **47**(1)(1973), 39–41.

[2] J. C. Bourin. Reverse rearrangement inequality via matrix technics. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **7**(2)(2006), Article 43.

[3] P. W. Day. Rearrangement inequalities. *Canad. J. Math*, **24**(5)(1972), 930–943.

[4] C. Draghici. A general rearangement inequality. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**(3)(2004), 735-743.

[5] F. Hamel, N. Nadirashvali and E. Russ. Rearrangement inequalities and applications to isoperimetric problems for eigenvalues. *Ann. Math.*, **174**(2)(2011), 647-755.

[6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya. *Inequalities.* Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[7] F. Holland. Rearrangement Inequalities, Lecture notes. http://euclid.ucc.ie/pages/ MATH-ENR/MathEnrichment/rearraniq08.pdf, 2008.

[8] J. Holstermann. A Generalization of the rearrangement inequality. *Mathematical Reflections*, **2017**(5)(2017), 503–507.

[9] D. S. Liu. Reverse rearrangement inequality. Dostupno na adresi (Uvid napravljen 09.03.2019) https://brilliant.org/discussions/thread/generalized-reverse-rearrangement-inequality/..

[10] D. S. Liu. Generalized reverse rearrangement. Dostupno na adresi (Uvid napravljen 09.03.2019) https://brilliant.org/discussions/thread/generalized-reverse-rearrangement-inequality/.

[11] D. London. Rearrangement inequalities involving convex functions. *Pacific J. Math.*, **34**(3)(1970), 749–753.

[12] G. G. Lorentz and T. Shimogaki. Interpolation theorems for operators in function spaces. *J. Funct. Anal.*, **2** (1968), 31–51.

[13] W. A. J. Luxemburg. Rearrangement invariant Banach function spaces. *Queen's Papers in Pure and Applied Math.*, **10** (1967), 83–144.

[14] A. W. Marshall, I. Olkin and B. C. Arnold. *Inequalities: Theory of majorization and its applications.* Springer, Springer Series in Statistics, New York, 2011.

[15] H. Minc. Rearrangements. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **159** (1971), 497–504.

[16] M. Newman. Kantorovichs inequality. *J. Res. National Bur. Standards*, **64B**(1960), 33-34.

[17] A. Oppenheim. Inequalities connected with definite Hermitian forms II. *Amer. Math. Monthly.*, **61**(7)(1954), 263–266.

[18] A. Vince. A Rearrangement inequality and the permutahedron. *Am. Math. Monthly*, **97**(4)(1990), 319–323.

International Mathematical Virtual Institute, Kordunaska, 78000 Banja Luka, Bosna i Hercegovina

E-mail address: bato49@hotmail.com