MAT-KOL (Banja Luka)
XXV (2)(2019), 133-137
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1902133M

ISSN 0354-6969 (p)
ISSN 1986-5828 (o)

JEDNA ALGEBARSKA NEJEDNAKOST I NJENO UOPŠTENJE

Dragoljub Milošević

Gornji Milanovac, Srbija

Sažetak. U ovom radu za pozitivne brojeve a, b i c dajemo tri dokaza nejednakosti

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2),$$

a potom i njeno uopštenje

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{c+a}+\frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a^n+b^n+c^n),$$

gdje je n prirodan broj.

Ključne riječi i izrazi: algebarska nejednakost, nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine pozitivnih brojeva (A – G nejednakost), uopštenje.

One Algebraic Inequality and One its Generalization

Abstract. In this article we give three proofs for one algebraic inequality for the positive numbers a, b and c :

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2),$$

and after that we give one its generalization

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{c+a}+\frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a^n+b^n+c^n),$$

where n is a positive integer.

Key words and phrases: algebraic inequality, AM – GM inequality, generalization.
AMS Subject Classification (2010): **97F50**
ZDM Subject Classification (2010): **F50, N50**

Rješavanje zadataka na različite načine omogućava iskazivanje svog našeg bogatstva ideja, dosetki i inventivnosti. Upoređivanjem tih načina može se ustanoviti koji je od njih kraći, efektniji, elegantniji. Time se, između ostalog, stiče i izgrađuje vještina u rješavanju zadataka.

Ovdje ćemo prezentovati nekoliko načina rješavanja sljedećeg zadatka namijenjenog mladim matematičarima srednjoškolcima:

Dokazati da za pozitivne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2), \tag{1}$$

a potom ćemo dati rješenje (dokaz) uopštene nejednakosti (1), tj.

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{c+a}+\frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a^n+b^n+c^n), \tag{2}$$

gdje je n prirodan broj.

Dokaz 1. U [1] je dat dokaz nejednakosti za pozitivne brojeve A, B, C, x, y, z:

$$\frac{A^3}{x}+\frac{B^3}{y}+\frac{C^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{x+y+z} \tag{3}$$

Ako u (3) stavimo

$$A=a^2, B=b^2, C=c^2, x=a^3(b+c), y=b^3(c+a) \text{ i } z=c^3(a+b),$$

dobijamo

$$\frac{(a^2)^3}{a^3(b+c)}+\frac{(b^2)^3}{b^3(c+a)}+\frac{(c^2)^3}{c^3(a+b)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3(a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b))} \quad (4).$$

Sada ćemo dokazati da je sljedeća nejednakost valjana

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b) \leq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)^2. \tag{5}$$

Očigledno tačna nejednakost $(a-b)^4+ab(a-b)^2 \geq 0$ je ekvivalentna sa

$$a^4+b^4+4a^2b^2 \geq 3ab(a^2+b^2).$$

Analogno dobijamo

$$b^4+c^4+4b^2c^2 \geq 3bc(b^2+c^2) \text{ i } c^4+a^4+4c^2a^2 \geq 3ca(c^2+a^2).$$

Nakon sabiranja posljednje tri nejednakosti, imamo

$$2(a^4+b^4+c^4)+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$\geq 3ab(a^2+b^2)+3bc(b^2+c^2)+3ca(c^2+a^2),$$

što je ekvivalentno sa nejednakošću (5). Ovim je potvrđena valjanost posmatrane nejednakosti. Najzad, iz nejednakosti (5) i (4) slijedi tražena nejednakost (1). □

Dokaz 2. Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za pozitivne brojeve $\frac{a^3}{b+c}$ i $\frac{a(b+c)}{4}$, imamo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^3}{b+c}+\frac{a(b+c)}{4}\right) \geq \sqrt{\frac{a^3}{b+c}\cdot\frac{a(b+c)}{4}},$$

odakle je

$$\frac{a^3}{b+c} \geq a^2 - \frac{1}{4}a(b+c).$$

Imamo i slične nejednakosti

$$\frac{b^3}{c+a} \geq b^2 - \frac{1}{4}b(c+a) \quad \text{i} \quad \frac{c^3}{a+b} \geq c^2 - \frac{1}{4}c(a+b).$$

Sabiranjem posljednje tri nejednakosti dobijamo

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b} \geq a^2+b^2+c^2-\frac{1}{4}(\,a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$$

$$= a^2+b^2+c^2-\frac{1}{2}(ab+bc+ca). \tag{6}$$

S obzirom da je tačna nejednakost $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ ekvivalentna sa

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2, \tag{7}$$

iz (6) slijedi željena nejednakost (1). □

Dokaz 3. U [3] se nalazi dokaz sljedeće nejednakosti za pozitivne brojeve a, b, c, x, y, z:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(\,a+b+c)^2}{x+y+z}. \tag{8}$$

Na osnovu ove nejednakost dobijamo

$$\frac{(a^2)^2}{a(b+c)}+\frac{(b^2)^2}{b(c+a)}+\frac{(c^2)^2}{c(a+b)} \geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)},$$

tj.

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}. \tag{9}$$

Sada iz (9) i (7) implicira nejednakost (1). □

Napomena 1. Nejednakost (1) može se dokazati i primjenom: Koši – Švarcove nejednakosti i/ili Čebiševljeve nejednakosti.

Preostaje nam da dokažemo uopštenu nejednakost (2), korištenjem ideje iz dokaza 2.

Dokaz. Na osnovu A – G nejednakosti je

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{a^{n-1}(b+c)}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^{n+1}}{b+c}\cdot\frac{a^{n-1}(b+c)}{4}} = a^n.$$

Analogno dobijamo

$$\frac{b^{n+1}}{c+a}+\frac{b^{n-1}(c+a)}{4} \geq b^n \text{ i } \frac{c^{n+1}}{a+b}+\frac{c^{n-1}(a+b)}{4} \geq c^n.$$

Sabiranjem posljednje tri nejednakosti imamo

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{a^{n-1}(b+c)}{4}+\frac{b^{n+1}}{c+a}+\frac{b^{n-1}(c+a)}{4}+\frac{c^{n+1}}{a+b}+\frac{c^{n-1}(a+b)}{4} \geq a^n+b^n+c^n,$$

tj.

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{c+a}+\frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \frac{5}{4}(a^n+b^n+c^n)-\frac{1}{4}\big((a+b+c)(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})\big) \quad (10)$$

S obzirom da su brojevi $a-b$ i $a^{n-1}-b^{n-1}$ istog znaka, možemo pisati

$$(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1}) \geq 0, \text{ za } n>1.$$

Na isti način, imamo

$$(b-c)(b^{n-1}-c^{n-1}) \geq 0 \text{ i } (c-a)(c^{n-1}-a^{n-1}) \geq 0, (n>1).$$

Ako saberemo posljednje tri nejednakosti, dobijamo

$$(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})+(b-c)(b^{n-1}-c^{n-1})+(c-a)(c^{n-1}-a^{n-1}) \geq 0. \quad (11)$$

Nejednakost (11) je ekvivalentna sa

$$2(a^n+b^n+c^n) \geq a(b^{n-1}+c^{n-1})+b(c^{n-1}-a^{n-1})+c(a^{n-1}+b^{n-1}).$$

Ako lijevoj i desnoj strani posljednje nejednakosti dodamo po $a^n+b^n+c^n$ dobijamo

$$3(a^n+b^n+c^n) \geq (a+b+c)(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}). \quad (12)$$

Konačno, iz nejednakosti (12) i (10) slijedi

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{b^{n+1}}{c+a}+\frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \frac{5}{4}(a^n+b^n+c^n)-\frac{3}{4}(a^n+b^n+c^n)=\frac{1}{2}(a^n+b^n+c^n),$$

za $n>1$. U [2] je dokazano da nejednakost (2) vrijedi i za $n=1$, pa je ovim dokaz nejednakosti (2) kompletiran.

Napomena 2. Za $n=2$, iz nejednakosti (2) slijedi nejednakost (1).

Napomena 3. Interesantno je da nejednakost (2) vrijedi i za $n=0$, tj.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{1}{2}(1+1+1)=\frac{3}{2}$$ (Nesbittova nejednakost).

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić i A. Bašić. *Jedna zanimljiva algebarska nejednakost i njena primjena*, MAT-KOL (Banja Luka), XX(2)(2014), 69 – 75.

[2] Š. Arslanagić. *Pet raznih dokaza jedne algebarske nejednakosti*, MAT-KOL (Banja Luka), XXV (2) (2019), 95 – 100.

[3] D. Milošević. *Jedna nejednakost i njena primena*, Tangenta (Beograd), 55 (2008 / 2009-3), 8 – 10.

[4] D. S. Mitrinović. *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.