MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XXV (2)(2019), 101-103 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1902101M

JOŠ O JEDNOJ ALGEBARSKOJ NEJEDNAKOSTI

Yet about one Algebraic Inequality

Dragoljub Milošević,

G. Milanovac, Srbija

Sažetak. U ovom kraćem radu dajemo još jedan dokaz nejednakosti iz [1]:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a+b+c),\ \ (a,b,c>0),$$

a potom i dva njezina uopštenja

$$\frac{a^2}{kb+c}+\frac{b^2}{kc+a}+\frac{c^2}{ka+b} \geq \frac{1}{k+1}(a+b+c), (k>0),$$

$$\frac{x_1^2}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1+x_2} \geq \frac{1}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_n),\ \ (x_1,x_2,\ldots,x_n>0).$$

Ključne reči i izrazi: algebarska nejednakost, nejednakost Koši - Bunjakovski – Švarca, uopštenje.

Abstract. In this short paper we give yet one proof for the following inequality exposed in [1]:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a+b+c), \qquad (a,b,c>0)$$

and after that we also give two its generalizations:

$$\frac{a^2}{kb+c}+\frac{b^2}{kc+a}+\frac{c^2}{ka+b} \geq \frac{1}{k+1}(a+b+c), \qquad (k>0)$$

and

$$\frac{x_1^2}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1+x_2,} \geq \frac{1}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_n), \quad (x_1,x_2,\ldots,x_n>0).$$

Key words and phrases: algebraic inequality, Cauchy – Buniakowski – Schwarz inequality, generalization.

AMS Subject Classification (2010): **97F50**
ZDM Subject Classification (2010): **F50, N50**

U [1] je dato 5 raznih dokaza sledeće nejednakosti

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a+b+c), \tag{1}$$

gde su a,b,c pozitivni realni brojevi.

Prvo, dajemo još jedan dokaz nejednakosti (1).

Dokaz. U [2] autori su dokazali ovu nejednakost za pozitivne brojeve a,b,c,x,y,z:

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}. \tag{2}$$

Ako u (2) uvedemo smenu $x=a(b+c), y=b(c+a)$ i $z=c(a+b)$, imamo

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3\cdot 2(ab+bc+ca)}. \tag{3}$$

S obzirom da je tačna nejednakost $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ ekvivalentna sa $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, iz (3) direktno sledi tražena nejednakost (1). □

Sada dokažimo jedno uopštenje nejednakosti (1), tj. dokažimo

$$\frac{a^2}{kb+c}+\frac{b^2}{kc+a}+\frac{c^2}{ka+b} \geq \frac{1}{k+1}(a+b+c), \; k>0. \tag{4}$$

Dokaz. Za pozitivne brojeve a,b,c,x,y,z važi nejednakost ([3]):

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}. \tag{5}$$

Ako u (5) stavimo $x=kb+c, y=kc+a$ i $z=ka+b$, dobijamo

$$\frac{a^2}{kb+c}+\frac{b^2}{kc+a}+\frac{c^2}{ka+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{kb+c+kc+a+ka+b},$$

što je ekvivalentno sa željenom nejednakošću (4). □

Napomena 1. Specijalno, za $k=1$ iz nejednakosti (4) slijedi nejednakost (1).

Na kraju, dokažimo i ovo uopštenje:

$$\frac{x_1^2}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1+x_2} \geq \frac{1}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_n), \qquad (6)$$

gde su $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitivni brojevi.

Dokaz. Za pozitivne brojeve $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ važi nejednakost Koši – Bunjakovski – Švarca:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right). \qquad (7)$$

Ako u (7) stavimo

$$a_1=\frac{x_1}{\sqrt{x_2+x_3}}, a_2=\frac{x_2}{\sqrt{x_3+x_4}}, \dots, a_n=\frac{x_n}{\sqrt{x_1+x_2}},$$

$$b_1=\sqrt{x_2+x_3}, b_2=\sqrt{x_3+x_4}, \dots, b_n=\sqrt{x_1+x_2},$$

imamo

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \leq \left(\frac{x_1^2}{x_2+x_3}+\frac{x_2^2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1+x_2}\right)\cdot 2(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

što je ekvivalentno sa (6). □

Napomena 2. Za $n=3$, $x_1=a, x_2=b$ i $x_3=c$, iz nejednakosti (6) sledi nejednakost (1).

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić. *Pet raznih dokaza jedne algebarske nejednakosti.* MAT-KOL (Banja Luka), XXV (2)(2019), 95 – 100.

[2] Š. Arslanagić i A. Bašić. *Jedna zanimljiva algebarska nejednakost.* MAT-KOL (Banja Luka), XX (2)(2014), 69 – 75.

[3] D. Milošević. *Jedna nejednakost i njena primena.* Tangenta (Beograd), 55 (2008/2009 – 3), 8 – 10.

[4] D. S. Mitrinović. *Analitičke nejednakosti.* Građevinska knjiga, Beograd, 1970.