

Singulariteti drugog reda i grafovi algebarskih implicitnih krivulja

Petar Svirčević

Zagreb, Hrvatska

e-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr

Sažetak. U ovome članku smo razmotrili uglavnom singularitete drugog reda, koji se odnose na grafove algebarskih implicitnih krivulja. Svakako, da smo te krivulje i grafički prikazali, što uglavnom i nije problem, ako se radi o funkcijama. No, ako te krivulje nisu funkcije, onda smo ih rastavljali po dijelovima u funkcije, i tada smo grafove tih krivulja prikazali kao unija grafova navedenih funkcija. Nadalje, dali smo genezu izoliranih točaka, odnosno pokazali smo kako se graf krivulje može sastojati od više grana i izoliranih točaka. Jasno je, da smo tu analizu radili pomoću funkcija dviju varijabli, koje predstavljaju glatke plohe, koje imaju lokalne ekstreme. Nadalje smo te plohe presjecali ravninama, koje su paralelne s ravninom XY, a tangiraju plohe u lokalnim ekstremnim točkama, pa smo ih onda po potrebi i translaterali u smjeru osi Z. Većinu grafova krivulja smo prikazali u koloru, da se vidi, kako unija više grafova funkcija čini graf krivulje, što smo već rekli. Neke teoreme smo samo iskazali i nismo se upuštali u stroge dokaze, jer ovaj rad možemo shvatiti i kao mali atlas krivulja sa singularitetima drugog reda, a sve je napravljeno pomoću elementarnih metoda matematičke analize.

Ključne riječi. Singulariteti drugog reda, grafovi implicitnih funkcija.

The Singularities of Second Order and Graphs of Algebraic Implicit Curves

Abstract. In this article, we have mainly considered second-order singularities, which refer to graphs of algebraic implicit curves. Where possible, as in the case of algebraic functions, we constructed a graphic representation of these curves. This was of course not possible if the algebraic curves were not functions. In such cases we divided the curves into parts – each part being an algebraic function. The graph of such an algebraic curve was represented by the union of graphs of the specified function. Furthermore, we gave the genesis of isolated points, that is, we showed that the graph of the curve may consist of multiple branches and isolated points. It is clear that we made this analysis by using the functions of two variables, which are smooth surfaces, which have local extremes. We then traversed these surfaces with planes parallel to the XY plane and touching the surfaces tangentially at the local extreme points. Then we translated them in the direction of the Z axis as needed. Most of the curve graphs are

in color, in order to show how the union of several graph function adds up to the graph of the curve (as already mentioned). Some of the theorems are just mentioned and not rigorously elaborated (no rigorous proof is shown). The reason why is because this work can be understood as a small atlas of curves with second order singularities, all of them constructed using elementary methods of mathematical analysis.

Keywords. Second order singularities, graphs of implicit curves.

1. Uvodno razmatranje

Odmah na početku recimo da su *singulariteti ravninskih krivulja* (uzao ili čvor, šiljak, kljun, samododir, izolirana točka, asimptotska točka,...) klasificirani, dok za prostorne krivulje to nije napravljeno. Mi ćemo se uglavnom baviti singularitetima drugog reda kod ravninskih krivulja, koje su zadane u implicitnom obliku i one su k tome algebarske.

Napomena 1.1. Da bi izbjegli zabune uvest ćemo neke oznake vezane za ortogonalne Kartezijeve koordinatne sustave u ravnini i prostoru s istom metrikom na koordinatnim osima. Naime, uobičajeno je, da se os apscisa označava sa x , os ordinata sa y i os aplikata sa z . Tako ako kažemo, da je $T(x, y)$ oznaka za točku koordinatne ravnine, tada je jasno, da apscisa te točke pripada apscisnoj osi, pa možemo pisati $x \in x$, što nije korektno. Možda bi nešto dobili na preglednosti, da os apscisa boldiramo, dakle da pišemo $x \in \mathbf{x}$. Rečeno se odnosi i na ostale koordinatne osi. Dakle, da ne bude zabune mi ćemo koordinatne osi označavati s: X, Y, Z ; a ravninski koordinatni sustav s OXY i prostorni s $OXYZ$. Sada smo opet izgubili mogućnost, da točke označavamo sa X, Y i Z . Nadalje, prvi kvadrant sa zatvorenim rubom neka je $O^{1++}X^+Y^+$, gdje se podrazumijeva, da se ishodište nalazi na obje poluosi. Po toj analogiji bi $O^{1+-}X^-Y^+$ značilo, da se radi o prvom kvadrantu, gdje nije sadržan apscisni polupravac ali mu pripada ishodište, dok je ordinatni polupravac sadržan bez ishodišta. Tako bi npr. $O^{3--}X^+Y^-$ predstavljao treći kvadrant, kojemu pripada apscisni polupravac, ali mu ne pripada ordinatni polupravac, te ishodište pripada samo ordinatnom polupravcu. Svakao, da se ovdje radi o desnom Kartezijevom ravninskom sustavu, gdje su predznaci točaka po kvadrantima: $(+, +), (-, +), (-, -), (+, -)$. Nadalje znamo, da koordinatne ravnine prostornog sustava dijele prostor na osam oktanta, koji imaju slijedeće predznake točaka u njima, ako se radi o desnom sustavu: $I \rightarrow (+, +, +), II \rightarrow (-, +, +), III \rightarrow (-, -, +), IV \rightarrow (+, -, +), V \rightarrow (+, +, -), VI \rightarrow (-, +, -), VII \rightarrow (-, -, -), VIII \rightarrow (+, -, -)$. Po analogiji na ravninu, sada bi $O^{1+++}X^+Y^+Z^+$ značilo da se radi o prvom oktantu sa zatvorenim rubovima, kojemu ishodište pripada svima koordinatnim poluosima, dok bi $O^{7-++}X^+Y^-Z^-$ značilo da imamo sedmi oktant, gdje ishodište ne pripada osi apscisa, dok polupravci na osi ordinata i aplikata nemaju ruba. Dakle, tu se naglašava postojanje ruba a ne predznaka koordinatnih poluosi. Ovo razmatranje za prostorni sustav smo naveli, jer ćemo pokazati kako se ravninske implicitne krivulje mogu interpretirati kao presjeci ploha i ravnine XY . I konačno ćemo za otvorene intervale na koordinatnim osima uvesti zagrade $\langle \dots \rangle$ umjesto (\dots) , jer će se ove zadnje koristiti za označavanje koordinata točaka.

U slijedećoj definiciji dajemo najčešće skraćenice i oznake (simbole), koje ćemo koristiti u daljnjem tekstu.

Definicija 1.1. Npr. (Definicija 3.2.) \equiv (D3.2.), (Teorem 1.2.) \equiv (T1.2.), (Napomena 2.3.) \equiv (N2.3.), (asimptota paralelna sa osi X) \equiv ($as \parallel X$), (asimptota paralelna sa osi Y) \equiv ($as \parallel Y$), (tangenta paralelna sa osi X) \equiv ($tg \parallel X$), (tangenta paralelna sa osi Y) \equiv ($tg \parallel Y$), (kosa asimptota) \equiv ($as /$), (sjecište krivulje sa osi X) \equiv (S_x), (sjecište krivulje sa osi Y) \equiv (S_y), (točka u kojoj je tangenta paralelna sa osi X i dira krivulju C) \equiv (T_x ili $T^{(x)}$), (točka u kojoj je tangenta paralelna sa osi Y i dira krivulju C) \equiv (T_y ili $T^{(y)}$), (singularna točka drugog reda) \equiv (S_0), (tangenta u singularnoj točki krivulje) \equiv (tg_{S_0}). Na kraju dokaza teorema stavljamo znak ■

Pođimo od ravninske krivulje

$$C \dots \vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1)$$

Točku $T(t_0)$ te krivulje, u kojoj je

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_0} = \vec{0}$$

zovemo *singularna točka*, a ostale točke su *regularne točke*. Ako je $T(t_1)$ neka regularna točka, tada mora biti $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_1} \neq \vec{0}$, a to znači da vrijedi barem jedna od nejednakosti;

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_1} \neq 0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_1} \neq 0.$$

No, ova definicija singularnosti nije dobra, što će nam pokazati sljedeći primjer.

Zadatak 1.1. Ispitajmo singularitet funkcije

$$C \dots \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^6, \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Rješenje Z1.1. Evidentno je, da je to jednadžba obične parabole, jer bismo je mogli nakon eliminacije parametra dati u skraćenom obliku $y = x^2$, a poznato nam je, da ona nema singularnih točaka. Krivulju (2), koja je zapravo funkcija, možemo pisati u vektorskom obliku (1), pa imamo

$$C \dots \vec{r} = \vec{r}(t) = t^3\vec{i} + t^6\vec{j}$$

a odatle za $t = 0$ dobivamo $\frac{d\vec{r}}{dt} = 3t^2\vec{i} + 6t^5\vec{j}$, dakle ishodište $O(0,0)$, bi trebalo biti singularna točka, što nije istina. Prema tome definicija singularnosti nije dobra, kako smo već rekli.

Sada ćemo tu parabolu prikazati u drugom parametarskom obliku, npr.

$$C \dots \begin{cases} x = t \\ y = t^2; \end{cases} \forall t \in \mathbb{R},$$

pa bi analognim postupkom dobili da je $\frac{d\vec{r}}{dt} = 1\vec{i} + 2t\vec{j}$, $\forall t \in \mathbb{R}$; dakle $O(0,0)$ je regularna točka, što je istina, a to je kontradikcija s prvom parametrizacijom.

Navedeni primjer nam kaže, da singularitet zavisi o analitičkom predočenju krivulje, pa ćemo to iskazati u slijedećoj definiciji.

Definicija 1.2. Za svaku vrstu singulariteta, koji se pojavljuje kao posljedica analitičkog predočenja, kažemo da je *analitički singularitet*.

2. Singulariteti krivulja koje su prikazane u implicitnom obliku

Da bismo izbjegli analitičke singularitete, mi ćemo ravninske krivulje ispitivati, kada su njihove jednačbe *algebarske jednačbe* zadane u implicitnom obliku

$$C \dots F(x, y) = 0. \quad (3)$$

Iz matematičke analize znamo, da je npr. $F \equiv e^{x+y} + \sin x + \cos y - 1 = 0$ implicitna transcendentna jednačba. Nadalje, *Bernoullijeva lemniskata* ima jednačbu u polarnim koordinatama $\rho = a\sqrt{2} \cos 2\varphi$, a ako prijedemo na Kartezijeve koordinate, onda toj krivulji pripada algebarska jednačba $F \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$. Dakle, da li je krivulja algebarska ili transcendentna zaključujemo iz njezinog prikaza u Kartezijevim a ne u polarnim koordinatama. Svakako, da se svaka algebarska jednačba krivulje može prikazati u polarnim koordinatama, a obrat ne mora vrijediti. Npr. jednačba *Arhimedove zavojnice* u polarnim koordinatama je $\rho = a\varphi$, a njezina implicitna jednačba u Kartezijevim koordinatama je $F \equiv y - x \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, dakle ona je transcendentna.

Definicija 2.1. Graf krivulje $C \dots F(x, y) = 0$ se definira kao skup točaka u ravnini, koje zadovoljavaju relaciju

$$\Gamma(C) = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0 \& x \in D \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \& y \in K \setminus \{b_1, \dots, b_m\}\},$$

gdje je $D \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ domena krivulje, koja je općenito relacija, a skup $\{a_1, \dots, a_n\}$ je skup elemenata koji nije u D , jer ta krivulja nije u njima definirana ili ima asimptote paralelne sa osi Y , dok je $K \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$ kodomena krivulje, koja je općenito relacija, a skup $\{b_1, \dots, b_m\}$ je skup elemenata koji nije iz K u kojima vrijednosti te krivulje nisu definirane ili ona ima u njima asimptote paralelne sa osi X .

Napomena 2.1. Recimo i to, da ćemo često, zbog jednostavnosti, poistovjećivati ravninsku krivulju s njezinom jednačbom, iako su to dva bitno različita pojma. Osim toga, mi ćemo neki put jednačbu (3) zvati funkcijom, iako se može raditi o relaciji odnosno konačnoznačajnoj funkciji. Dakle, radi se o kolokvijalnosti.

Napomena 2.2. Može se pokazati, što nije evidentno, da ako je krivulja dana s (3), tada se ne pojavljuju analitički singulariteti, ali ona može biti algebarska ili transcendentna.

No, već smo rekli, da ćemo se baviti samo algebarskim krivuljama. Nadalje, pretpostavit ćemo, da je (3) dva puta parcijalno derivabilna ili skraćeno, da je samo dva puta derivabilna, te da je ona i da su njezine derivacije neprekinute.

Sada ćemo dati definiciju skraćenih zapisa vrijednosti prvih i drugih parcijalnih derivacija i singularnih točaka te krivulje.

Definicija 2.1. Skraćeni zapis vrijednosti prvih i drugih parcijalnih derivacija krivulje $F(x, y) = 0$ u točki $S_0(x_0, y_0)$ je dan s oznakama:

$$F_x(x_0, y_0) = F_x^0, \quad F_y(x_0, y_0) = F_y^0,$$

$$F_{xx}(x_0, y_0) = F_{xx}^0, \quad F_{xy}(x_0, y_0) = F_{xy}^0, \quad F_{yy}(x_0, y_0) = F_{yy}^0.$$

Definicija 2.2. Singularna točka krivulje $F(x, y) = 0$ je ona njezina točka $S_0(x_0, y_0)$ za koju je:

$$F_x^0 = 0, \quad F_y^0 = 0; \quad (4)$$

i barem jedna vrijednost drugih parcijalnih derivacija je različita od nule, tj.

$$\text{sng}|F_{xx}^0| + \text{sng}|F_{xy}^0| + \text{sng}|F_{yy}^0| \in \{1, 2, 3\}, \quad (5)$$

i ona se zove *dvostruki singularitet*. Jasno je, da je ekvivalent za (5) ova jednakost

$$\text{sng}(\text{sng}|F_{xx}^0| + \text{sng}|F_{xy}^0| + \text{sng}|F_{yy}^0|) = 1.$$

Promotrimo geometrijsko značenje dvostrukog singulariteta, odnosno jednakosti (4). Naime, koeficijent smjera tangente od $F(x, y) = 0$ dobijemo, ako tu jednakost deriviramo po x tada je $F_x + F_y \frac{dy}{dx} = F_x + kF_y = 0$, a odatle je

$$k = -\frac{F_x}{F_y} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Dakle, iz (4) slijedi, da je dvostruka singularna točka ona točka u kojoj ta krivulja ima neodređeni smjer tangente, koji treba naći.

Teorem 2.1. U dvostrukoj singularnoj točki implicitne krivulje općenito postoje dva tangentna vektora, odnosno dvije tangente, koji mogu biti, nekolinearne ili kolinearne, različite orijentacije, ili konjugirano kompleksne.

Dokaz T2.1. Polazimo od $F(x, y) = 0$ i njezine singularne točke $S_0(x_0, y_0)$, za koju vrijede jednakosti (4). Označimo s k_0 koeficijent smjera tangente u navedenoj točki, a to znači da vrijedi

$$k_0 = -\lim_{T \rightarrow S_0} \frac{F_x}{F_y} = \left(\frac{0}{0}\right). \quad (6)$$

Budući da se pojavljuje neodređeni oblik $0/0$, to znači da možemo primjeniti *L'Hospitalovo pravilo* na zadnju relaciju, koje uvijek i ne mora dovesti do cilja. Dakle imamo

$$k_0 = - \lim_{T \rightarrow S_0} \frac{F_{xx} + F_{xy} \frac{dy}{dx}}{F_{xy} + F_{yy} \frac{dy}{dx}},$$

ako uvažimo da je $k_0 = - \lim_{T \rightarrow S_0} \left(\frac{dy}{dx} \right)$, tada ova relacija prima oblik

$$k_0 = - \frac{F_{xx}^0 + F_{xy}^0 \cdot k_0}{F_{xy}^0 + F_{yy}^0 \cdot k_0},$$

iz kojega dobivamo kvadratnu jednadžbu po k_0 , dakle

$$F_{yy}^0 k_0^2 + 2F_{xy}^0 k_0 + F_{xx}^0 = 0. \quad (7)$$

Sada je jasno, da krivulja ima dvije tangente u singularnoj točki, jer iz te jednadžbe dobivamo

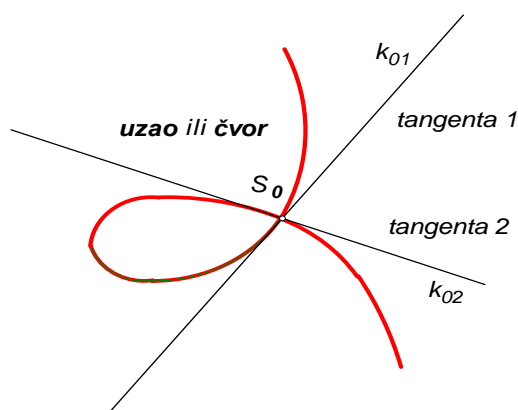
$$(k_0)_{1,2} = \frac{-F_{xy}^0 \pm \sqrt{(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0}}{F_{yy}^0}. \quad (8)$$

Za diskusiju predznaka diskriminante u (8) razlikujemo tri slučaja.

1. *Slučaj* (Sl.2.1.). Diskriminanta je pozitivna, dakle

$$(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 > 0,$$

tada to znači, da krivulja u singularnoj točki ima dvije realne i različite tangente, a to zovemo *uzao* ili *čvor*.



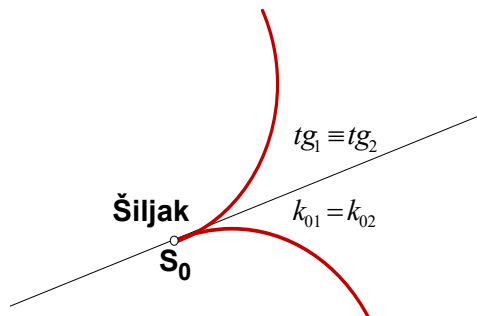
Slika 2.1.

2. *Slučaj*. Ako je diskriminanta jednaka nuli, tj.

$$(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 0, \quad (9)$$

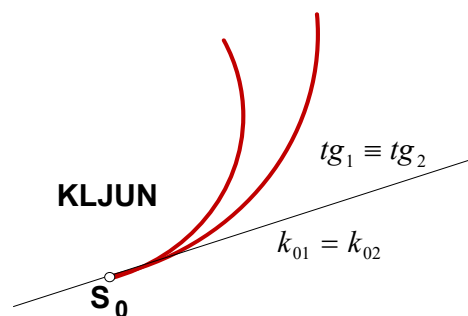
tada to znači da krivulja ima u singularnoj točki dvostruku tangentu, pa su njezini vektori dvostruke orijentacije. No, tu su moguća tri podslučaja i to; a) *šiljak*, b) *kljun* i c) *samododir*. Te moguće oblike prikazujemo na priloženim slikama.

a) Podslučaj-šiljak (Sl. 2.2.).



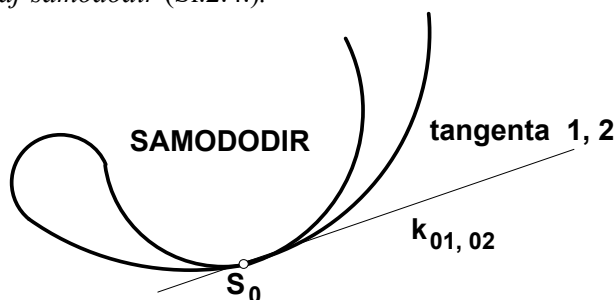
Slika 2.2

b) Podslučaj-kljun (Sl.2.3.).



Slika 2.3.

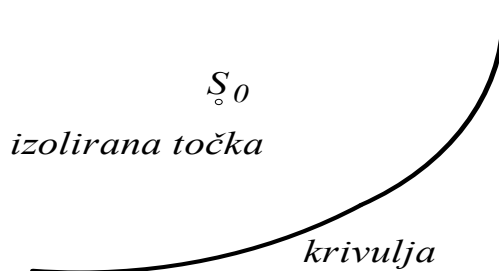
c) Podslučaj-samododir (Sl.2.4.).



Slika 2.4.

3. Slučaj (Sl.2.5.). Ako je

$$(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 < 0, \tag{10}$$



Slika 2.5.

tada krivulja nema realnih tangenti u singularnoj točki, dakle ta točka je *izolirana singularna točka* ■

Napomena 2.3. Ako funkciju dviju varijabli $\mathcal{P} \dots z = f(x, y)$ koja predstavlja plohu, presječemo s ravninom $\mathcal{R} \dots z = z_0$, gdje je z_0 iz kodomene te funkcije, tada dobivamo jednadžbu krivulje

$$C \dots f(x, y) - z_0 = 0 \text{ ili } F(x, y) = 0,$$

koja ne mora biti funkcija.

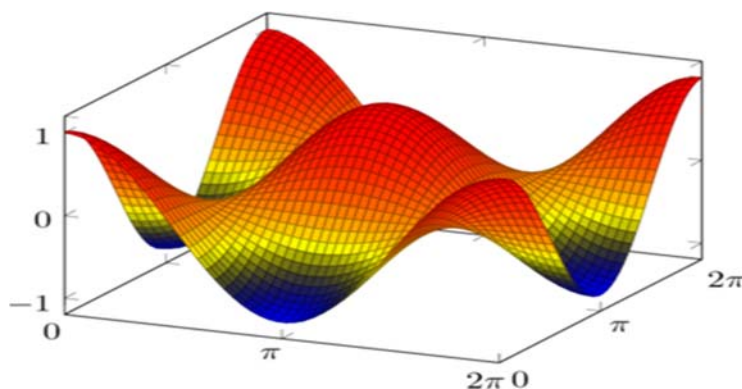
Teorem 2.2. Oko izolirane singularne točke krivulje, koja je zadana u implicitnom obliku (3), postoji okolina u kojoj ona nema točaka.

Dokaz T2.2. Neka je u Kartezijevom trodimenzionalnom koordinatnom sustavu dana ploha čija je jednadžba

$$z = f(x, y). \quad (11)$$

Tada je jasno, da je krivulja (3) presječnica plohe (11) i ravnine XY , čija je jednadžba $z = 0$. Relacije (4) i (9) nam daju nužne i dovoljne uvjete, da točka $S_0(x_0, y_0)$ bude ekstremna točka plohe (11), a to znači da u njezinoj tangencijalnoj ravnini $z = 0$ postoji okolina u kojoj nema drugih točaka te plohe. Sada naglasimo, što se dešava s krivuljom. Budući, da je naša krivulja presjek te plohe i tangencijalne ravnine u $S_0(x_0, y_0)$, tada to znači da u njezinoj okolini nema točaka te krivulje, pa je time teorem dokazan ■

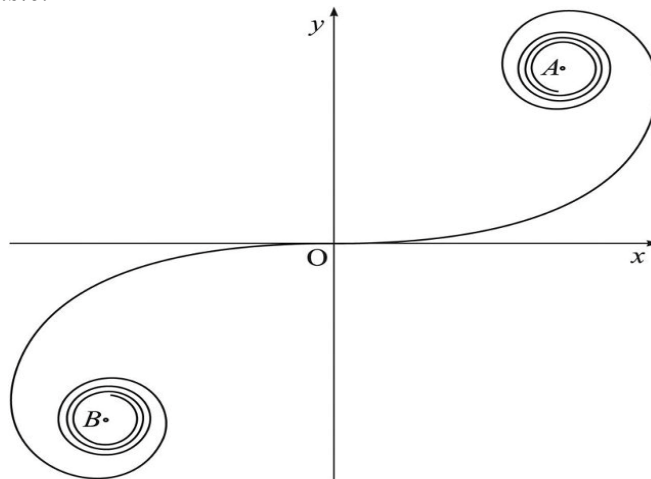
Napomena 2.3. Slika 2.6. ne može potvrditi T2.2., ali kada bi tu plohu translirali za 1 prema dolje, tada bi dobili singularnu točku $S_0(\pi, \pi)$, ali nemamo elemenata da kažemo nešto o redu singulariteta, jer nam taj prikaz plohe služi, da bolje shvatimo genezu slučaja na Sl.2.5., jer je sada jasnije da krivulji može pripadati i izolirana točka, a sve to slijedi iz jednadžbe plohe, što u prvi mah baš vizuelno i nije jasno.



Slika 2.6. (slika posuđena iz Wikipedije)

Definicija 2.3. *Asimptotska točka* je jedna vrsta singulariteta, gdje se oko jedne točke grana krivulje ovija („mota“ se) bezbroj puta približavajući joj se na po volji malu udaljenost. Jedna te ista krivulja može imati više asimptotskih točaka.

Napomena 2.4. Npr. klotoida (Sl.2.7.) (od grč. κλώθειν: ispredati, presti + -oid), je krivulja s dvije asimptotske točke, kod koje je polumjer zakrivljenosti obrnuto proporcionalan duljini luka, a parametarski prikaz je $x = a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt$, $y = a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin \frac{\pi t^2}{2} dt$, gdje je $t = s/a\sqrt{\pi}$ (s je duljina luka). Može se dokazati, da ta krivulja nije algebarska i da su njezine asimptotske točke $A \left(+\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, +\frac{a\sqrt{\pi}}{2} \right)$ i $B \left(-\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{a\sqrt{\pi}}{2} \right)$. Ona je i centralno simetrična s obzirom na ishodište.



Slika 2.7. (slika posuđena iz Wikipedije)

Nadalje kod te krivulje, vidimo da je ishodište točka infleksije, a os X je u njemu tangenta i os Y normala. Zanimljivo je, da se ova krivulja upotrebljava pri projektiranju zavoja cesta i željezničkih pruga. I još konkretno napomenimo, da je $rs = a^2$, gdje je a konstanta razmjernosti, dok je r polumjer zakrivljenosti.

Napomena 2.5. Može se pokazati, da se asimptotske točke ne pojavljuju kod algebarskih implicitnih krivulja. Recimo i to, da je moguća istovremena kombinacija dviju ili više singularnih točaka (npr. uzao-kljun, uzao-šiljak, kljun-samododir,...), a to se odnosi na singularitete trećeg reda, no mi ćemo se baviti singularitetima drugog reda, dok o singularitetima trećeg i viših redova ćemo dati samo neke načelne napomene.

3. Primjeri singulariteta

Sada ćemo dati nekoliko zadataka, sa svrhom da pokažemo, kako se nalaze singulariteti krivulja čije su jednadžbe zadane u implicitnom obliku. No, prije ćemo dati četiri definicije koje ćemo koristiti kod crtanja grafova krivulja, te ćemo navesti T3.1., koji je jasan, ali ne navodimo dokaz.

Definicija 3.1. Krivulja $F(x, y) = 0$ se zove *simetrična krivulja s obzirom na os X* , ako i samo ako vrijedi identitet

$$F(x, -y) \equiv F(x, y). \quad (12)$$

Npr.: $F(x, y) \equiv y^2 - x = 0$, $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ su takve krivulje.

Definicija 3.2. Krivulja $F(x, y) = 0$ se zove *simetrična krivulja s obzirom na os Y*, ako i samo ako vrijedi identitet

$$F(-x, y) \equiv F(x, y). \quad (13)$$

Npr.: $F(x, y) \equiv y - x^2 = 0$, $F(x, y) \equiv x^4 y - x^2 + y^3 - 2y = 0$ imaju navedeno svojstvo.

Definicija 3.3. Krivulja $F(x, y) = 0$ se zove *simetrična krivulja s obzirom na pravac $y = x$* , tj. na simetralu prvog i trećeg kvadranta, ako i samo ako vrijedi identitet

$$F(x, y) \equiv F(y, x).$$

Naime, za krivulje za koje vrijedi ovo svojstvo možemo reći da su međusobno inverzne. Na primjer, $F(x, y) \equiv xy - 1 = 0$, $F(x, y) \equiv x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$) (*Descartesov list*).

Definicija 3.4. Krivulja $F(x, y) = 0$ se zove *centralno simetrična krivulja s obzirom na ishodište*, ako i samo ako vrijedi identitet

$$F(x, y) \equiv F(-x, -y).$$

Npr. $F(x, y) \equiv x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0$ je centralno simetrična s obzirom na ishodište.

Napomena 3.1. Jasno je, ako je $F(x, y) = 0$ funkcija, da tada $F(y, x) = 0$ ne mora biti funkcija. Svakako, da važi i obrat, dakle, ako $F(x, y) = 0$ nije funkcija, tada $F(y, x) = 0$ može biti funkcija. Npr. $F(x, y) \equiv y - x^2 = 0$ je funkcija, a njezin inverz $F(y, x) \equiv x - y^2 = 0$ nije funkcija.

Teorem 3.1. Graf krivulje, čija je jednadžba $F(x, y) = 0$, se može rastaviti u k disjunktih grafova funkcija, čije su im domene i kodomene općenito nedisjunktne, ali im je unija domena i unija kodomena jednaka respektivno domeni odnosno kodomeni imenovane krivulje. Prema tome

$$\Gamma(C) = \Gamma(C_1) \cup \dots \cup \Gamma(C_k), \quad \Gamma(C_i) \cap \Gamma(C_j) = \emptyset; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, k,$$

gdje je

$$C_i \dots y_i: D_i \rightarrow K_i; \quad D_1 \cup \dots \cup D_k = D \setminus \{a_1, \dots, a_n\}; \quad K_1 \cup \dots \cup K_k = D \setminus \{b_1, \dots, b_m\} \blacksquare$$

Primjena ovoga teorema bit će nam praktična, jer ćemo crtanjem funkcija disjunktih grafova zapravo nacrtati graf dane krivulje, koji nekiput može imati vrlo složen oblik. Iz praktičnih razloga često ćemo smatrati da je $\Gamma(C) \equiv C$, premda to matematički nije korektno. No, iz istih razloga ćemo poistovjetiti krivulju i njoj pripadajuću jednadžbu, tj. $C \equiv F(x, y)$.

Zadatak 3.1. Nađimo singularne točke i nacrtajmo graf krivulje (*Semikubne parabole*)

$$C \dots F(x, y) \equiv ax^3 - y^2 = 0 \text{ (spec. } a = 1)$$

Rješenje Z3.1. (Sl.3.1.) Iz sustava jednažbi

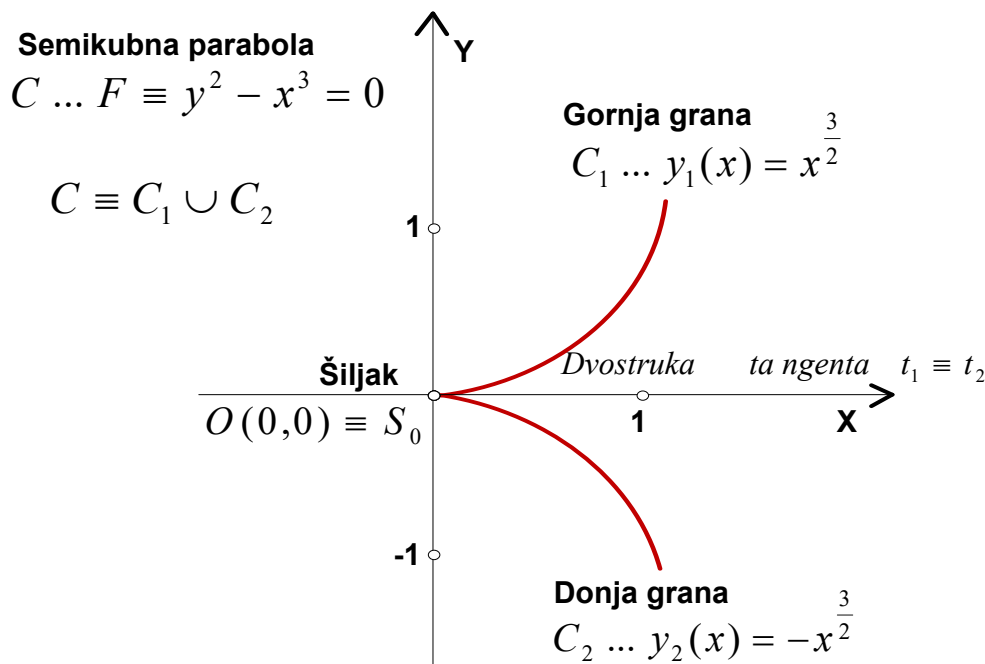
$$F_x \equiv 3x^2 = 0, F_y \equiv -2y = 0,$$

slijedi da je moguća singularna točka $O(0,0)$, jer leži na krivulji. Da li je to singularitet drugog reda? Da bi to ustanovili moramo naći druge parcijalne derivacije u toj točki. Lako nalazimo da je

$$F_{xx}^0 \equiv (6x)_0 = 0, F_{xy}^0 \equiv 0, F_{yy}^0 \equiv -2 \neq 0.$$

Vidimo, da je $\text{sgn}|F_{xx}^0| + \text{sgn}|F_{xy}^0| + \text{sgn}|F_{yy}^0| = 1 \neq 0$, dakle bar jedna derivacija drugog reda je različita od 0, pa to povlači, da se radi o singularitetu drugog reda. Budući je $(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 0$, a to sada znači da krivulja u singularnoj točki ima dvostruku tangentu. Nadalje, ona je simetrična s obzirom na os X , jer vrijedi (12), pa se radi o *šiljku*, tj. o prvome podslučaju. Iz (8) slijedi da su koeficijenti smjera $(k_0)_{1,2} = 0$, a to se vidi i na slici. Na toj slici smo graf naše krivulje razdvojili u dva grafa funkcija, koje se moraju definirati tako da grafovi budu disjunktni. Jedan način bi mogao biti ovaj:

$y_1(x): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, gdje je $y_1(x) = x^{\frac{3}{2}}$; $y_2(x): \langle 0, \infty) \rightarrow \langle 0, -\infty)$, gdje je $y_2(x) = -x^{\frac{3}{2}}$.



Slika 3.1.

Zadatak 3.2. Nađimo singularne točke i nacrtajmo graf krivulje (*Descartesov list*)

$$C \dots F \equiv x^3 + y^3 - 3axy = 0 \text{ (} a > 0 \text{)}. \tag{14}$$

Rješenje Z3.2. (Sl.3.2.) Iz (14) dobivamo jednađzbe

$$F_x \equiv 3x^2 - 3ay = 0, F_y \equiv 3y^2 - 3ax = 0. \quad (15)$$

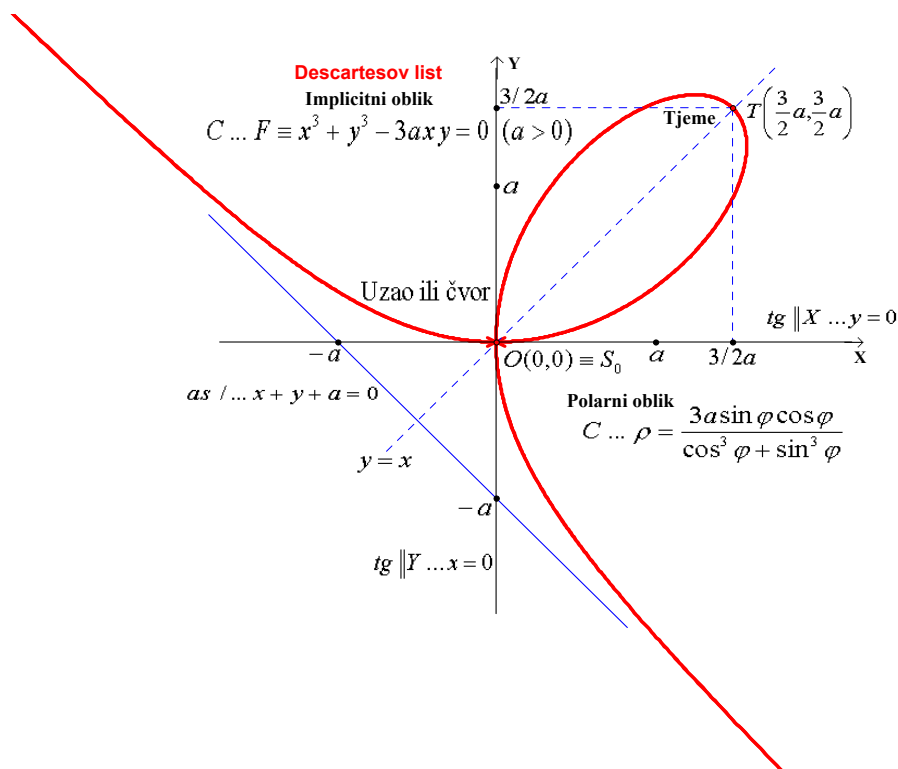
Taj sustav jednađzbi ima četiri rješenja, pa ćemo razmatrati ova dva dobivena realna rješenja $O(0,0)$ i $S_1(a, a)$, a preostala dva konjugirano kompleksna ne dolaze u obzir. No, rješenje $O(0,0)$ je na krivulji, tj. $O(0,0) \in \Gamma(C)$ a rješenje $S_1(a, a) \notin \Gamma(C)$, što se lagano provjeri, da koordinate tih točaka zadovoljavaju, odnosno ne zadovoljavaju, jednađzbu (14). Prema tome samo točka $O(0,0)$ je kandidat za singularnu točku. Sve derivacije drugog reda u toj točki su

$$F_{xx}^0 \equiv (6x)_0 = 0, F_{xy}^0 \equiv -3a \neq 0, F_{yy}^0 \equiv (6y)_0 = 0. \quad (16)$$

Budući, da je bar jedna vrijednost od tih derivacija različita od nule, to znači da se radi o singularitetu drugoga reda, pa nakon uvrštenja tih vrijednosti za diskriminantu dobivamo

$$(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 9a^2 > 0,$$

a to znači da u toj singularnoj točki postoje dvije različite realne tangente, dakle krivulja ima *uzao* ili *čvor*. Ako vrijednosti (16) uvrstimo u (7) dobivamo da je $(k_0)_1 = 0$, to znači da je jedna tangenta os X , dok iz iste veze dobivamo da je $(k_0)_2 = \infty$, a to znači da je druga tangenta os Y . Na slici se vidi, da se dobiveni rezultati uklapaju u graf krivulje.



Slika 3.2.

Recimo, da ćemo kasnije dati (u Z7.1.) metodu, kako se određuje kosa asimptota implicitne krivulje, pa i *Descartesovog lista*. Pokazat ćemo da je jednačba njegove asimptote $as/\dots x + y + a = 0$. Zanimljivo je napomenuti, da je površina petlje *Decartesovog lista* jednaka površini između krakova te krivulje i asimptote, te iznosi $3a^2/2$. Do toga rezultata možemo doći da krivulju prikažemo u polarnim koordinatama, dakle

$$C \dots \rho(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi) = 3a \sin \varphi \cos \varphi,$$

te je površina petlje

$$\begin{aligned} P(\text{int}C) &= 9a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi = 9a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{tg}^2 \varphi}{(\text{tg}^3 \varphi + 1)^2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \\ &= 9a^2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(t^3 + 1)^2} \\ &= 3a^2 \int_1^2 \frac{d(t^3+1)}{(t^3+1)^2} = 3a^2 \int_1^2 \frac{du}{u^2} = \dots = \frac{3}{2}a^2. \end{aligned}$$

Treba napomenuti, da je postupak nalaženja druge površine dosta kompliciraniji, jer bi trebali eksplicite izraziti ordinatu iz kanonske kubne jednačbe i riješavati nepravi integral.

Zadatak 3.3. Nađimo singularne točke i nacrtajmo graf krivulje

$$C \dots F \equiv (y - x^2)^2 - x^5 = 0.$$

Rješenje Z3.3. (Sl.3.3.) Ako riješimo sustav jednačbi

$$F_x \equiv 2(y - x^2)(-2x) - 5x^4 = 0, \quad F_y \equiv 2(y - x^2) = 0,$$

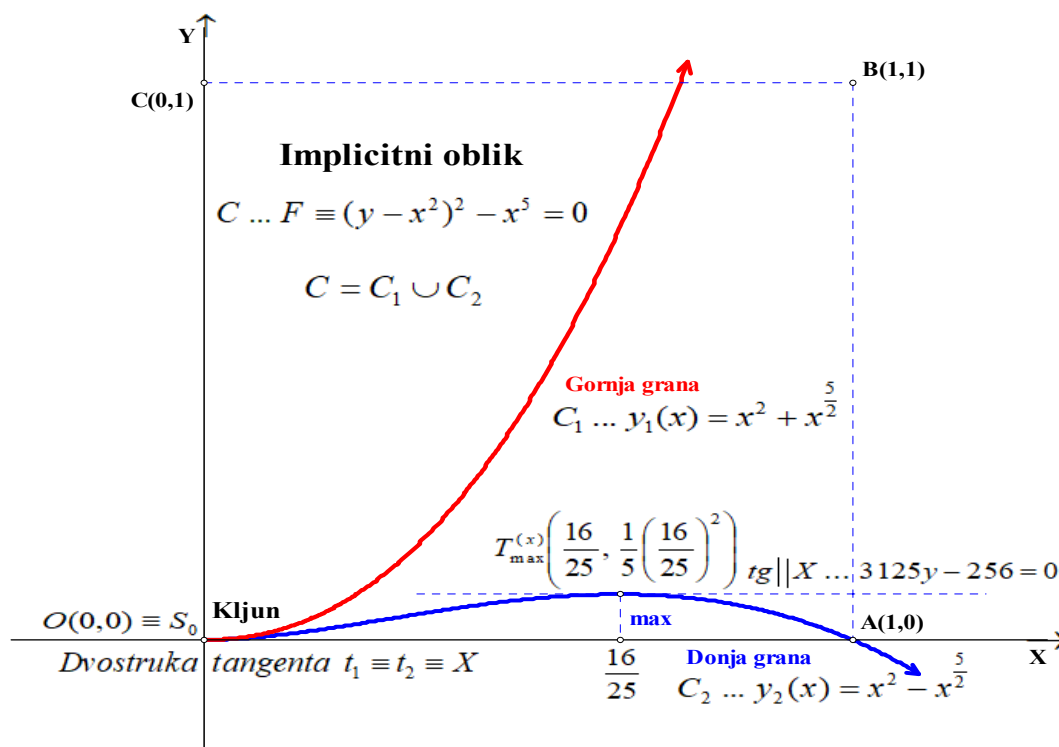
tada dobivamo, da je jedino realna točka $O(0,0)$, koja leži na krivulji, dakle ona je singularna točka te krivulje. Ona je singularitet drugog reda, jer je

$$\text{sng}|F_{xx}^0| + \text{sng}|F_{xy}^0| + \text{sng}|F_{yy}^0| = 1 \neq 0,$$

što smo dobili iz

$$F_{xx}^0 \equiv (-4y + 12x^2 - 20x^3)_0 = 0, \quad F_{xy}^0 \equiv (-4x)_0 = 0, \quad F_{yy}^0 \equiv 2 \neq 0.$$

Budući je $(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 0$, a to znači da krivulja ima dvostruku tangentu. Iz (7) slijedi da je $(k_0)_{1,2} = 0$, dakle tangenta u singularnoj točki je os X . Na osnovi dobivenih vrijednosti slijedi, da krivulja ima šiljak ili kljun ili samododir. Da se ustanovi o kojem se singularitetu radi treba ispitati kako se krivulja ponaša u okolini singularne točke.



Slika 3.3.

Odredimo domenu te krivulje. Napišimo je u obliku $(y - x^2)^2 = x^5$; $x^5 \geq 0$, a odatle je $x \geq 0$, dakle singularitet nije samododor. Prema tome ostala je mogućnost za šiljak ili kljun. Da li su obje grane krivulje s iste ili s različitih strana osi X , jer egzistira dvostruka tangenta?

Nadimo jednadžbe funkcija tih grana. Dakle, iz jednakosti $(y - x^2)^2 = x^5$ slijedi

$$(y - x^2 - x^{\frac{5}{2}})(y - x^2 + x^{\frac{5}{2}}) = 0,$$

pa su jednadžbe funkcija tih grana dane s:

$$(crvena\ grana) \ y_1(x) = x^2(1 + \sqrt{x}), \quad (plava\ grana) \ y_2(x) = x^2(1 - \sqrt{x}). \quad (17)$$

Kakvi su predznaci u okolini ishodišta? Iz zadnjih relacija vidimo, da u intervalu $(0,1)$ vrijedi $y_1 > 0$ i $y_2 > 0$, ali je $y_1 > y_2$, a to znači da se radi o kljunu, kako se vidi i na slici.

Iz (17) vidimo da grana $y_1(x)$ siječe os X u točki $O(0,0)$, a grana $y_2(x)$ tu os sječe u točkama $O(0,0)$ i $A(1,0)$, dakle grana $y_1(x)$ je iznad grane $y_2(x)$, pa se radi o kljunu, kao što se vidi na slici Sl.3.3. Napomenimo, da asimptota bilo koje vrste u ovome zadatku nema, što ćemo moći provjeriti, kada budemo detaljno raspravili o metodama nalaženje asimptota.

Nađimo ekstreme. Znamo, da je u ekstremnim točkama krivulje, lokalnom maksimumu i minimumu (a poneki put i u točki infleksije), tangenta $y = kx + l$ paralelna sa osi X , pa mora biti $k = -\frac{F_x}{F_y}$, $F_y \neq 0$, dakle rješenja sustava jednačžbi

$$F_x = 0, F_y = 0, (F_y \neq 0)$$

daju koordinate mogućih točki, čije su ordinate lokalni ekstremi krivulje. Jednostavnim računom slijedi, da jedna grana krivulje ima maksimum (Sl.3.3),

$$\left(y_2\left(\frac{16}{25}\right)\right)_{max} = \frac{1}{5}\left(\frac{16}{25}\right)^2.$$

I na kraju se može pokazati, da je površina između donje grane krivulje i osi X jednaka

$$P = \int_0^1 y_2(x) dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^{\frac{5}{2}}\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{7} = \frac{1}{21} \approx 0.04761 \approx 5\% \text{ (površine kvadrata } OABC).$$

Zadatak 3.4. Nađimo singularne točke i nacrtajmo graf krivulje *Descartesove krivulje*

$$C \dots x^4 - a^2(x^2 + y^2) = 0, (a > 0) \quad (18)$$

Rješenje Z3.4. (Sl.3.4.) Jasno je, da ne bi ništa dobili na općenitosti, ako bi uzeli da je $a \neq 0$, samo bi morali paziti na predznak toga parametra kod funkcijskih grana.

Iz (18) slijedi sustav jednačžbi

$$F_x \equiv 4x^3 - 2a^2x = 0, F_y \equiv -2a^2y = 0, \quad (19)$$

a odatle dobivamo točke $O(0,0)$, $S_{1,2}\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Lako se provjeri da $S_{1,2} \notin C$, dakle samo $O(0,0) \in C$ je singularna točka krivulje. Odredimo red singulariteta. Iz (19) dobivamo vrijednosti drugih derivacija u singularnoj točki;

$$F_{xx}^0 \equiv (12x^2 - 2a^2)_0 = -2a^2 \neq 0, F_{xy}^0 \equiv (0)_0 = 0, F_{yy}^0 \equiv (-2a^2)_0 \neq 0. \quad (20)$$

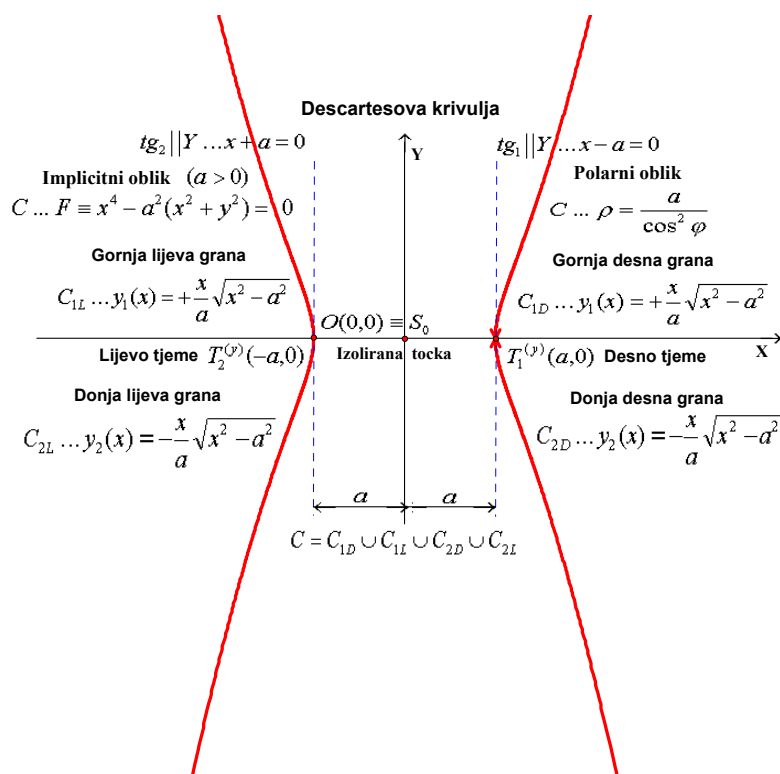
Dakle, to je singularitet drugog reda, jer je

$$\text{sgn}|F_{xx}^0| + \text{sgn}|F_{xy}^0| + \text{sgn}|F_{yy}^0| = 2 \neq 0.$$

Nadalje, iz (20) slijedi da je diskriminanta

$$(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = -4a^4 < 0,$$

dakle $O(0,0) \in C$ je izolirana točka.



Slika 3.4.

Krivulju (18) rastavljamo u četiri grane i jednu točku, naime funkcija

$$C_{1L} \cup C_{1D} \dots y_1(x) = +\frac{x}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

predstavlja grane iznad apscise, a funkcija

$$C_{2L} \cup C_{2D} \dots y_2(x) = -\frac{x}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

predstavlja grane ispod apscise. Nadalje, vidljivo je da su domene ovih funkcija identične do na krajeve intervala, pa je jedna mogućnost

$$D_1 = \langle -\infty, -a \rangle \cup \langle a, \infty \rangle, \quad D_2 = \langle -\infty, -a \rangle \cup [a, \infty).$$

No, domena krivulje (18) je

$$D_F = \langle -\infty, -a \rangle \cup [a, \infty) \cup \{0\}.$$

Sada se iz ove zadnje četiri relacije dobro vidi, da nismo ništa izgubili na općenitosti što smo uzeli da je $a > 0$. Budući za (18) vrijede svojstva (12) i (13), to znači da je njezin graf osno simetričan s obzirom na koordinatne osi, kao što se vidi i na slici.

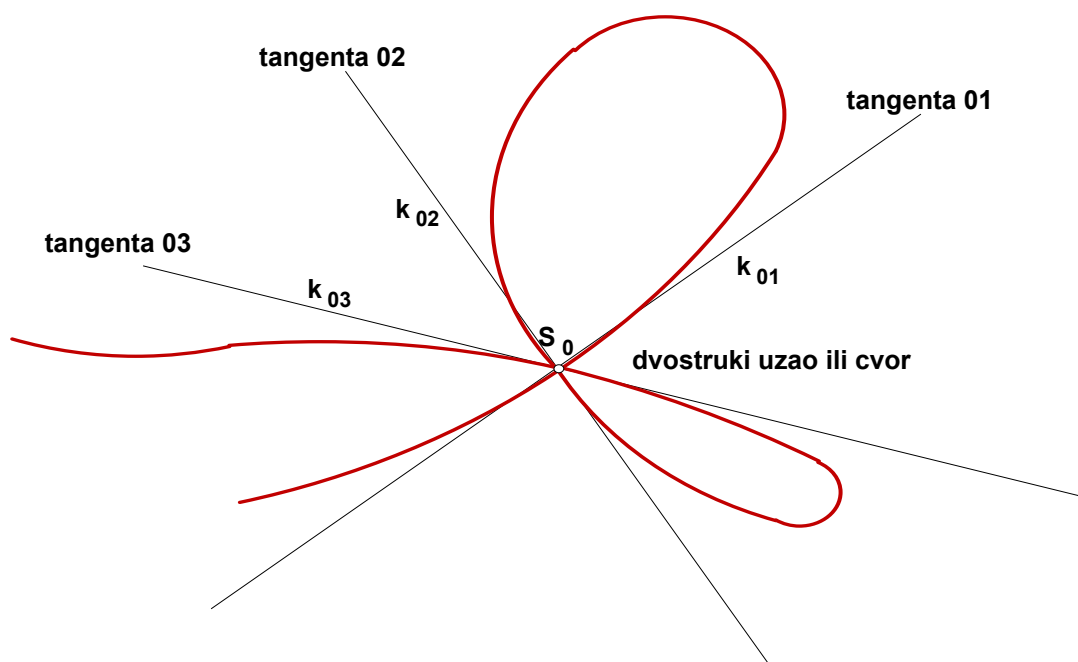
Može se pokazati, da promatrana krivulja nema ekstrema ni asimptota.

4. Osvrt na singularne točke trećeg i višeg reda

Što su to *singularne točke trećeg reda*? To su točke krivulje u kojima iščezavaju sve parcijalne derivacije prvog i drugog reda jednadžbe te krivulje, a barem jedna parcijalna derivacija trećeg reda u toj točki je različita od nule.

Neka je dana jednadžba krivulje $F(x, y) = 0$, i neka je $T_0(x_0, y_0)$ njezina singularna točka trećeg reda. Odaberimo još jednu točku $T_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ na toj krivulji, dakle mora biti $F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$. Jednadžbu te krivulje možemo razviti u Taylorov red. Iz uvjeta problema prva tri člana su jednaka 0, pa dalje imamo

$$\frac{1}{3!}(F_{xxx}^0 \Delta x^3 + 3F_{xxy}^0 \Delta x^2 \Delta y + 3F_{xyy}^0 \Delta x \Delta y^2 + F_{yyy}^0 \Delta y^3) + \frac{1}{4!}(F_{xxxx}^0 \Delta x^4 + 4F_{xxx}^0 \Delta x^3 \Delta y + 6F_{xxy}^0 \Delta x^2 \Delta y^2 + 4F_{xyy}^0 \Delta x \Delta y^3 + F_{yyy}^0 \Delta y^4) + \frac{1}{5!}(\dots) + \dots = 0. \quad (21)$$



Slika 4.1.

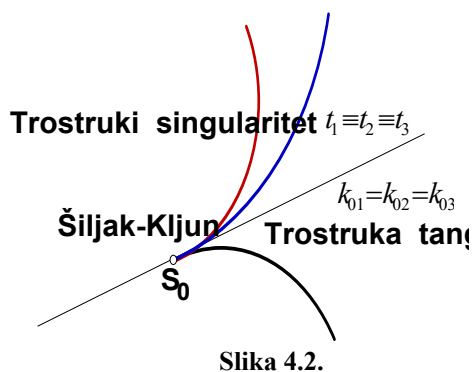
Ako (21) podijelimo s Δx^3 (svakako da je $\Delta x^m = (\Delta x)^m$, $\Delta y^n = (\Delta y)^n$, ...) i provedemo granični prijelaz $\Delta x \rightarrow 0$, a zbog neprekinutosti uvažimo implikaciju $(\Delta x \rightarrow 0) \Rightarrow (\Delta y \rightarrow 0)$, tada dobivamo kubnu jednadžbu

$$F_{yyy}^0 k_0^3 + 3F_{xyy}^0 k_0^2 + 3F_{xxy}^0 k_0 + F_{xxx}^0 = 0. \quad (22)$$

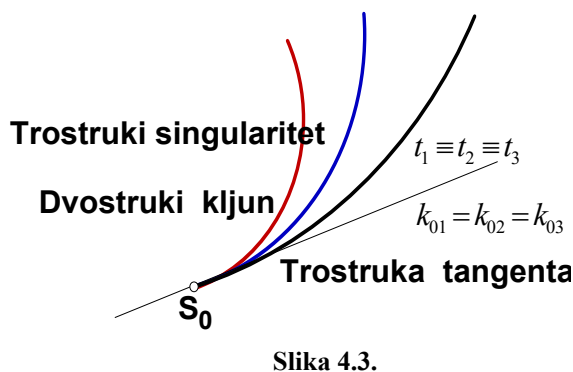
Jasno je, da smo kod ove transformacije uvažili, da je koeficijent smjera tangente dan s

$$k_0 = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Iz (22) slijedi, da će krivulja u singularnoj točki općenito imati tri tangente (Sl.4.1), ili trostruku (Sl. 4.2 i Sl.4.3),..., jer postoje tri koeficijenta smjera. No, ovim nisu nabrojani svi slučajevi singularnih točaka. Diskusija svih mogućih slučajeva ovoga tipa bila bi dosta složena, ali se može napraviti, jer se korijeni dobivene jednačbe mogu izraziti pomoću radikala.



Slika 4.2.



Slika 4.3.

Kod singulariteta četvrtog reda trebalo bi diskutirati jednačbu četvrtog stupnja

$$F_{yyyy}^0 k_0^4 + 4F_{xyyy}^0 k_0^3 + 6F_{xxyy}^0 k_0^3 + 4F_{xxxy}^0 k_0 + F_{xxxx}^0 = 0. \quad (23)$$

Diskusija i ove jednačbe je moguća, ali je općenito još kompliciranija od predhodnog slučaja. U singularnoj točki četvrtog reda barem jedna derivacija četvrtog reda je različita od nule, a sve nižega reda su jednake nuli. Po analogiji s predhodnim razmatranjima mogli bi zaključiti, kako bi oblici singulariteta i u ovom slučaju izgledali. Svakako, da sada imamo još više mogućnosti.

I na kraju ovoga osvrt recimo, da bi se analogno definirala i singularna točka n -tog reda ($n > 4$). To ja ona točka krivulje $F(x, y) = 0$, kod koje je barem jedna derivacija n -tog reda različita od nule, a sve derivacije nižega reda su jednake nuli. U ovome slučaju bi se pojavila jednačba

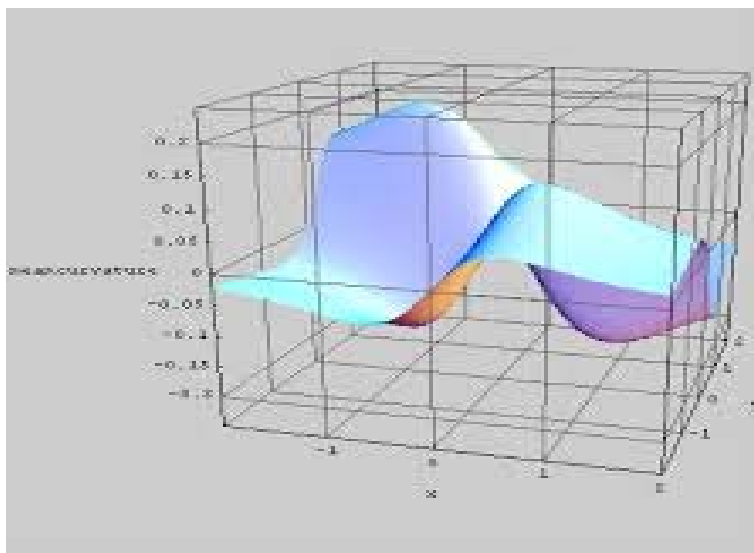
$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{\partial^n F^0}{\partial y^{n-i} \partial x^i} k_0^{n-i} = 0, \quad (24)$$

koju u općem obliku nije moguće diskutirati, jer se eksplicite ne mogu izraziti korijeni, već se analiziraju pojedini konkretni slučajevi.

Definicija 4.1. Funkciju $z = f(x, y)$ ćemo zvati *ploha „glatkih brežuljaka (izbočina) i udolina (udubina)“*, ako je derivabilna u svim točkama makar nad dijelom područja definicije koje analiziramo.

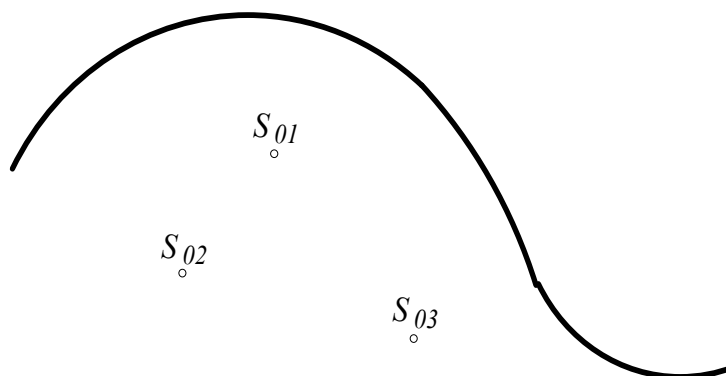
Napomena 4.1. Npr., neka ona ima dva „glatka brežuljka“ (mogli bi promatrati i „udoline“), kao na Sl.4.4., gdje je maksimalna vijednost („visina“) nižeg brežuljka z_{min} , a maksimalna visina višeg brežuljka je z_{max} , dakle $z_{max} > z_{min}$.

Sada ćemo interpretirati genezu izoliranih singulariteta na Sl.2.5. Naime, ako ploha na Sl.4.4. ima jednačbu $z = f(x, y)$ i ako je presječemo s ravninom, koja ima jednačbu $z = z_{min}$, tada dobivamo jednačbu krivulje $z_{min} = f(x, y)$, koju možemo u implicitnom obliku pisati u obliku $F(x, y) = 0$. Dakle, ovim razmatranjem nam je u potpunosti jasno, kako nastaje krivulja, koja ima jednu ili više grana, otvorenih ili zatvorenih, i jednu izoliranu točku. Još jednom ponovimo, da u toj izoliranoj točki nema realnih tangenti, a taj problem smo rješavali pomoću kvadratne jednačbe, čiji su koeficijenti parcijalne derivacije drugog reda.



Slika 4.4. (slika posuđena iz Wikipedije)

Idemo sada na interpretaciju poopćenog predhodnog slučaja. Naime, objasniti ćemo, kada se krivulja sastoji od jedne ili više otvorenih ili zatvorenih grana, ali njoj pripada više izoliranih singularnih točaka.



Slika 4.5.

1. slučaj. Neka postoji jedna izolirana singularna točka, dakle na Sl.4.5. neka je to S_{01} . Naime, za S_0 na Sl.2.5. smo rekli da je to izolirana singularna točka drugog reda, jer smo je dobili iz kvadratne jednačbe (11) uz uvjet (10), pa smo konstatirali, da krivulja u toj točki

nema relnih tangenti. No, može se desiti da postoji jedna izolirana točka trećeg reda u kojoj također nema relnih tangenti, a to zaključujemo iz jednačbe (22), jer ta jednačba može imati dva konjugirano kompleksna rješenja, pa bi time ovaj slučaj bio potvrđen. Svakako, da u ovome slučaju nije moguće da jednačba ima sva tri realna rješenja. Ako promotrimo (23), tada zaključujemo, da to može biti i singularna točka četvrtog reda, ali tada bi navedena jednačba imala samo dva realna rješenja. Jasno je, da ova točka može biti singularna točka petog reda, ako jednačba (24) ima tri realna rješenja i jedno konjugirano kompleksno. I sada vidimo, po kojem principu bi mogli generalizirati ovo razmatranje, ako se pojavljuje jedna singularna točka.

2. *slučaj*. Sada pretpostavimo, da na Sl.4.5. imamo dvije singularne točke, ali njihov singularitet može biti najmanje četvrtog reda, ili petog reda, ali da (24) ima točno jedno realno rješenje. Svakako, da je i ovdje jasno, kako bi iskazali opću analizu.

3. *slučaj*. Kada bi postojale tri izolirane singularne točke, tada bi (24) trebala biti jednačba makar šestog reda, i onda bi mogli analizirati sve moguće slučajeve, ali to bi bilo suvišno, jer je iz predhodne analize jasno kako bi se napravilo poopćenje.

Sliku 4.5. možemo interpretirati, ako pretpostavimo, da postoji ploha čija je jednačba $z = f(x, y)$ i da ima tri glatka brežuljaka, ali takova da sva tri imaju iste maksimalne visine, koje su manje od maksimalne visine onog četvrtog. Nadalje, po analogiji s prvim slučajem postavljamo tangencijalnu ravninu u vrhove ova tri brežuljaka i daljnju proceduru ne treba objašnjavati, jer je ona u potpunosti jasna. I konačno recimo, da je opća analiza ovih slučajeva teorijski moguća, ako je jednačba (24) najviše četvrtog stupnja, a ostali slučajevi se odnose na konkretne probleme, kako smo već rekli.

Zadatak 4.1. Pokažimo, da krivulja $C \dots F \equiv x^4 - x^2y + y^3 = 0$ ima singularitete trećeg reda.

Rješenje Z4.1. Rješenja sustava jednačbi

$$F_x \equiv 4x^3 - 2xy = 0, F_y \equiv -x^2 + 3y^2 = 0 \text{ su točke } O(0,0) \in C, T_{1,2} \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{6} \right) \notin C.$$

Dakle singularna točka je $O(0,0)$. Pokazat ćemo da nije singularitet drugog reda, jer su sve druge derivacije u toj točki jednake 0, a sve treće derivacije nisu jednake nulu, pa se radi o singularitetu trećeg reda. Naime, za druge derivacije imamo

$$F_{xx}^0 \equiv (12x^2 - 2y)_0 = 0, \quad F_{xy}^0 \equiv (-2x)_0 = 0, \quad F_{yy}^0 \equiv (6y)_0 = 0,$$

dok su treće derivacije

$$F_{xxx}^0 \equiv (24x)_0 = 0, \quad F_{xxy}^0 \equiv (-2)_0 = -2, \quad F_{xyy}^0 \equiv (0)_0 = 0, \quad F_{yyy}^0 \equiv (6)_0 = 6.$$

To znači da bi jednačba

$$F_{yyy}^0 k_0^3 + 3F_{xyy}^0 k_0^2 + 3F_{xxy}^0 k_0 + F_{xxx}^0 = 0$$

poprimila oblik $6k_0^3 - 2k_0 = 0$, čija su rješenja $k_{01} = 0$, $k_{02,03} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dakle, na osnovi ovih rezultata zaključujemo, da je singularitet čvor s tri tangente, gdje je jedna od njih os apscisa.

5. Fleksija, kružnica zakrivljenosti i infleksija implicitnih krivulja

Kod analiziranja i crtanja grafa implicitne krivulje veliku važnost ima njezina *fleksija* ili *zakrivljenost*. Naime, ako na krivulji odaberemo dvije točke, koje su međusobno dovoljno blizu i u njima postavimo tangente, koje zatvaraju kut čija je mjera $\Delta \alpha$, a duljina luka krivulje između tih točaka neka je Δs , tada definiramo fleksiju kao $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$. Kružnicu, koja se najviše priljubljuje uz krivulju u nekoj njezinoj točki, nazivamo *oskulaciona kružnica*, čija je recipročna vrijednost duljine njezinog polumjera R jednaka fleksiji. Veza između tih veličina je $K = 1/R$, a iz toga slijedi, da je zakrivljenost veća što je duljina polumjera manja i obratno. Vidimo, da se definicija dobro uklapa, kada je u pitanju i pravac, jer u bilo kojoj točki na pravcu nema zakrivljenosti, a to znači da je $K = 0$, pa je $R = \infty$. Možemo pokazati, da iz ove definicije zakrivljenosti slijedi, da ona može biti pozitivna ili negativna, a to slijedi iz pozicije točke, da li je ona na konkavnom ili konveksnom dijelu krivulje prema apscisnoj osi. Ako nam to svojstvo nije važno, tada ćemo uzimati apsolutnu vrijednost zakrivljenosti, jer je onda duljina polumjera zakrivljenosti uvijek pozitivan. I konačno naglasimo, da je fleksija krivulje invarijantna s obzirom na transformacije koordinatnog sustava, što i nije baš vidljivo.

U matematičkoj analizi i diferencijalnoj geometriji smo pokazali, da je fleksija krivulje $C \dots y = y(x)$, koja je funkcija, dana relacijom

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|, \quad (25)$$

gdje je $y' = \frac{dy}{dx} = y'_x$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = y''_x$.

Ako je krivulja dana u parametarskom obliku, dakle $C \dots x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$; tada se dobije da je fleksija

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{\begin{vmatrix} x'_t & y'_t \\ x''_t & y''_t \end{vmatrix}}{(x'^2_t + y'^2_t)^{\frac{3}{2}}} \right|, \quad (26)$$

gdje je

$$x'_t = \frac{dx}{dt}, \quad x''_t = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y'_t = \frac{dy}{dt}, \quad y''_t = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Dakle i tu uzimamo, da je fleksija $K \geq 0$. Budući se bavimo krivuljama u implicitnom obliku, onda nam je potrebno znati kako izračunati fleksiju za taj oblik, a to je iskazano u slijedećem teoremu.

Teorem 5.1. Ako je ravninska krivulja zadana u implicitnom obliku, dakle $C \dots F(x, y) = 0$, tada trebamo dokazati, da je fleksija te krivulje dana s formulom

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (27)$$

Dokaz T5.1. Ako $F(x, y) = 0$ kraće pišemo $F = 0$, tada je odatle

$$F_x + y'F_y = 0, \quad (28)$$

dakle je (koeficijent smjera tangente u točki krivulje)

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}. \quad (29)$$

Ako (28) deriviramo po x , tada dobivamo

$$F_{xx} + F_{xy}y' + F_{xy}y' + F_{xy}(y')^2 = 0,$$

a ako tu uvrstimo (29) slijedi

$$\begin{aligned} F_y^3 y'' &= -F_{xx}F_y^2 + F_x F_y F_{xy} + F_x F_y F_{xy} - F_x^2 F_{yy} \\ &= F_{xx}(-F_y^2) - F_{xy}(-F_x F_y) + F_x(F_y F_{xy} - F_{yy} F_x) \\ &= F_{xx} \begin{vmatrix} F_{yy} & F_y \\ F_y & 0 \end{vmatrix} - F_{xy} \begin{vmatrix} F_{yx} & F_y \\ F_x & 0 \end{vmatrix} + F_x \begin{vmatrix} F_{yx} & F_{yy} \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ili pomoću determinante

$$y'' = \frac{1}{F_y^3} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}. \quad (30)$$

I konačno, ako (29) i (30) uvrstimo u (25) slijedi (27), što je i trebalo pokazati ■

Neki put, npr. kod računanja površine petlje, je potrebno znati implicitnu krivulju prikazati u polarnim koordinatama, onda je dobro, da u tim koordinatama znamo izračunati i njezinu zakrivljenost, a to je napravljeno u T5.2.

Teorem 5.2. Ako je ravninska krivulja zadana u polarnim koordinatama, dakle

$$C \dots \rho = \rho(\varphi),$$

treba dokazati da je fleksija te krivulje dana s formulom

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left| \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' \right|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (31)$$

Dokaz T5.2. Neka su polarne i Kartezijeve koordinate u pridruženom položaju, tako da su pol i ishodište u istoj točki, a polarna os se podudara s pozitivnom apscisnom poluosi, to znači da vrijede jednakosti

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi, y = \rho(\varphi)\sin\varphi \text{ ili kraće } x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi. \quad (32)$$

Prva derivacija po parametru φ relacija (32) je;

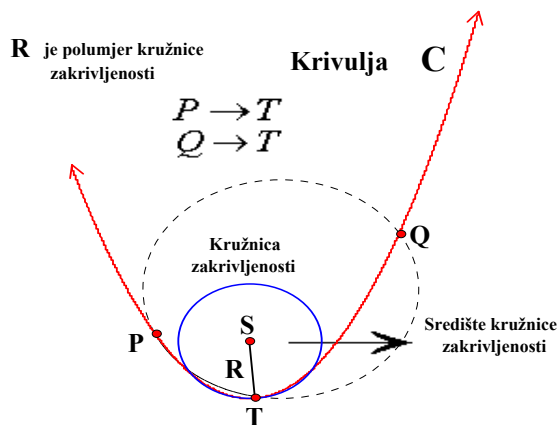
$$x'_\varphi = \rho' \cos\varphi - \rho \sin\varphi, y'_\varphi = \rho' \sin\varphi + \rho \cos\varphi. \quad (33)$$

Ako po istom parametru deriviramo (33), tada slijede druge derivacije relacija (32);

$$x''_\varphi = \rho'' \cos\varphi - \rho' \sin\varphi - \rho' \sin\varphi - \rho \cos\varphi, y''_\varphi = \rho'' \sin\varphi + \rho' \cos\varphi + \rho' \cos\varphi - \rho \sin\varphi. \quad (34)$$

Nakon uvrštenja relacija (33) i (34) u (26) dobivamo (31), što je i trebalo dokazati ■

Sada ćemo se pozabaviti kružnicom zakrivljenosti i njezinim središtem. Naime, kružnicom zakrivljenosti u točki T krivulje C , dakle $T \in C$, nazivamo granični položaj kružnice koja prolazi točkom T i dvije bliske točke $P, Q \in C$, kada $P, Q \rightarrow T$ (Sl.5.1). Fleksija se računa po formulama (25), (26), (27) i (31).



Slika 5.1.

Točka S je središte oskulacione kružnice za točku $T \in C$ i ono se nalazi na okomici krivulje u smjeru njene konkavnosti. Koordinate središta kružnice zakrivljenosti $S(x_s, y_s)$ mogu se naći pomoću sljedećih formula (Sl.5.2);

$$x_s = x - R\cos\alpha, y_s = y + R\sin\alpha.$$

Budući je

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+y_x'^2}}, \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{y_x'}{\sqrt{1+y_x'^2}} \text{ i } R = \frac{1}{K},$$

tada dobivamo da je

$$x_s = x - \frac{1}{K\sqrt{1+y_x'^2}}, y = y + \frac{y_x'}{K\sqrt{1+y_x'^2}}.$$

Prema tome te jednakosti predstavljaju koordinate središta kružnice zakrivljenosti u općem obliku. Sada ćemo napraviti specijalizacije tih formula za pojedine oblike zapisa krivulje C .

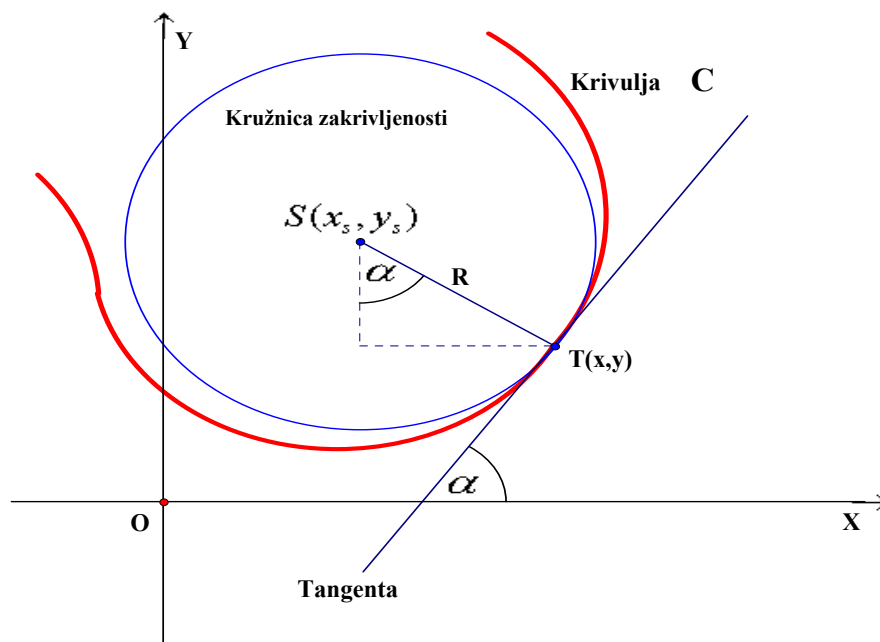
Ako je dana krivulja $C \dots y = y(x)$ (eksplicitni oblik), tada su koordinate središta (Sl.5.2.) njoj pripadajuće kružnice zakrivljenosti dane formulama;

$$x_s = x - \frac{y'_x(1+y_x'^2)}{y_x''}, \quad y_s = y + \frac{1+y_x'^2}{y_x''}. \quad (34a)$$

Ako je dana krivulja $C \dots x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ (parametarski oblik), tada su koordinate središta njoj pripadajuće kružnice zakrivljenosti dane formulama;

$$x_s = x - \frac{y'_t(x_t'^2 + y_t'^2)}{\begin{vmatrix} x_t'' & y_t'' \\ x_t' & y_t' \end{vmatrix}}, \quad y_s = y + \frac{x'_t(x_t'^2 + y_t'^2)}{\begin{vmatrix} x_t'' & y_t'' \\ x_t' & y_t' \end{vmatrix}}. \quad (34b)$$

Ovi oblici, eksplicitni i parametarski, su nam neki puta potrebni, ali formule za polarni i implicitni oblik ćemo formulirati u obliku teorema, do čijega dokaza se jednostavno dolazi primjenom predhodnog gradiva.



Slika 5.2.

Teorem 5.3. Ako je dana krivulja $C \dots \rho = \rho(\varphi)$ (polarni oblik), tada su koordinate središta njoj pripadajuće kružnice zakrivljenosti dane formulama;

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \rho \cos \varphi - \frac{(\rho^2 + \rho'^2)(\rho \cos \varphi + \rho' \sin \varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \\ y_s &= \rho \sin \varphi - \frac{(\rho^2 + \rho'^2)(\rho \sin \varphi - \rho' \cos \varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \end{aligned} \right\} \quad (34c)$$

Teorem 5.4. Ako je dana krivulja $C \dots F(x, y) = 0$ (implicitni oblik), tada su koordinate središta njoj pripadajuće kružnice zakrivljenosti dane formulama:

$$x_s = x + \frac{F_x(F_x^2 + F_y^2)}{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}, \quad y_s = y - \frac{F_y(F_x^2 + F_y^2)}{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}. \quad (35)$$

Sada nam je još ostalo, da se pozabavimo tačkama infleksije, koje su važne u analizi grafa krivulje, jer one predstavljaju tačke u kojima krivulja iz konkavnog dijela prijelazi na konveksni ili obratno. Svakako da ćemo i sada ići postepeno, tj. najprije ćemo promotriti eksplicitni i parametarski oblik, a onda ćemo ići na polarni i implicitni oblik.

Iz ove napomene o infleksiji slijedi, da tangenta na zadanu krivulju u toj tački ustvari presjeca krivulju, dakle ona ne leži samo s jedne strane tangente. U tački infleksije zakrivljenost je $K = 0$, a duljina polumjera zakrivljenosti je $R = \infty$. Iz (25) slijedi da je za tačku infleksije nužan uvjet $y''(x) = 0$, ako je krivulja zadana u eksplicitnom obliku. Da nađemo tačku infleksije moramo riješiti jednađbu $y''(x) = 0$, čija su rješenja apscise mogućih tačaka infleksije. Ako su rješenja te jednađbe x_1, x_2, \dots (može ih biti i beskonačno, ali to je samo u slučaju onda ako se radi o transcendentnoj krivulji), ako je npr. $y'''(x_1) \neq 0$, onda je x_1 apscisa tačke infleksije; ako je $y'''(x_1) = 0$ i $y^{IV}(x_1) \neq 0$, onda x_1 nije apscisa tačke infleksije itd. Naime, postojanje tačke infleksije zavisi o tome koja je od uzastopnih derivacija, parnog ili neparnog reda, prva različita od nula za promatranu apscisu, te će tačka s tom apscisom biti infleksija ili ne. Nadalje, ako promatrana apscisa nije apscisa infleksije (prva derivacija koja nije jednaka nuli, je derivacija k -tog reda, ako je k paran), onda je krivulja s konveksnom stranom okrenuta prema gore za $y^{(k)}(x_i) < 0$ ili prema dolje ako je $y^{(k)}(x_i) > 0$.

Drugi način za određivanje apscise tačke infleksije je taj, da izravno ispitujemo izmjenu predznaka druge derivacije za tu vrijednost apscise, ako se predznak $y''(x)$ mijenja u protivni, onda se smjer konkavnosti također mijenja u protivni, pa postoji tačka infleksije. Treba napomenuti, da se ta metoda može primjeniti i onda kada je $y^{(k)}(x_i) = \infty$.

Sada ćemo dati *nužne uvjete za infleksiju krivulje*, kada je ona prikazana u svim oblicima, iako je nama najvažniji implicitni;

$$(\text{infleksija } T(x_i, y(x_i)) \in C \dots y = y(x)) \Rightarrow (y''(x_i) = 0),$$

$$(\text{infleksija } T(x_i(t_i), y(t_i)) \in C \dots x = x(t), y = y(t)) \Rightarrow \left(\begin{vmatrix} x'_t(t_i) & y'_t(t_i) \\ x''_t(t_i) & y''_t(t_i) \end{vmatrix} \right),$$

$$(\text{infleksija } T(\varphi_i, \rho(\varphi_i)) \in C \dots \rho = \rho(\varphi)) \Rightarrow (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0),$$

$$(\text{infleksija } T(x_i, y(x_i)) \in C \dots F(x, y) = 0) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} F_{xx}(x_i, y_i) & F_{xy}(x_i, y_i) & F_x(x_i, y_i) \\ F_{yx}(x_i, y_i) & F_{yy}(x_i, y_i) & F_y(x_i, y_i) \\ F_x(x_i, y_i) & F_y(x_i, y_i) & 0 \end{array} \right) = 0 \quad (35)$$

Zadatak 5.1. Dokažimo, da hiperbola

$$C \dots b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \quad (36)$$

nema točke infleksije.

Rješenje Z5.1. Iz (36) slijedi

$$F_x \equiv 2b^2x, \quad F_y \equiv -2a^2y, \quad F_{xx} \equiv 2b^2, \quad F_{xy} \equiv 0, \quad F_{yy} \equiv -2a^2.$$

Ako te vrijednosti uvrstimo u konzekventu od (5.21) tada imamo

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2b^2 & 0 & 2b^2x \\ 0 & -2a^2 & -2a^2y \\ 2b^2x & -2a^2y & 0 \end{vmatrix} = 8a^2b^4x^2 - 8a^4b^2x^2 = 8a^4b^4 \neq 0,$$

dakle infleksija ne postoji, jer nije ispunjen nužni uvjet za to.

Zadatak 5.2. Dokažimo, da je za polarnu (transcedentnu) krivulju

$$C \dots \rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$$

točka infleksije određena s polarnim kutom $\varphi = 1/2$.

Rješenje Z5.2.

$$\rho^2 + 2\rho\varphi'^2 - \rho\rho\varphi'' = \varphi^{-1} + 2\left(-\frac{1}{2}\varphi^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - \varphi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{4}\varphi^{-\frac{5}{2}}\right) = \frac{1}{4\varphi^3}(4\varphi^2 - 1) = 0,$$

a to je za $\varphi = \frac{1}{2}$ ($\varphi = -1/2$ ne dolazi u obzir), što je i trebalo dokazati.

Zadatak 5.3. Dokažimo da Bernoullijeva leminskata (kasnije ćemo detaljno obraditi njezin graf; Sl.7.16)

$$C \dots F \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 \quad (37)$$

ima infleksiju u ishodištu $O(0,0)$.

Rješenje Z5.3. Iz (37) slijedi

$$F_x = 4x^3 + 4xy^2 - 4a^2x, \quad F_y = 4x^2y + 4y^3 + 4a^2y,$$

$$F_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 4a^2, \quad F_{xy} = 8xy, \quad F_{yy} = 4x^2 + 12 + 4a^2,$$

a ako te vrijednosti supstituiramo u (35) dobivamo jednadžbu

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (38)$$

koju bi trebali riješiti, što baš i nije jednostavno. No, pogledamo li Sl.7.16., tada vidimo da je ishodište $O(0,0)$ singularna točka, što ćemo kasnije i pokazati, a ujedno je i dvostruka točka infleksije. Naime, kada bi koordinate te točke supstituirali u (38), tada bi dobili da je

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dakle ispunjen je uvjet nužnosti. Dovoljnost dobijemo tako, da izravno ispitujemo promjenu predznaka druge derivacije za tu vrijednost apscise; ako se predznak od $y''(x)$, prikazan u obliku (31), mijenja u protivni, onda se smjer konkavnosti također mijenja u protivni, pa postoji točka infleksije, s time da pazimo po kojoj grani leminskate provjeravamo predznak. Svakako, da tu analizu možemo lako napraviti, jer graf te krivulje možemo prikazati kao uniju grafova dviju funkcija

$$y_{1,2}(x) = \pm \sqrt{2\sqrt{2x^2 + 1} - (x^2 + 1)}.$$

Jasno je, da moramo paziti na pridjeljivanje krajeva intervala domene.

6. Vertikalne i horizontalne asimptote implicitne krivulje

Najprije ćemo napomenuti, kako se nalaze vertikalne i horizontalne asimptote, koje se odnose na graf funkcije, koja je zadana u eksplicitnom obliku $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, čija je domena D i kodomena K . Naime, ako su x_1, x_2, \dots, x_m rješenja jednadžbe $g(x) = 0$, ali niti jedno od njih nije rješenje jednadžbe $f(x) = 0$, tada su pravci $x - x_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$) vertikalne asimptote dane krivulje. Svakako, da $x_1, x_2, \dots, x_m \notin D$.

Nadalje, jasno je da funkcija može imati najviše dvije horizontalne asimptote, jer da nije tako, tada bi postojao vertikalni pravac koji bi je na nekom intervalu presjecao u tri ili više točaka, a to je kontradiktorno definiciji funkcije. Dakle, ako je $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = y_1$, i ako je

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = y_2$, tada su $y - y_1 = 0$, $y - y_2 = 0$ jednadžbe horizontalnih asimptota. No, ako

je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = y_{01}$, tada postoji jedna horizontalna asimptota, čija je jednadžba $y - y_{01} = 0$. Na osnovi iznesenog je jasno, da u prvom slučaju $y_1, y_2 \notin K$ a u drugom slučaju $y_{01} \notin K$.

Sada ćemo iznijeti metode, kako odrediti asimptote paralelne s koordinatnim osima za implicitne krivulje. Tih asimptota može biti konačni broj. Nakon toga ćemo se pozabaviti i kosim asimptotama.

Dakle, neka je dana krivulja u implicitnom obliku

$$C \dots F(x, y) = 0. \quad (39)$$

Počnimo s asimptotama, koje su paralelne sa osi Y . U tu svrhu poredajmo članove od (39) po padajućim potencijama od y , dakle dolazimo do relacije

$$\varphi_0(x)y^n + \varphi_1(x)y^{n-1} + \varphi_2(x)y^{n-2} + \dots + \varphi_{n-1}(x)y + \varphi_n(x) = 0. \quad (40)$$

Ako (40) podijelimo s y^n i načinimo granični prijelaz $y \rightarrow \infty$, tada $x \rightarrow x_0$, pa dobivamo jednadžbu

$$\varphi_0(x_0) = 0. \quad (41)$$

Neka su x_{0p} ($p = 1, 2, \dots, q$) sva realna rješenja ove jednadžbe, tada nam ona daju jednadžbe pravaca koji su paralelni sa osi Y , odnosno jednadžbe traženih asimptota, u obliku

$$as \parallel Y \dots x - x_{0p} = 0.$$

Nađimo sada asimptote, koje su paralelne sa osi X . U tu svrhu poredajmo sve članove (39) po padajućim potencijama od x , dakle dolazimo do relacije

$$\psi_0(y)x^m + \psi_1(y)x^{m-1} + \psi_2(y)x^{m-2} + \dots + \psi_{m-1}(y)x + \psi_m(y) = 0. \quad (42)$$

Ako (42) podijelimo s x^m , i načinimo granični prijelaz $x \rightarrow \infty$, tada $y \rightarrow y_0$, pa dobivamo jednadžbu

$$\psi_0(y_0) = 0.$$

Neka su y_{0r} ($r = 1, 2, \dots, s$) sva realna rješenja ove jednadžbe, tada nam ona daju jednadžbe pravaca koji su paralelni sa osi X , odnosno jednadžbe traženih asimptota, u obliku

$$as \parallel X \dots y - y_{0r} = 0.$$

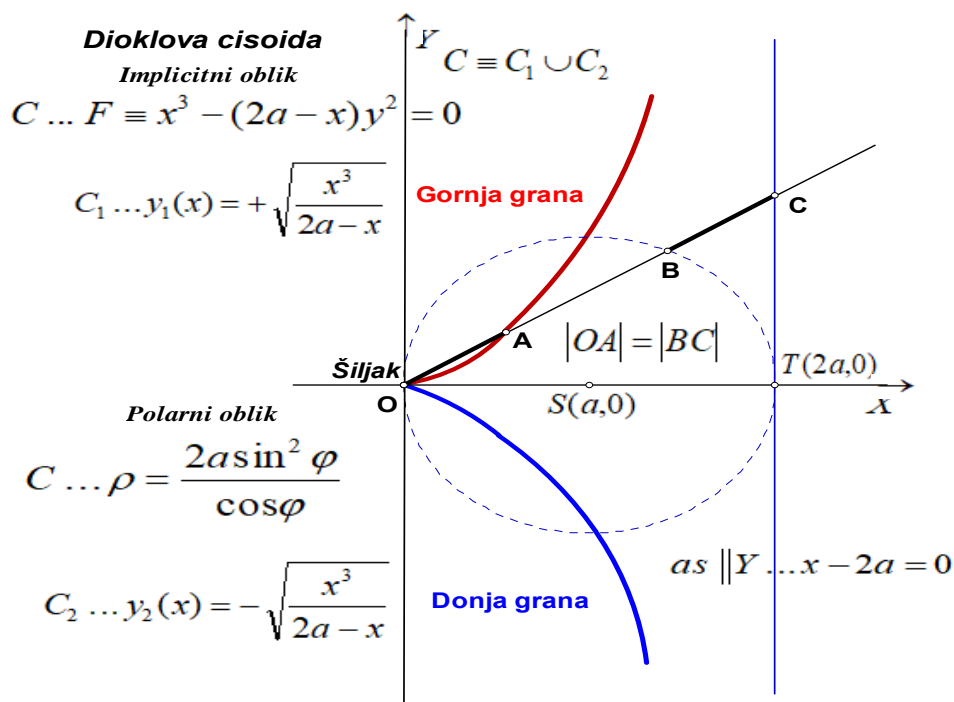
Zadatak 6.1. Odredimo okomite i paralelne asimptote, te nacrtajmo graf *Dioklove cisoide*, koja je dana u obliku

$$C \dots x^3 - y^2(2a - x) = 0 \quad (a > 0).$$

Rješenje Z6.1. (Sl.6.1.) Ako članove jednadžbe poredamo po padajućim potencijama o y , slijedi veza $(2a - x)y^2 - x^3 = 0$. Nakon diobe s y^2 i graničnog prijelaza $y \rightarrow \infty$ dobivamo da je $\varphi_0(x_0) \equiv 2a - x_0 = 0$, dakle $x_0 = 2a$, pa asimptota paralelna sa osi Y glasi

$$as \parallel Y \dots x - 2a = 0.$$

Evidentno je, da nema asimptota paralelnih s apscicom, jer nakon sortiranja članova jednadžbe po padajućim potencijama od x dobivamo da je $\psi_0(y_0) \equiv 1 \neq 0$.



Slika 6.1.

Pokažimo, da ta krivulja u ishodištu ima šiljak, jer iz sustava jednačbi

$$F_x \equiv 3x^2 + y^2 = 0, \quad F_y \equiv 2xy - 4ax = 0;$$

dobivamo komponente rješenja $x = 0, y = 0$. Budući su druge derivacije za te vrijednosti;

$$F_{xx}^0 = 0, F_{xy}^0 = 0, \quad F_{yy}^0 = -4a \neq 0,$$

a jedna je različita od 0, tada je

$$(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 0, \quad ,$$

a to znači da krivulja u singularnoj točki ima dvostruku tangentu. Nadalje, ona je simetrična s obzirom na os X , jer vrijedi (12), dakle radi se o *šiljku*, tj. o prvome podslučaju.

Na Sl.6.1. je pokazano, da se graf krivulje razdvoio na dva grafa funkcija. Crvena grana je graf funkcije $C_1 \dots y_1(x): [0, 2a) \rightarrow [0, \infty)$, gdje je $y_1(x) = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$; dok je donja plava grana graf funkcije $C_2 \dots y_2(x): \langle 0, 2a) \rightarrow [0, -\infty)$ gdje je $y_2(x) = -\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$.

Recimo i to, da se iz slike vidi kako bi glasila definicija *Dioklove cisoida* u smislu konstruktivne geometrije.

Zadatak 6.2. Odredimo okomite i paralelne asimptote, te skicirajmo graf *Nikomedove konhoide* (Sl.6.2., Sl.6.3., Sl.6.4.), koja je dana u obliku

$$C \dots x^2y^2 - (y + a)^2(b^2 - y^2) = 0, \quad (a, b > 0). \quad (43)$$

Rješenje Z6.2. Ako članove jednačbe poredamo po padajućim potencijama o y , slijedi relacija

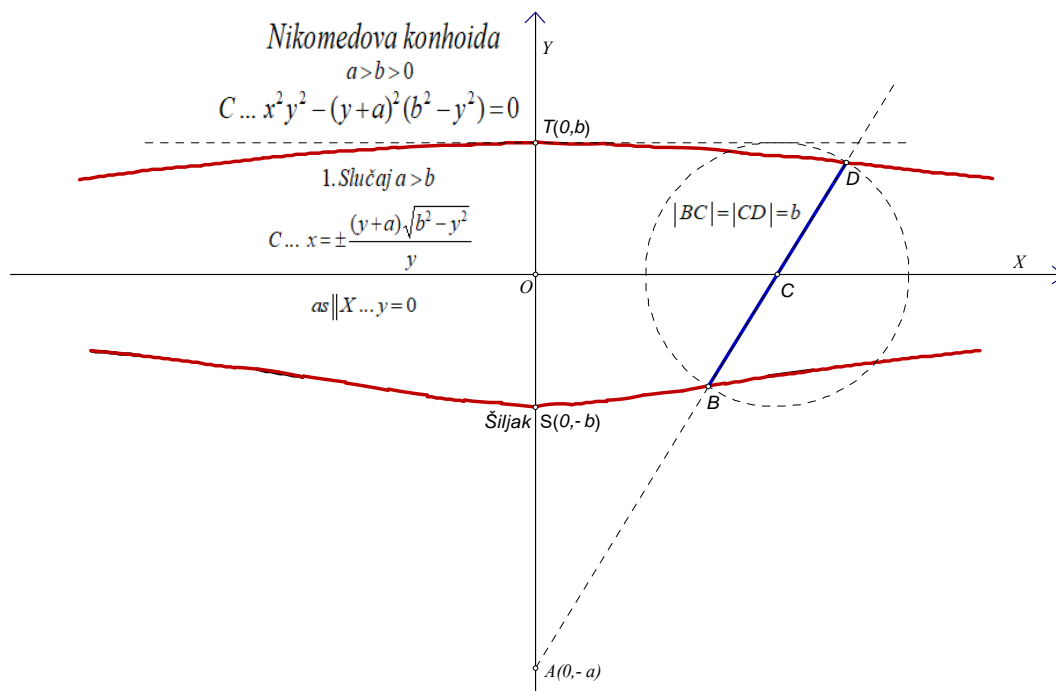
$$y^4 + 2ay^3 + (a^2 - b^2 + x^2)y^2 - 2ab^2y - a^2b^2 = 0, \quad (43a)$$

tada nakon diobe s y^4 i graničnog prijelaza $y \rightarrow \infty$ dobijemo da je $\varphi_0(x_0) \equiv 1 \neq 0$, a to znači da ne postoje asimptote paralelne sa osi Y .

Da bi dobili slike *Nikomedove konhoide* moramo razlikovati tri slučaja odnosa između parametara a i b .

1. Slučaj $a > b > 0$ (Sl. 6.2).

$$C \dots x^2y^2 - (y + a)^2(b^2 - y^2) = 0.$$



Slika 6.2

Nadalje, ako tražimo asimptotu paralelnu s apscisnom osi, iz (43) vidimo da je $\psi_0(y_0) \equiv y_0^2 = 0$, dakle $y_0 = 0$, a to znači da je sama apscisna os asimptota dane krivulje, tj.

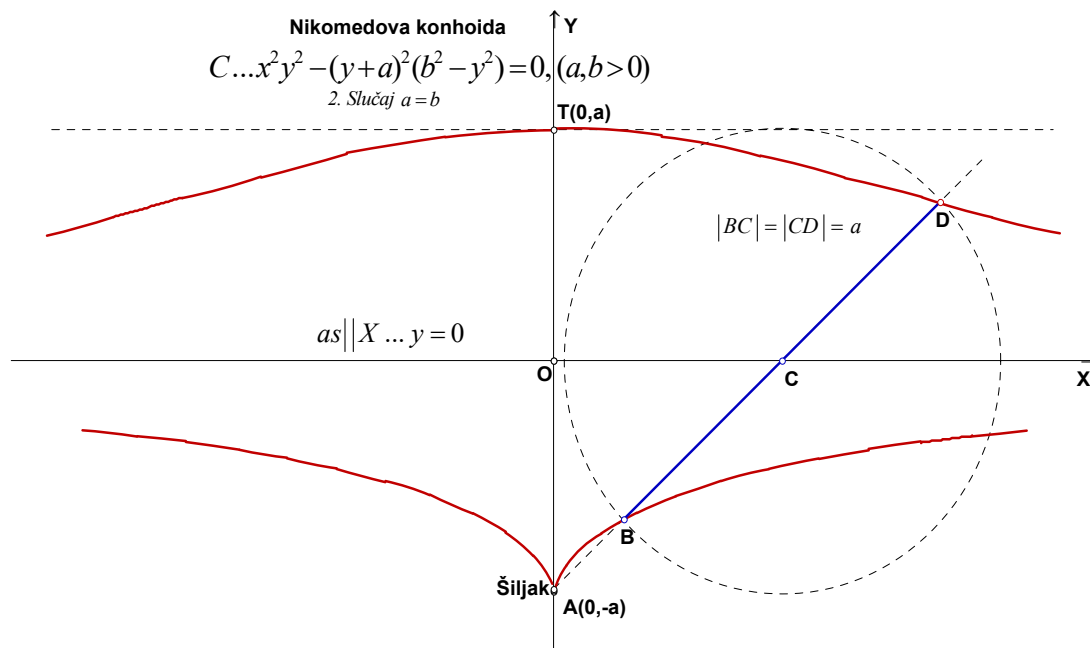
$$as || X \dots y = 0.$$

Jasno je, da gledajući teorijski, možemo iz (43a) eksplicite dobiti četiri funkcije $y_{1,2,3,4}(x)$, ali bi tada njihov prikaz bio vrlo kompliciran. No, iz (43) bi mogli eksplicite dobiti dvije relativno jednostavne funkcije sa zamjenjenim varijablama u obliku

$$C \dots x_{1,2}(y) = \pm \frac{(y+a)\sqrt{b^2-y^2}}{y},$$

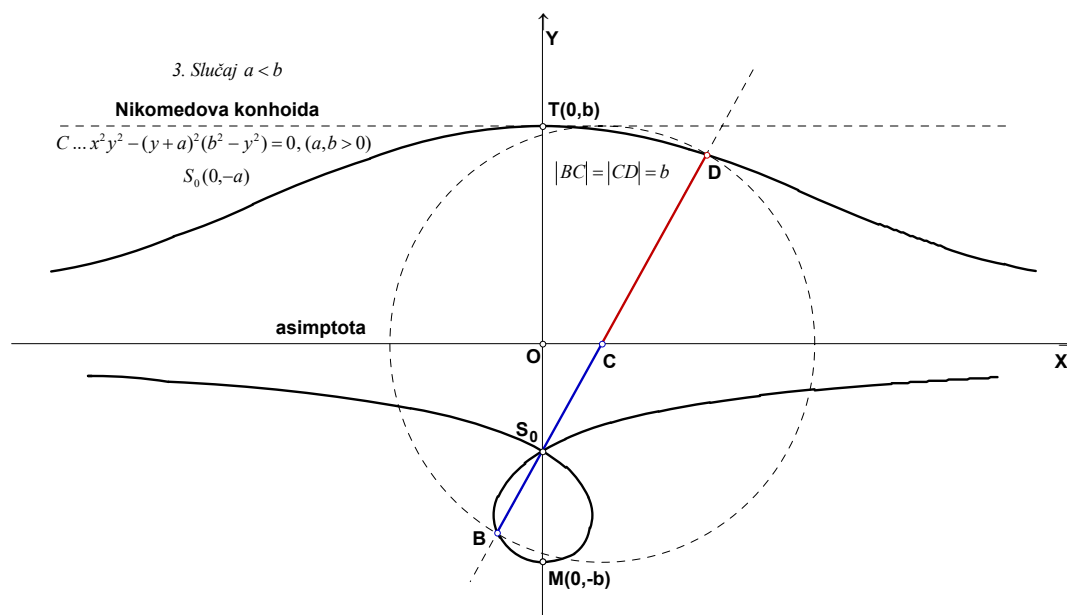
dakle sada bi varirali varijablu y a izračunavali varijablu x . U ovome slučaju maksimalna vrijednost funkcije je u točki $T(0, a)$, a minimalna u točki $S(0, -a)$, koja je i singularna točka sa šiljkom. Već smo rekli, da postoji samo horizontalna asimptota, a to je sama os X .

2. Slučaj $a = b > 0$ (Sl. 6.3).



Slika 6.3.

Ovdje je slično stanje, kao i u predhodnom slučaju, samo je sada $|AO| = |OT| = a = b$



Slika 6.4.

3. Slučaj $0 < a < b$ (Sl. 6.4).

Ovaj slučaj je najzanimljiviji, jer se u singularnoj točki $S_0(0, -a)$ pojavljuje uzao ili čvor. Do toga možemo doći na već opisani način. Iz jednačbe i iz grafa se vidi, da se ovdje radi o algebarkoj krivulji četvrtog reda. I u ovome slučaju postoji samo jedna asimptota, a to je također os X .

Na osnovi iskazanog o *Nikomedovoj konhoidi* možemo zaključiti, da od četiri funkcije $y_{1,2,3,4}(x)$, nakon eksplicitnog prikaza iz (43a), u prva dva slučaja bi dobili samo dvije realne funkcije (Sl.6.2.; Sl.6.3.), a u trećem slučaju bi dobili četiri relne funkcije (Sl.6.4.). Svakako, da bi trebalo dosta vremena za detaljnu analizu svih slučajeva u smislu matematičke analize, a jasno je i to kako bih iskazali tu krivulju i u smislu konstruktivne geometrije.

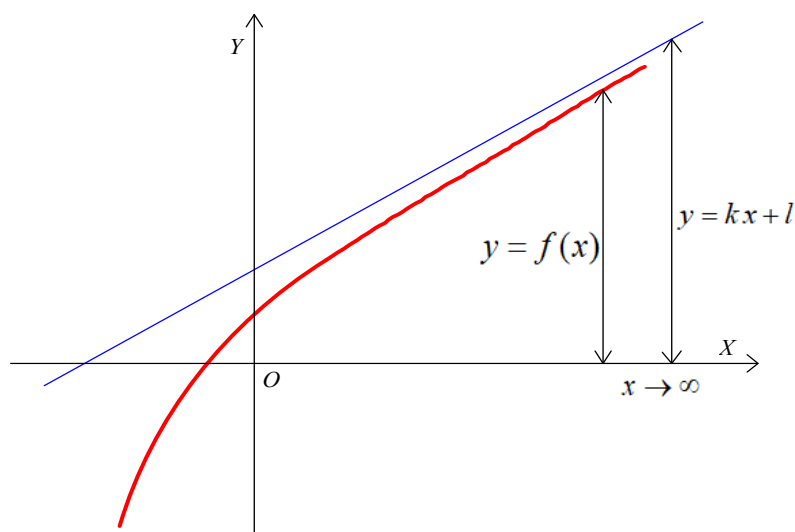
7. Kose asimptote implicitnih krivulja

Kose asimptote su one, koje nisu ni horizontalne ni vertikalne, dakle njihov koeficijent smjera je $k \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$.

Napomena 7.1. Prije nego prijedemo na analizu nalaženja asimptota za implicitne krivulje, dat ćemo kratku napomenu o nalaženju kosih asimptota vezanih za funkcije. To su funkcije koje su ovako definirane $f: D \rightarrow K$, gdje je $f(x) \in K$ ako je $x \in D$. Često ih prikazujemo u obliku $y = f(x)$, ali moramo paziti da nas to ne dovede do zabune kada kažemo, da je $y = kx + l$, što je opći zapis jednačbe pravca u eksplicitnom obliku.

Napomena 7.2. Najprije moramo reći, da je asimptota pravac kojemu je krivulja sve više približava s jedne strane i u beskonačnosti ga „stigne“, što se „jasno vidi“ i na Sl.7.0. To zapravo znači, da je $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (kx + l)$, a odatle je $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(k + \frac{l}{x}\right)$

ili $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Iz navedene jednakosti dobivamo da je $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$. Svakako, da moramo ispitati i slučaj $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (kx + l)$, gdje je $l = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$. Dakle, trebamo ispitati i vladanje krivulje i u krajnjem lijevom području domene.



Slika 7.0.

Napomena 7.3. Vidimo, da izvod pravila za nalaženja kose asimptote eksplicitne funkcije nije u duhu stroge matematičke analize, ali je za očekivati da je to objašnjenje prihvatljivo na elementarnom nivou.

Sada ćemo analizirati nalaženje kosih asimptota za implicitnu krivulju. Jasno je, da možemo u jednačbi $F(x, y) = 0$ članove sortirati u homogene grupe, tj.

$$C \dots F(x, y) = \sum_{j=0}^n H_j(x, y) = 0,$$

gdje je $H_j(x, y)$ homogeni polinom od varijabli x i y stupnja j , dakle

$$H_j(x, y) = a_{j0}x^j + a_{j1}x^{j-1}y + a_{j2}x^{j-2}y^2 + \dots + a_{j,j-1}xy^{j-1} + a_{j,j}y^j.$$

Iz (7.1) i (7.2) vidimo, da je jednačba $F(x, y) = 0$ stupnja n , tada vrijedi

$$\frac{F(x, y)}{x^n} \equiv \sum_{j=0}^n \frac{1}{x^{n-j}} \left[a_{j0} + a_{j1} \left(\frac{y}{x} \right) + a_{j2} \left(\frac{y}{x} \right)^2 + \dots + a_{j,j-1} \left(\frac{y}{x} \right)^{j-1} + a_{j,j} \left(\frac{y}{x} \right)^j \right] = 0. \quad (44)$$

Napomena 7.4. Rekli smo, da iz pretpostavke ako je $y = kx + l$ kosa asimptota krivulje tada slijedi

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}, \quad l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - kx) \quad (45)$$

Naglasimo, da u N7.2. $y(x)$ ima značenje, teorijski gledano, kao da smo ga iz $F(x, y) = 0$ eksplicite izrazili u obliku $y = y(x)$, iako to općenito nije moguće.

Provedimo sada na jednadžbi (44) granični prijelaz kad $x \rightarrow \infty$, onda će svi članovi u uglatoj zagradi težiti konačnoj vrijednosti zbog (45), ali svi faktori $1/x^{n-j} \rightarrow 0$ osim člana gdje je $j = n$, pa je ostaje

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x,y)}{x^n} \equiv a_{n0} + a_{n1}k + a_{n2}k^2 + \dots + a_{n,n-1}k^{n-1} + a_{n,n}k^n = 0.$$

Vidimo, da ova jednadžba ima n korijena k_1, k_2, \dots, k_n , a realni od tih korijena su koeficijenti smjera kosih asimptota.

Odrešci kosih asimptota na osi Y određuju se pomoću formule (45). Dakle

$$l_i = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - k_i x); \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (46)$$

Ova formula je pogodna, kako smo u N7.4. već rekli, ako se iz implicitne jednadžbe krivulje y može eksplicitno izraziti, no to često nije moguće, pa moramo izgraditi kriterij za opći slučaj.

Prema (45) uzmimo da je

$$\lambda_i = y - k_i x,$$

dakle

$$l_i = \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda_i, \quad (47)$$

gdje su x i y one vrijednosti, koje zadovoljavaju jednadžbu krivulje, pa ćemo vrijednost $y = k_i x + \lambda_i$ supstituirati u $F(x, y) = 0$, i onda dobivamo

$$F(x, k_i x + \lambda_i) = 0. \quad (48)$$

Kada (48) sredimo po padajućim potencijama od x slijedi jednadžba u obliku

$$\Phi_0(k_i, \lambda_i)x^m + \Phi_1(k_i, \lambda_i)x^{m-1} + \Phi_2(k_i, \lambda_i)x^{m-2} + \dots + \Phi_{m-1}(k_i, \lambda_i)x + \Phi_m(k_i, \lambda_i) = 0,$$

pa ako nju podijelimo sa x^m i izvršimo granični prijelaz ($x \rightarrow \infty$) $\Rightarrow (\lambda_i \rightarrow l_i)$, zbog (7.8), tada dobijemo jednadžbu

$$\Phi_0(k_i, \lambda_i) = 0. \quad (49)$$

Prema tome brojevi k_i i l_i su korijeni te jednadžbe. Moramo biti oprezni pri rješavanju iste. Naime, ako u (49) uvrstimo k_1 , tada ta jednadžba može biti linearna ili višeg stupnja po l_1 , tako da možemo imati vrijednosti $(l_1)_1, (l_1)_2, \dots, (l_1)_{n_i}$, dakle može postojati više paralelnih asimptota. Općenito može za k_i postojati $n_i \in \{1, 2, \dots, p\}$ pripadnih vrijednosti za l_i , tj. $(l_i)_1, (l_i)_2, \dots, (l_i)_{n_i}$,

Zadatak 7.1. (Dodatak za Z3.2) Nađimo sve asimptote krivulje (*Descartesov list*)

$$C \dots F \equiv x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0). \quad (50)$$

Rješenje Z7.1. Iz (50) dobivamo, da je (zbog (41)) $\varphi_0(x_0) \equiv 1 \neq 0$, a to znači da nema asimptota paralelnih sa osi Y . Analogno dobijemo, da nema ni asimptota paralelnih sa osi X , jer je $\psi_0(y_0) \equiv 1 \neq 0$. Nadalje, ako (50) podijelimo s x^3 dobivamo vezu

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3a\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

te ako na nju primijenimo granični prijelaz $x \rightarrow \infty$, tada dobivamo jednadžbu $1 + k^3 = 0$, koja ima samo jedno realno rješenje $k = -1$, dakle asimptota ima jednadžbu $y = -x + \lambda$. Uvrstimo li tu jednadžbu asimptote u (50), tada nakon sređivanja i dijeljenja sa x^2 , uz uvažavanje implikacije $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (\lambda \rightarrow l)$, dobivamo da je $l = -a$. Na osnovi dobivenih vrijednosti parametara zaključujemo, da je jednadžba kose asimptote dana s jednadžbom $y = -x - a$, što smo u Z3.2. i koristili.

Zadatak 7.2. Ispitajmo i nacrtajmo graf krivulje

$$C \dots F \equiv y^2 - x^3(2 - x) = 0 \text{ (ili } C \dots y^2 = x^3(2 - x)). \quad (51)$$

Rješenje Z7.2. (Sl.7.1.) Najprije nađimo domenu. Vidimo da postoje dvije mogućnosti;

- 1) $(x^3 \geq 0 \wedge 2 - x \geq 0) \Rightarrow (x \geq 0 \wedge x \leq 2) \Rightarrow x \in [0, 2]$,
- 2) $(x^3 \leq 0 \wedge 2 - x \leq 0) \Rightarrow (x \leq 0 \wedge x \geq 2) \Rightarrow \text{kontradikcija.}$

Prema tome domena krivulje (51) je

$$D_c = [0, 2].$$

Nađimo singularne točke. Parcijalne derivacije implicitne krivulje

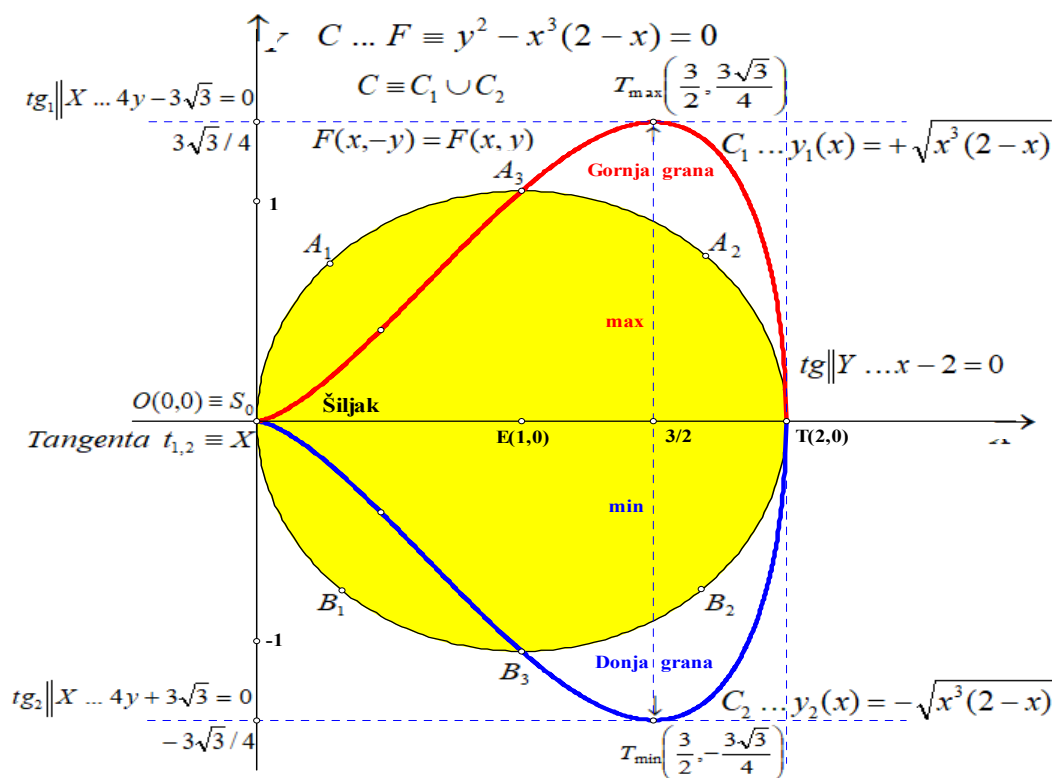
$$F \equiv x^4 - 2x^3 + y^2 = 0 \quad (52)$$

izjednačimo s nulom, pa imamo sustav jednadžbi $F_x \equiv 4x^3 - 6x^2 = 0$, $F_y \equiv 2y = 0$, čija su rješenja $O(0,0)$ i $T_1(3/2, 0) \notin C$. Dakle točka O je mogući singularitet drugog reda. Budući su druge derivacije za njezine koordinate jednake: $F_{xx}^0 = 0$, $F_{xy}^0 = 0$, $F_{yy}^0 = 2 \neq 0$, a to znači da ona i jest singularna točka, jer je $\text{sgn}|F_{xx}^0| + \text{sgn}|F_{xy}^0| + \text{sgn}|F_{yy}^0| = 1$. Nadalje vrijedi $(F_{xy}^0)^0 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 0$, pa se radi o dvostrukoj tangenti, koja se podudara sa osi apscisa, jer je $k_0 = -F_{xy}^0 / F_{yy}^0 = 0$. I na kraju analize o vrsti singulariteta zaključujemo, da se radi o šiljku, jer je graf simetričan s obzirom na os apscisa, tj. $F(x, -y) \equiv F(x, y)$. Nultočke su, izravno se vidi iz (51), $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$. Asimptota paralelnih s ordinatnom osi nema, što se vidi iz (52). Nema ni kosih asimptota, jer ne postoji $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\pm\sqrt{x(2-x)} \right)$.

Potražimo ekstreme. Tangenta je paralelna s apscisom, kada je $k = 0$, tj. kada je $F_x \equiv 4x^3 - 6x^2 = 0$, a već smo dobili da se za $x = 0$ radi o singularitetu, pa je onda ostala mogućnost $x = 3/2$ za ekstremnu vrijednost na grani krivulje. Ako zadanu krivulju razdvojimo u dvije disjunktne funkcijske grane $y_{1,2}(x) = \pm\sqrt{x^3(2-x)}$, onda respektivno dobijemo da je

$$y_{1(max),2(min)}\left(\frac{3}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(2 - \frac{3}{2}\right)} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx \pm 1.3.$$

I napokon dobijemo iz $F_y \equiv 2y = 0$, da je tangenta paralelna s osi Y u točki $T(2,0)$.



Slika 7.1.

Sada ćemo dokazati, da je površina nutrine dane krivulje jednaka površini jedinične kružnice. Naime, dvostruka površina koju zatvara gornja grana krivulje iznad područja definicije krivulje je

$$P(intC) = 2 \int_0^2 y_1(x) dx = 2 \int_0^2 x \sqrt{x(2-x)} dx = \dots = \pi,$$

a to možemo napraviti, jer je ona simetrična s obzirom na os apscisa, pa smo time dobili površinu nutrine zadane krivulje. Svakako, da je izračun ovog određenog integrala dugačak za ispis, pa smo naveli samo njegovu vrijednost. Nadalje, lako provjerimo da su presječne točke jedinične kružnice $(x-1)^2 + y^2 = 1$ i zadane krivulje u točkama $O(0,0)$, $A_3(1,1)$, $T(2,0)$, $B_3(1,-1)$. Iz ove konstatacije slijedi, da je površina lika $OA_1A_3A_4$ jednaka površini lika $A_3A_2T_{max}$. Ako bi htjeli naći kolike su te površine, tada možemo pokazati da je

$$\int_0^1 y_1(x) dx = \int_0^1 x \sqrt{x(2-x)} dx = \dots = \pi/4 - 1/3,$$

$$\int_1^2 y_1(x) dx = \int_1^2 x \sqrt{x(2-x)} dx = \dots = \pi/4 + 1/3,$$

pa je zbroj tih površina jednak $\pi/2$ a to je ustvari polovica površine jediničnog kruga. Svakako, da analogne veze vrijede i za donju polovicu krivulje. Sve se to „vidi“ i na Sl.7.1.

Zadatak 7.3. Nacrtajmo graf *strofoide*

$$C \dots (x^2 + y^2)x + (x^2 - y^2)a = 0, \quad a > 0. \quad (53)$$

Definicija u smislu konstruktivne geometrije: Strofoida je krivulja u ravnini, čije točke T_1 i T_2 leže na bilo kojim zrakama iz točke $A(-a, 0)$ i imaju svojstvo $|T_1S| = |ST_2| = |SO|$, gdje se točka S nalazi u sjecištu imenovane zrake i osi Y . Dakle S se giba po osi Y .

Rješenje Z7.3. (Sl.7.2.) Svakako, da se može pokazati, da je (53) ekvivalentno s navedenom definicijom. Napomenimo i to, da smo mogli uzeti da je parametar $a < 0$, samo što bi onda dobili krivulju čiji je graf osno simetričan prema ordinatnoj osi s obzirom na prvu krivulju.

Jednadžbu (53) možemo pisati razdvojenu u dvije grane

$$C \equiv C_1 \cup C_2 \dots y_{1,2}(x) = \pm x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}. \quad (54)$$

Ako (54) napišemo u razvijemom obliku

$$C \dots F \equiv x^3 + ax^2 + xy^2 - ay^2 = 0, \quad (55)$$

onda je vidljivo, ako upotrijebimo prije iznesene kriterije, da nema asimptota paralelnih sa osi X , ali postoji jedna paralelna sa osi Y , a jednadžba joj glasi

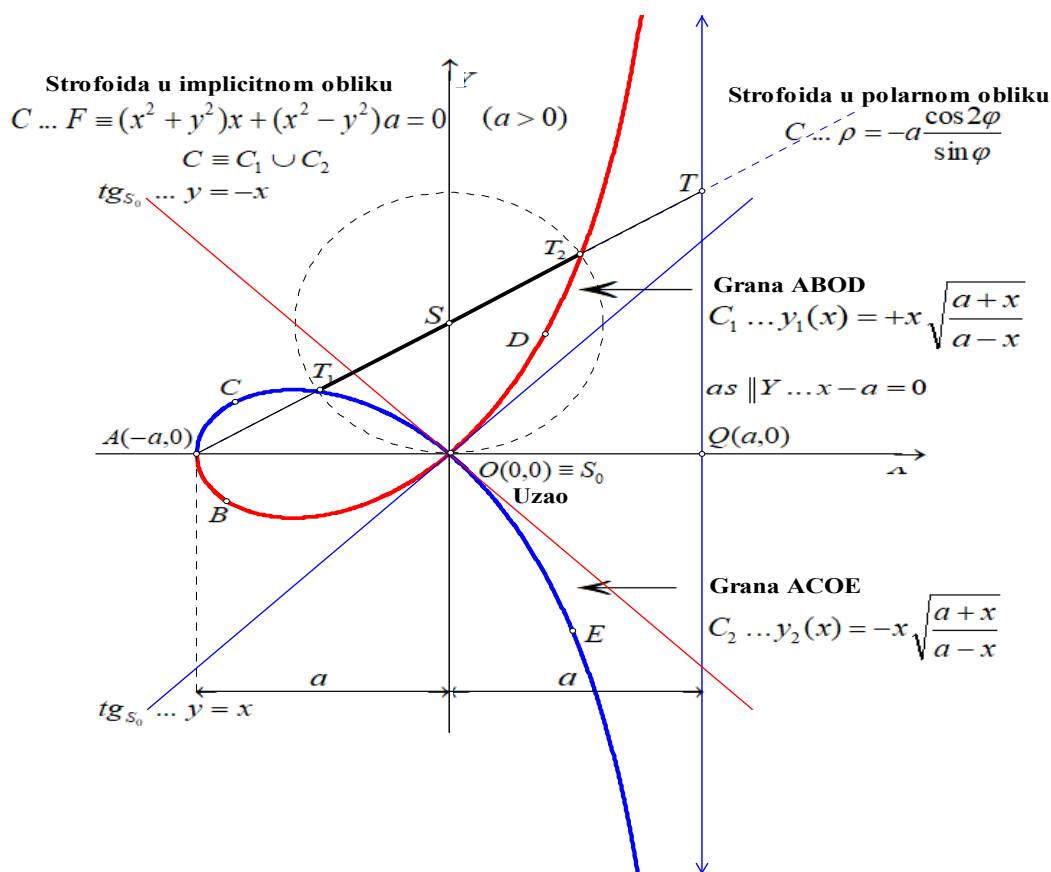
$$as \parallel Y \dots x - a = 0.$$

Evidentno je iz (55), da ne postoji ni kosa asimptita.

Ako riješimo sustav jednadžbi

$$F_x \equiv 3x^2 + 2ax + y^2 = 0, \quad F_y \equiv 2xy - 2ay = 0$$

tada dobijemo singularne točke $O \equiv S_0(0,0) \in C$ i $S_1\left(-\frac{2}{3}a, 0\right) \notin C$. Dakle, mogući singularitet drugoga reda je prva točka. Iz $F_{xx}^0 = 2a$, $F_{xy}^0 = 0$, $F_{yy}^0 = -2a$ slijedi da ona to i jest. Budući je $(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 4a^2 > 0$, to povlači da je singularitet drugog reda uzao ili čvor, što se upravo na Sl.7.2 i vidi. Iz jednadžbe $F_{yy}^0 k_0^2 + 2F_{xy}^0 k_0 + F_{xx}^0 = 0$ dobijemo da je $k_{1,2} = \pm 1$ i lako se dobije da je $l_{1,2} = 0$, a to znači da su tangente u čvoru dane s jednadžbama $t_{1,2} \dots y = \pm x$. I konačno se iz (7.17) vidi, da su nultočke krivulje $x_1 = -a$ i $x_2 = 0$.



Slika 7.2

Napomenimo, da je površina petlje i površine između krivulje i asimptote jednaka

$$P_1 = -2 \int_{-a}^0 x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = \dots = 2a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2, P_2 = 2 \int_0^a x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = \dots = 2a^2 + \frac{1}{2}\pi$$

a to znači da je $P_1 + P_2 = 4a^2$. No, mogli smo izračunati površinu petlje, da krivulju prikazemo u polarnim koordinatama, pa bi dobili

$$P_1 = \frac{1}{2}a^2 \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi = \dots = 2a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2.$$

P_2 je zapravo nepravilni integral, pa ga moramo računati na ovaj način:

$$P_2 = \lim_{b \rightarrow a} \int_0^b x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = \dots = 2a^2 + \frac{1}{2}\pi.$$

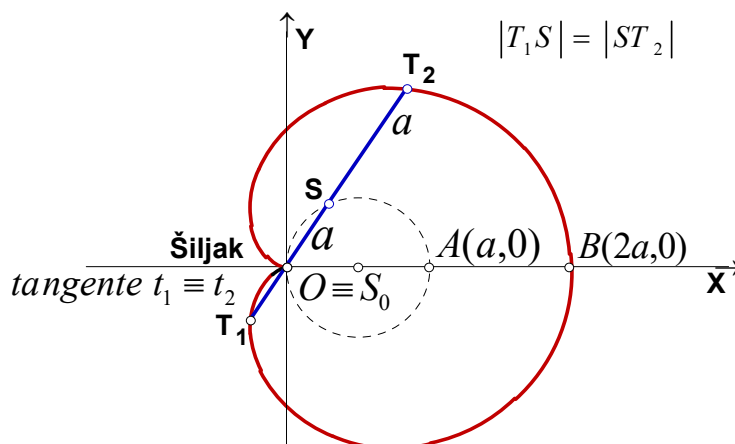
Zadatak 7.4. Nacrtajmo graf kardioida, čija je jednačina

$$C \dots F \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0, a > 0.$$

Rješenje Z7.4. (Sl.7.3.) I ovu krivulju možemo iskazati u smislu konstruktivne geometrije, kako je na slici i označeno.

Kardioida

$$C \dots F \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0, \quad (a > 0).$$



Slika 7.3.

Jednostavno pokazujemo, da krivulja ima šiljak u ishodištu, a os apscisa je dvostruka tangenta. Asimptote bilo koje vrste ne postoje. Tjeme je u točki $B(2a, 0)$, a točke u kojima su ekstremne vrijednosti su $E_{max,min} \left(\frac{3}{4}a, \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}a \right)$. Graf je simetričan s obzirom na os X , jer je $F(x, y) \equiv F(x, -y)$. Napomenimo, da je površina nutrine krivulje ustvari šesterostruka površina kruga promjera a . Navedenu površinu možemo lako dobiti, ako tu krivulju prikažemo u polarnom koordinatnom sustavu, u kojem ona prima oblik $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, pa je

$$P(intC) = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \dots = \frac{3}{2}\pi a^2 = 6 \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 \pi \right].$$

Dakle potvrđena je tvrdnja o odnosu površina. I na kraju recimo, da je duljina krivulje (opseg) $L_{CAR} = 8a$, dakle vrijede zanimljive implikacije

$$(a \in \mathbb{N}) \Rightarrow (L_{CAR} \in \mathbb{N}), \quad (a \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (L_{CAR} \in \mathbb{Q}).$$

Zadatak 7.5. Nacrtajmo graf krivulje

$$C \dots F \equiv x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0. \tag{56}$$

Rješenje Z7.5. (Sl.7.4.) Vidljivo je, da je graf osno simetričan s obzirom na koordinatne osi i na simetrale prvog i trećeg kvadranta, odnosno drugog i četvrtog kvadranta.

Iz (7.21) dobivamo sustav jednadžbi

$$F_x \equiv 4x^3 - 2x = 0, \quad F_y \equiv 4y^3 - 2y = 0,$$

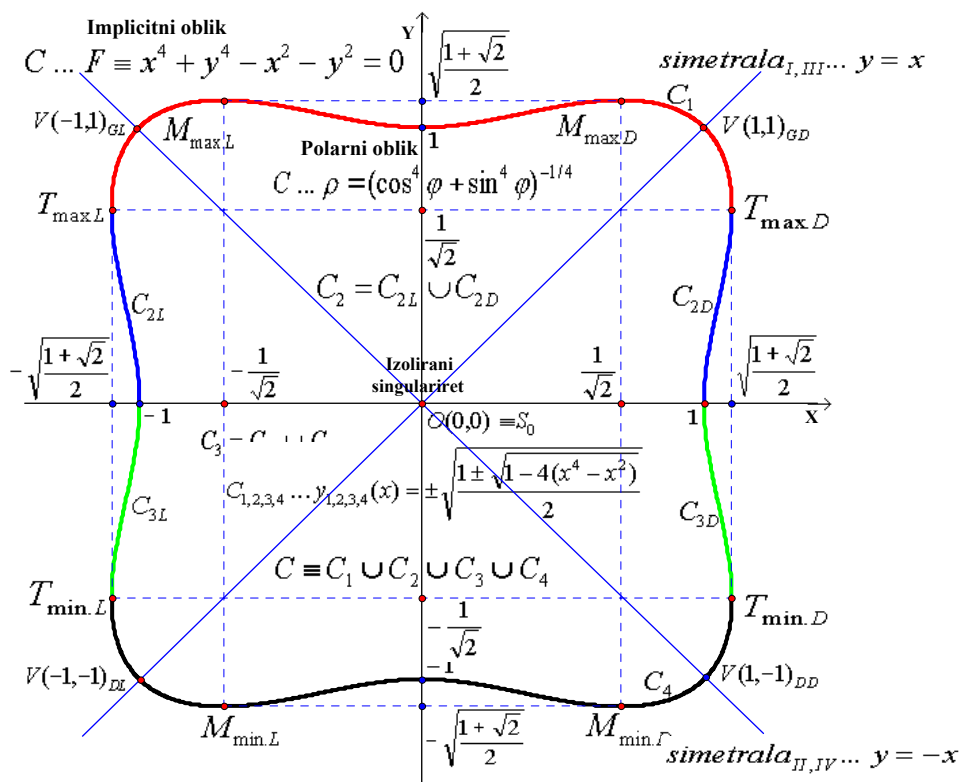
koji ima 9 rješenja

$$O(0,0) \in C, T_{2,3,4,5} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \notin C, T_{6,7} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \notin C, T_{8,9} \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \notin C$$

Druge derivacije za $O(0,0) \equiv S_0$ su

$$F_{xx}^0 = -2, F_{xy}^0 = 0, F_{yy}^0 = -2, \text{ pa je } (F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 < 0.$$

Na osnovi dobivenog slijedi, da dana krivulja ima samo jedan izolirani singularitet u točki $S_0 \equiv O$.



Slika 7.4.

Ova krivulja nema asimptota, što se lako vidi. Nadalje postoje dvije maksimalne i dvije minimalne vrijednosti, te postoje po dva desna i dva lijeva tjemena, te četiri dijagonalna tjemena, što se sve dobro vidi iz Sl.7.4, a sve se može jednostavnim računom provjeriti. I na kraju recimo da su nultočke na osi apscisa $x_{1,2} = \pm 1$, a na ordinatnoj osi $y_{1,2} = \pm 1$, te da za površinu nutrine krivulje vrijedi procijena $4 < P(intC) < 2(1 + \sqrt{2}) \approx 4.82843$, što se vidi iz slike. No, sada ćemo pokazati, da je tačna vrijednost te površine

$$P(intC) = \pi\sqrt{2}.$$

Prikaz krivulje (56) u polarnim koordinatama je $\rho^2(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) = 1$, pa iz simetrije slike slijedi da je

$$P(intC) = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2\varphi + 1}{tg^4\varphi + 1} d(tg\varphi) = 4 \int_0^1 \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt =$$

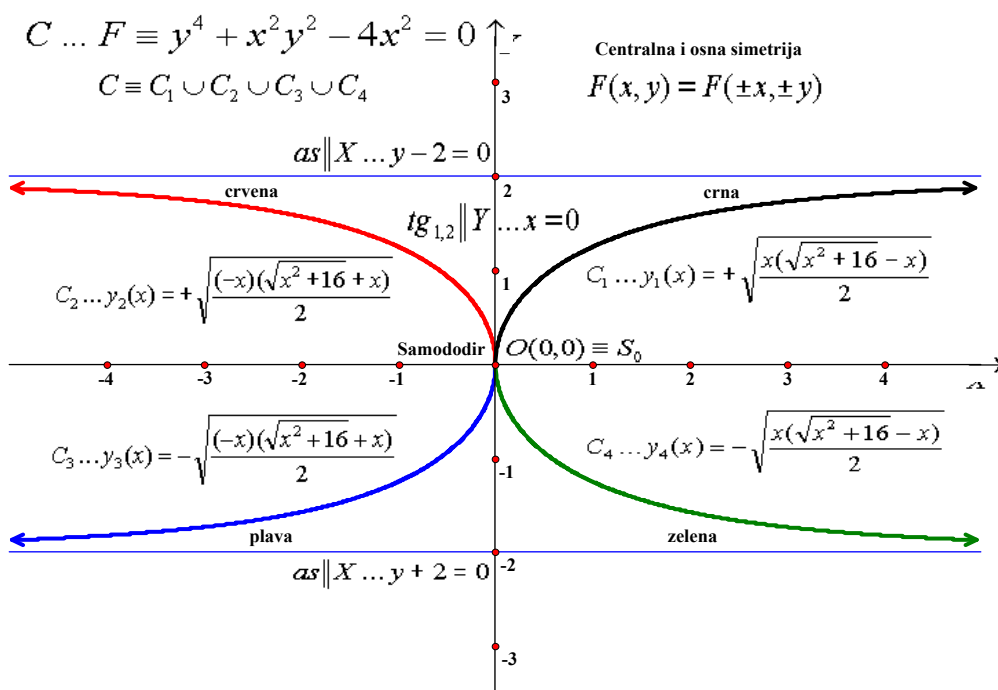
$$4 \int_0^1 \frac{t^2+1}{(t^2-t\sqrt{2}+1)(t^2+t\sqrt{2}+1)} dt = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{(t^2-t\sqrt{2}+1)} + \frac{1}{(t^2+t\sqrt{2}+1)} \right) dt = \dots =$$

$$2\sqrt{2} \left(\arctg(t\sqrt{2} - 1) + \arctg(t\sqrt{2} + 1) \right) \Big|_0^1 = 2\sqrt{2} \arctg \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} \Big|_0^1 = \pi\sqrt{2} \approx 4.44288.$$

Zadatak 7.6. Nacrtajmo graf krivulje

$$C \dots x^2y^2 + y^4 - 4x^2 = 0. \tag{57}$$

Rješenje Z7.6. (Sl.7.5.)



Slika 7.5

Iz jednađbe $F \equiv x^2y^2 + y^4 - 4x^2 = 0$ dobivamo sustav jednađbi

$$F_x \equiv 2xy^2 - 8x = 0, F_y \equiv 2x^2y + 4y^3 = 0,$$

koji ima samo jedno rješenje, koje je realno i ima smisla, a to je $S_0(0,0) \equiv O \in C$. Budući je

$$F_{xx}^0 \equiv (2y^2 - 8)_0 = -8, F_{xy}^0 \equiv (4xy)_0 = 0, F_{yy}^0 \equiv (12y^2 + 2x^2)_0 = 0,$$

a to znači da se radi o točki koja je singularitet drugog reda, jer je bar jedna derivacija drugog reda različita od nule. No, $(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 0$, dakle to je uvjet za šiljak ili kljun ili samododir. Iz (57) slijedi da je $F(x, y) \equiv F(-x, y) \equiv F(x, -y)$, pa to povlači da se radi o samododiru, što se vidi na Sl.7.5.

Nadalje, asimptote paralelne sa osi X postoje, jer iz $F \equiv (y^2 - 4)x^2 + y^4 = 0$ slijedi da je $\psi_0(y_0) \equiv y_0^2 - 4$, tj. $y_0 = \pm 2$, dakle $as \parallel X \dots y \pm 2 = 0$. Lako se pokaže, da asimptote paralelne sa osi ordinata i kose asimptote ne postoje. Nultočke su u $x = 0$, a ekstremi također ne postoje.

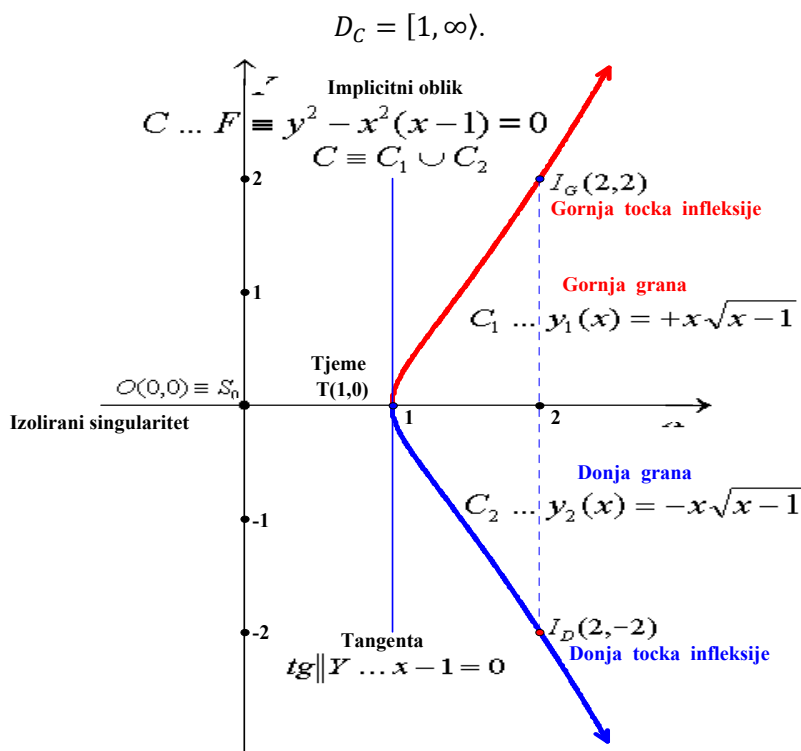
Zadatak 7.7. Nacrtajmo graf krivulje

$$F \equiv y^2 - x^2(x - 1) = 0.$$

Rješenje Z7.7. (Sl.7.6.) Zadanu krivulju možemo rastaviti u dvije grane

$$C_{1,2} \dots y_{1,2}(x) = \pm x\sqrt{x - 1}.$$

Vidimo, da je područje definicije dane krivulje



Slika 7.6.

Ako riješimo sustav jednačbi

$$F_x \equiv 3x^2 - 2x = 0, F_y \equiv -2y = 0$$

dobijemo rješenja $S_0(0,0) \in C$ i $T_1(2/3,0) \notin C$. No, singularno rješenje $S_0(0,0)$ je singularitet drugog reda, jer je

$$F_{xx}^0 \equiv (6x - 2)_0 = -2, F_{xy}^0 \equiv (0)_0 = 0, F_{yy}^0 \equiv (-2)_0 = -2,$$

tj.

$$\text{sgn}|F_{xx}^0| + \text{sgn}|F_{xy}^0| + \text{sgn}|F_{yy}^0| = 2 \neq 0.$$

Budući je $(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = -4 < 0$, to znači da je singularna točka izolirani singularitet. Apscise presječnih točaka krivulje sa osi apscisa su $x_1 = 0$ (apscisa izoliranog singulariteta) i $x_2 = 1$. Ordinata presječne točke krivulje sa osi ordinata je $y_1 = 0$ (ordinata izoliranog singulariteta).

Da bi našli tangentu, koja je paralelna s apscisom moramo riješiti sustav jednačbi $F_x = 0, F_y = 0$; međutim nijedno rješenje ne dolazi u obzir, dakle takovih tangenti krivulja nema. Tangenta u tjemenu $T(1,0)$ krivulje je $tg \parallel Y \dots x - 1 = 0$. Do toga smo došli, da smo riješili sustav jednačbi $F_x = 0, F_y = 0$ i samo je jedno rješenje došlo u obzir.

Lagano se provjeri na nema niti jedne kose asimptote. Svi dobiveni rezultati analize ove krivulje prikazani su na Sl.7.6.

Zadatak 7.8. Nacrtajmo krivulju

$$C \dots F \equiv x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2 = 0. \quad (58)$$

Rješenje Z7.8. Na Sl.7.7. je prikazana analiza ove krivulje. Nakon parcijalnog deriviranja (58) dobivamo sustav jednačbi

$$F_x \equiv 4x^3 - 12xy - 32x = 0, F_y \equiv -6x^2 + 50y = 0;$$

čija su rješenja $S_{01}(0,0), S_{02,03} \left(\pm \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} \right) \in C$. Dakle sve su točke na krivulji. Nadalje, druge derivacije su

$$F_{xx} \equiv 12x^2 - 12y - 32 = 0, F_{xy} \equiv -12x, F_{yy} \equiv 50 = 0 \text{ i } F_{yy}^{01,02,03} \equiv 50 \neq 0,$$

a to povlači da su sve tri točke singulariteti drugog reda. Točka $S_{01}(0,0)$ je čvor, jer je $(F_{xy}^{01})^2 - F_{xx}^{01} F_{yy}^{01} > 0$, dok su točke $S_{02,03} \left(\pm \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} \right)$ izolirane singularne točke, jer su $(F_{xy}^{02,03})^2 - F_{xx}^{02,03} F_{yy}^{02,03} < 0$. Na osnovi dobivenih rezultata koeficijenti smjera

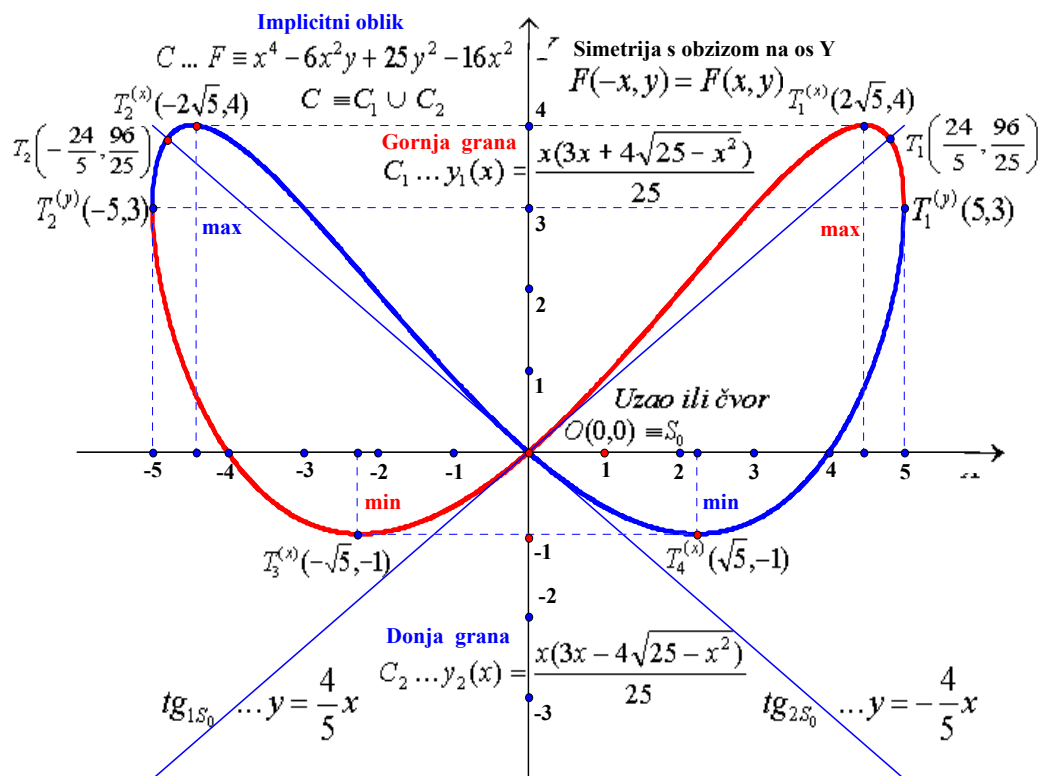
tangente u čvoru iznose $k_{1,2}^{(01)} = \frac{\pm\sqrt{32 \cdot 50}}{50} = \pm \frac{4}{5}$, a to znači da su jednačbe tangenti u njemu

$$tg_{S_{01}} \dots y = \pm \frac{4}{5} x.$$

Apscise presječnih točaka krivulje sa osi X dobiju se, ako uvrstimo $y = 0$ u (58), tada iz jednačbe $x^4 - 16x^2 = 0$ dobijemo vrijednosti

$$x_{1,2} = 0, x_{3,4} = \pm 4.$$

Vidljivo je, da nema asimptota nikoje vrsti.



Slika 7.7.

Tangente paralelne sa osi X su u onim točkama, gdje je $F_x = 0, F = 0$, tj. u rješenjima sustava jednačbi

$$F_x \equiv 4x^3 - 12xy - 32x = 0, \quad F \equiv x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2 = 0$$

Rješenja toga sustava koja dolaze u obzir su

$$T_{1,2}^{(x)}(\pm 2\sqrt{5}, 4), T_{3,4}^{(x)}(\pm \sqrt{5}, -1)$$

a ordinate tih točaka su zapravo ekstremne vrijednosti krivulje, Tangente paralelne sa osi Y su u onim točkama, gdje je $F_y = 0, F = 0$; dakle trebamo riješiti sustav jednadžbi

$$F_y \equiv -6x^2 + 50y = 0, F \equiv x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2 = 0.$$

Rješenjem toga sustava dobivamo točke, koje dolaze u obzir, a tu su:

$$T_{1,2}^{(y)}(\pm 5, 3),$$

dakle tu se radi o desnom i lijevom tjemenu krivulje. Iz jednadžbi crvene gornje (desno od ishodišta je gornja, a lijevo od ishodišta je donja) grane i plave donje (desno od ishodišta donja, a lijevo od ishodišta je gornja) grane $C_{1,2}$ se vidi, da je domena krivulje $D_C = [-5, 5]$. Slično se može pokazati, da je kodomena $K_C = [-1, 4]$, a sve je to vidljivo i na slici.

Zadatak 7.9. Nacrtajmo krivulju

$$C \dots F \equiv x^5 + 4x^2y - 4y^2 = 0 \quad (59)$$

Rješenje Z7.9. (Sl.7.8.) Krivulja prolazi kroz ishodište i to je jedina točka u kojoj ona siječe osi. Nadalje, ako riješimo sustav jednadžbi $F_x \equiv 5x^4 + 8xy = 0, F_y \equiv 4x^2 - 8y = 0$ dobijemo samo jednu singularnu točku $S_0(0,0) \in C$, koja je singularitet drugog reda, jer je $F_{xx}^0 \equiv 0, F_{xy}^0 \equiv 0, F_{yy}^0 \equiv -8$; a budući je $(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 0$, to znači da se radi o šiljku ili kljunu ili samododiru. Iz (59) dobivamo da je

$$C = C_1 \cup C_2 \dots y_{1,2}(x) = \frac{1}{2}x^2(1 \pm \sqrt{1+x}).$$

a odatle slijedi da je domena zadane krivulje

$$D_C = [-1, \infty)$$

na osnovi čega zaključujemo da se radi o samododiru, jer singularna točka ima okolinu.

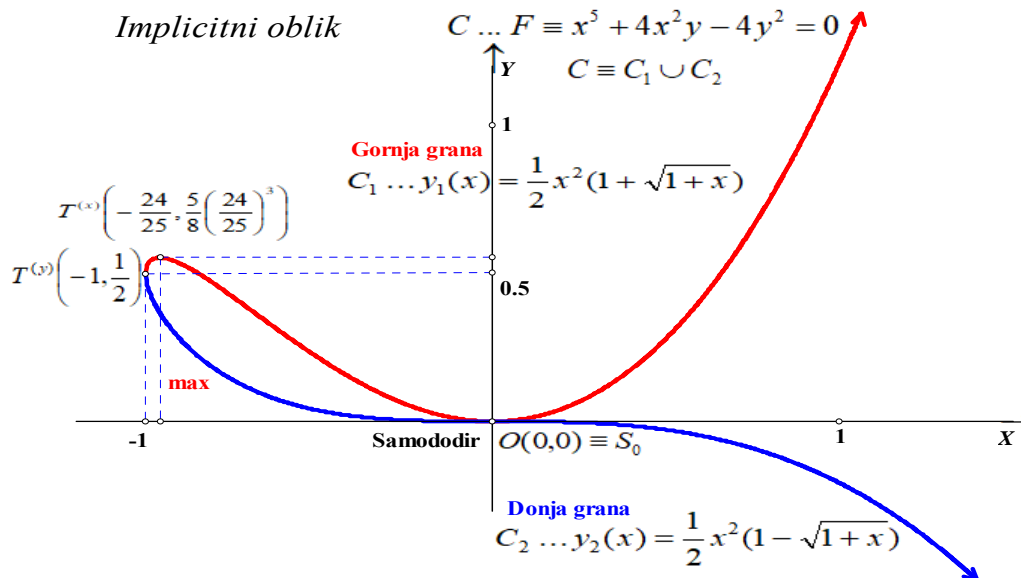
Iz jednadžbe krivulje je evidentno, da krivulja nema asimptota nikoje vrsti.

Rješenjem sustava jednadžbi $F_x \equiv 0, F_y \equiv 0$ dobivamo točku $T^{(x)}\left(-\frac{24}{25}, \frac{5}{8}\left(\frac{24}{25}\right)^3\right)$, a to znači da je u toj točki tangenta paralelna sa osi X , a približno zbog crtanja je možemo predstaviti s $T^{(x)}(-0.96, 0.55)$. Iz toga zaključujemo, da grana $y_1(x)$ ima maksimum za $x = -\frac{24}{25}$, a on iznosi $y_1\left(-\frac{24}{25}\right)_{max} = \frac{5}{8}\left(\frac{24}{25}\right)^3$. Nadalje, ako riješimo sustav jednadžbi $F_y \equiv 0, F \equiv 0$; tada dobijemo točku $T^{(y)}(-1, 1/2)$ na toj krivulji, u kojoj je tangenta paralelna sa osi Y .

I konačno, sada možemo nacrtati graf dane krivulje, kao što se vidi na Sl.7.8. Lagano možemo odrediti i površinu petlje. Naime, iz slike slijedi da je

$$P(\text{int}C) = \int_{-1}^0 (y_1(x) - y_2(x))dx = \int_{-1}^0 x^2 \sqrt{1+x} dx = \int_{-1}^0 ((x+1) - 1)^2 (x+1)^{\frac{1}{2}} d(x+1) = \int_0^1 (t-1)^2 t^{1/2} dt = \int_0^1 (t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{1/2}) dt = \frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{105} \approx 0.15381 \approx 15\%(\text{kvadrata}),$$

a to se na slici i „vidi“.



Slika 7.8.

Zadatak 7.10. Nacrtajmo krivulju (*kocisoidu*)

$$F \equiv x^3 - xy^2 + y^2 = 0. \tag{60}$$

Rješenje Z7.10. (Sl.7.9.) Zadanu krivulju možemo rastaviti u dvije funkcijske grane

$$C = C_1 \cup C_2 \dots y_{1,2}(x) = \pm \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

Određimo domenu te krivulje. Vidimo da mora biti $x \neq 1$ i $\frac{x^2x}{x-1} \geq 0$. Ova zadnja nejednakost je ekvivalentna s nejednaokošću $x(x-1) \geq 0$, čije je rješenje $\forall x \in \langle -\infty, 0] \cup \langle 1, \infty \rangle$. Prema tome domena zadane krivulje je

$$D_C = \langle -\infty, 0] \cup \langle 1, \infty \rangle.$$

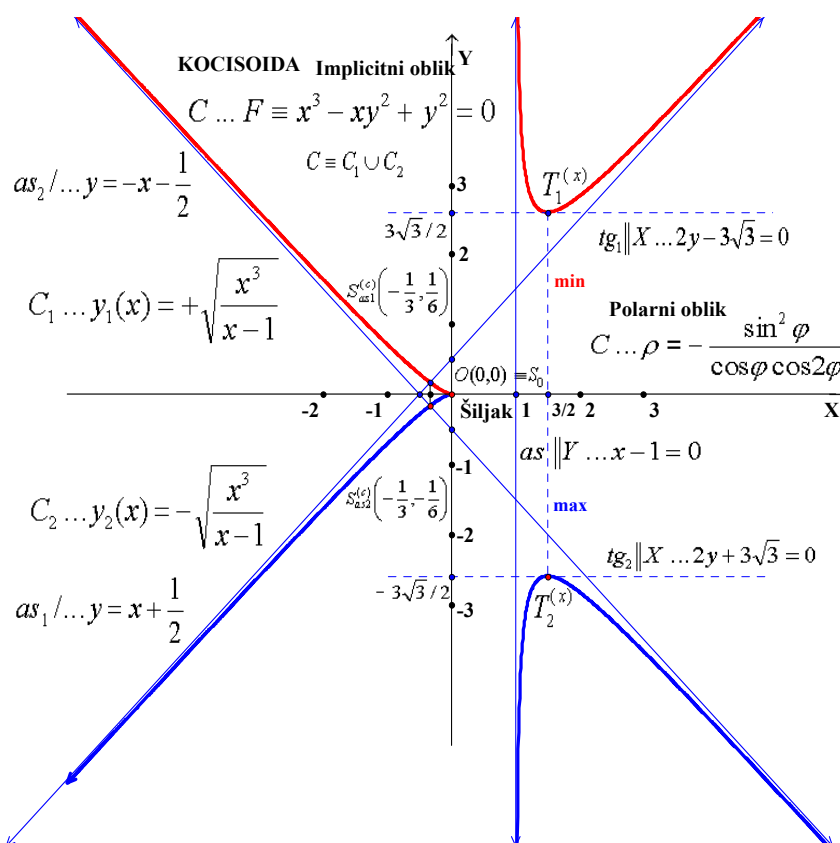
Potražimo asimptote. Asimptota paralelnih sa osi X nema, što možemo zaključiti na dva načina. Prvi je način, da uočimo da je iz (60) $\psi_0(y_0) \equiv 1 \neq 0$, a drugi način slijedi iz

$y_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y_{1,2}(x) = \pm\infty$. Za asimptote paralelne sa osi Y iz zadanog oblika krivulje se vidi da je $\varphi_0(x_0) \equiv x_0 - 1 = 0$, dakle

$$as \parallel Y \dots x - 1 = 0.$$

Postoje dvije kose asimptote. Naime, ako je $as / \dots y = kx + l$ ($as /$ je oznaka za kosu asimptotu), tada je $k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y_{1,2}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\pm \sqrt{\frac{x}{x-1}} \right) = \pm 1$. Iskoristit ćemo eksplicitnu mogućnost predstavljanja grana krivulje, pa imamo $l_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\pm \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x \right) = \dots = \pm \frac{1}{2}$, dakle

$$as / \dots y_{1,2}(x) = \pm x \pm \frac{1}{2}. \tag{61}$$



Slika 7.9.

Zbog preciznijeg crtanja grafa krivulje potražimo sjecišta kosih asimptota sa istom. Ako uvrstimo (61) u (60) dobivamo da je $\left(\pm x \pm \frac{1}{2} \right)^2 (x - 1) - x^3 = 0$, a odatle je $x = -\frac{1}{3}$, odnosno $y = \pm \frac{1}{6}$. Prema tome sjecišta kosih asimptota i zadane krivulje su u tačkama

$$S_{as\ 1,2}^{(C)} \left(-\frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6} \right).$$

Očito je da krivulja sječe koordinatne osi u $O(0,0)$.

Pokazat ćemo da imamo samo jedan singularitet drugog reda. Naime, ako riješimo sustav jednačnji

$$F_x \equiv 3x^2 - y^2 = 0, F_y \equiv -2xy + 2y = 0$$

dobijemo jednu točku $O(0,0) \in C$ i dvije $S_{1,2}(1, \sqrt{3}) \notin C$. Dakle singularna točka $O(0,0)$ je mogući singularitet drugog reda. Dobivamo, da su druge derivacije u toj točki

$$F_{xx}^0 \equiv 0, F_{xy}^0 \equiv 0, F_{yy}^0 \equiv 2 \neq 0;$$

tada je točka $O(0,0) \equiv S_0$ singularitet drugog reda, jer je $(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 0$. Budući ona ima lijevu okolinu, a ako se krivulja rastavi u dvije grane, već smo dobili da one nisu sa iste strane dvostruke tangente (ovdje osi X), pa se radi o simetričnom šiljku, jer je $F(x, -y) = F(x, y)$.

Nađimo sada tangente paralelne sa osi X . Točke koje zadovoljavaju te uvjete dobiju se kao rješenje sustava jednačnji

$$F \equiv x^3 - xy^2 + y^2 = 0, F_x \equiv 3x^2 - y^2.$$

Rješenja toga sustava su $O(0,0)$ i $T_{1,2}^{(x)} \left(\frac{3}{2}, \pm \frac{3}{2}\sqrt{3} \right)$. Jasno je da prva točka ne dolazi u obzir. Nadalje, lako se vidi, da vertikalnih tangenti, osim asimptote, ne postoji. Na osnovi dobivenih rezultata zaključujemo da je

$$\left(y_1 \left(\frac{3}{2} \right) \right)_{min} = \frac{3}{2}\sqrt{3}, \left(y_1 \left(\frac{3}{2} \right) \right)_{max} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Sve ove vrijednosti upotrebljene su u prikazu grafa zadane krivulje na Sl.7.9.

Zadatak 7.11. Nacrtajmo krivulju

$$C \dots F \equiv x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - y^2 - 1 = 0. \quad (62)$$

Rješenje Z7.11. (Sl.7.10.) Iz ove jednačnje krivulje dobivamo dvije funkcije

$$y_{1,2}(x) = \frac{-x^2 \pm \sqrt{2x^2 - 1}}{x^2 - 1}. \quad (63)$$

Nadalje, možemo pokazati, da one rastavljaju graf krivulje u dvije odnosno četiri grane, dakle

$$C = (C_{1L} \cup C_{1D}) \cup (C_{2LG} \cup C_{2DG} \cup C_{2LD} \cup C_{2DD}),$$

$$C_1 = C_{1L} \cup C_{1D} \dots y_1(x) = \frac{-x^2 + \sqrt{2x^2 - 1}}{x^2 - 1}, \quad (64)$$

$$C_2 = C_{2LG} \cup C_{2DG} \cup C_{2LD} \cup C_{2DD} \dots y_2(x) = \frac{-x^2 - \sqrt{2x^2 - 1}}{x^2 - 1},$$

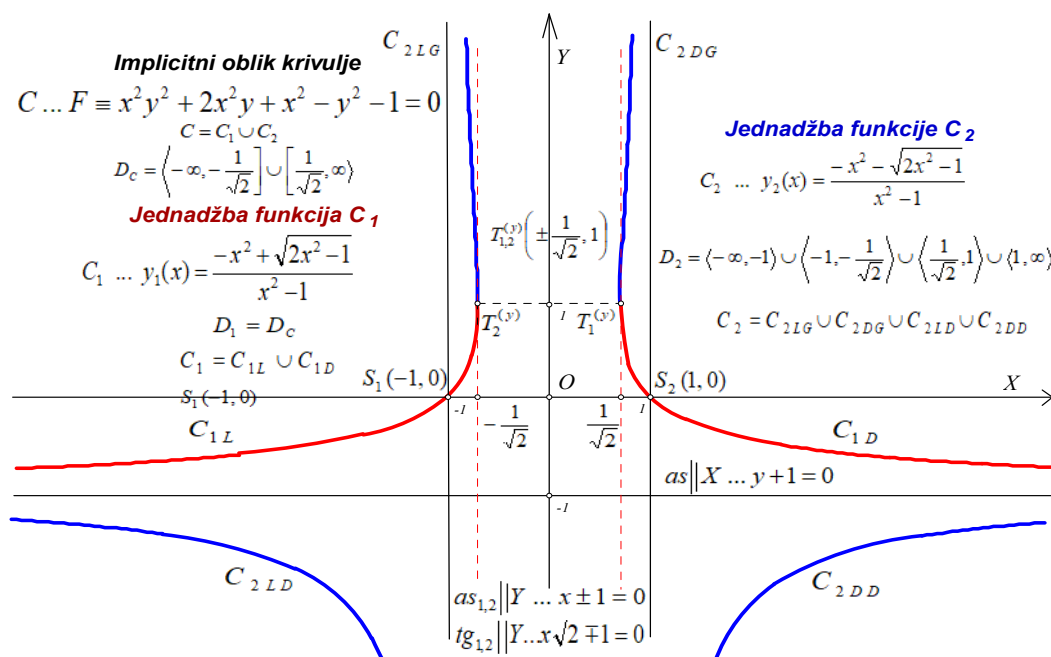
a ovi rezultati se mogu dobiti iz domena

$$D_1 = D_C, D_2 = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cup \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle.$$

Sada dajemo prikaz (63). Dakle

$$C_1 = C_{1L} \cup C_{1D} \dots y_1(x): \langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty \right) \rightarrow \left\langle -1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle,$$

$$C_2 \dots y_2(x): \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cup \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle \rightarrow \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty \rangle.$$



Slika 7.10.

No, zadanu krivulju možemo rastaviti i u dvije funkcije, gdje su domena i kodomena zamijenile pozicije. Naime, iz (62) dobivamo

$$F \equiv (y^2 + 2y + 1)x^2 - y^2 - 1 = 0,$$

a odatle slijede dvije funkcije s po dvije grane

$$C \dots x_{1,2}(y) = \pm \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{y + 1}.$$

Dakle, ništa se neće mijenjati što se tiče grafa krivulje, samo sada biramo y iz konomene a računamo x iz domene.

Prva „inverzna“ funkcija je;

$$C_{2LD} \cup C_{1L} \cup C_{2LG} \dots x_1(y): \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, \infty \rangle \rightarrow \langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle,$$

gdje je

$$x_1(y) = -\frac{\sqrt{y^2+1}}{y+1}. \quad (65)$$

Druga „inverzna“ funkcija je;

$$C_{2DD} \cup C_{1D} \cup C_{2DG} \dots x_2(y): \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, \infty \rangle \rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty \right).$$

gdje je

$$x_2(y) = +\frac{\sqrt{y^2+1}}{y+1} \quad (66)$$

Vidimo da je ovaj drugi slučaj jednostavniji za izračunavanje pojedinih točaka krivulje. Sada nastavimo analizu krivulje. Svakako, da smo iz (64) mogli pokazati, da je

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1 \pm 0} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow \pm 1 \pm 0} \frac{-x^2 + \sqrt{2x^2 - 1}}{x^2 - 1},$$

a to znači da je funkcija $y_1(x)$ na obim granana u točkama $S_{1,2}(\pm 1, 0)$ neprekinuta.

Kod određivanja asimptota paralelnih sa osi ordinata i apscisa presječna krivulje sa osi X moramo biti oprezni. Naime, pokazat ćemo da krivulja za $x = \pm 1$ ima navedene asimptote i presječne točke.

Iz (62) slijedi da je

$$\varphi_0(x_0) \equiv x_0^2 - 1 = 0,$$

dakle asimptote paralelne s osi ordinata su dane s jednadžbama

$$as_{1,2} \parallel Y \dots x \pm 1 = 0.$$

No, te veze su vidljive i iz (63), što se tiče nazivnika, ali je problem u brojniku, jer je on za gornji predznak jednak 0, tj. imamo da je

$$y_1(\pm 1) = \left(\frac{0}{0} \right) \text{ i } y_2(\pm 1) = \frac{-2}{0} = -\infty.$$

Naime, ako u (62) uvrstimo $y = 0$, tada su $x = \pm 1$ apscise presječnih točaka sa osi X , a to je istina jer je

$$y_1(\pm 1) = \lim_{x \rightarrow \pm 1} y_1(x) = \left(\frac{0}{0} \right) = \dots = 0.$$

Za donju funkciju $y_2(x)$ imamo $y_2(\pm 1) = \lim_{x \rightarrow \pm 1} y_2(x) = -\infty$. Dakle, gornja funkcija (s dvije grane) $y_1(x)$ za $x = \pm 1$ ima presječne točke sa osi apscisa, a donja funkcija (s dvije grane) $y_2(x)$ za $x = \pm 1$ ima asimptote paralelne sa osi ordinata.

Područje definicije krivulje (7.45) je

$$D_C = \langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty \right).$$

Asimptote paralelne sa osi apscisa dobiju se iz $\psi_0(y_0) \equiv y_0^2 + 2y_0 + 1$, a odatle je

$$as \parallel X \dots y + 1 = 0.$$

Zapravo, to je dvostruka asimptota, što možemo zaključiti iz (65) i (66), a to zapravo vidimo i na slici.

Kose asimptote ne postoje, jer je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{F(x,y)}{x^4} = 0$.

Iz sustava jednažbi

$$F_x \equiv 2xy^2 + 4xy + 2x = 0, \quad F_y \equiv 2x^2y + 2x^2 - 2y = 0$$

slijedi realno rješenje $O(0,0) \notin C$, dakle nema singularnih točaka, a time i singulariteta drugog reda.

Iz sustava jednažbi $F_y \equiv 0, F \equiv 0$ dobiju se na krivuli točke $T_{1,2}^{(y)} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$ u kojima prolaze tangente paralelne sa osi ordinata, dakle

$$tg_{1,2} \parallel Y \dots x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

I konačno recimo, da je $F(x,y) \equiv F(-x,y)$, dakle graf je osno simetričan s obzirom na os ordinata, a to smo već koristili. Sve je ovo prikazano na slici.

Zadatak 7.12. Nacrtajmo krivulju

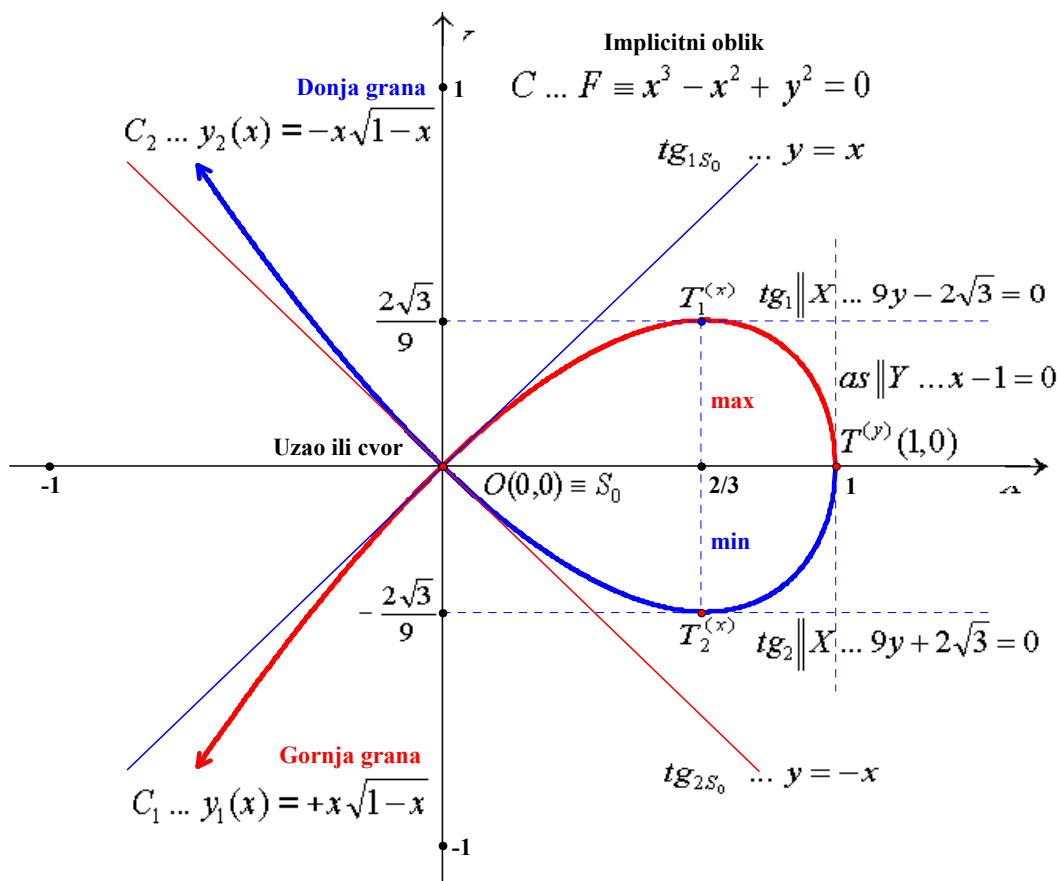
$$C \dots F \equiv x^3 - x^2 + y^2 = 0.$$

Rješenje Z7.12. (Sl.7.11.) Presječne točke sa osi X su $S_{x_1}(0,0) \equiv O(0,0), S_{x_2}(0,0)$. Nadalje, presječna točka sa osi Y je $S_{y_1}(0,0) \equiv O(0,0)$. Rješenja sustava jednažbi $F_x \equiv 3x^2 - 2x = 0, F_y \equiv 2y = 0$ su $S_0(0,0) \equiv O(0,0) \in C, S_1\left(\frac{2}{3}, 0\right) \notin C$, dakle postoji najviše jedna singularna točka. Vrijednosti drugih derivacija u singularnoj točki su

$$F_{xx}^0 \equiv -2, F_{xy}^0 \equiv 0, F_{yy}^0 \equiv 2; \text{ dakle je } (F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 4 > 0,$$

a to znači da je singularitet uzao ili čvor. Tangente u čvoru su

$$tg_{S_0} \dots y = \pm x.$$



Slika 7.11.

Lako se vidi, da ova krivulja nema asimptota. Graf krivulje je simetričan s obzirom na os X , jer je $F(x, -y) \equiv F(x, y)$. Ako riješimo sustav jednažbi $F_x \equiv 0, F \equiv 0$ dobijemo točku $T^{(y)}(1,0)$ i samo ona dolazi u obzir, a u njoj je tangenta paralelna sa osi ordinata. Jednažba te tangente glasi

$$tg \parallel Y \dots x - 1 = 0.$$

Ako riješimo sustav jednažbi $F_x \equiv 0, F \equiv 0$ dobijemo točke $T_{1,2}^{(x)}\left(\frac{2}{3}, \pm \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$, samo one dolaze u obzir, a u njima su tangente paralelne sa osi apscisa. Jednažbe tih tangenti glase

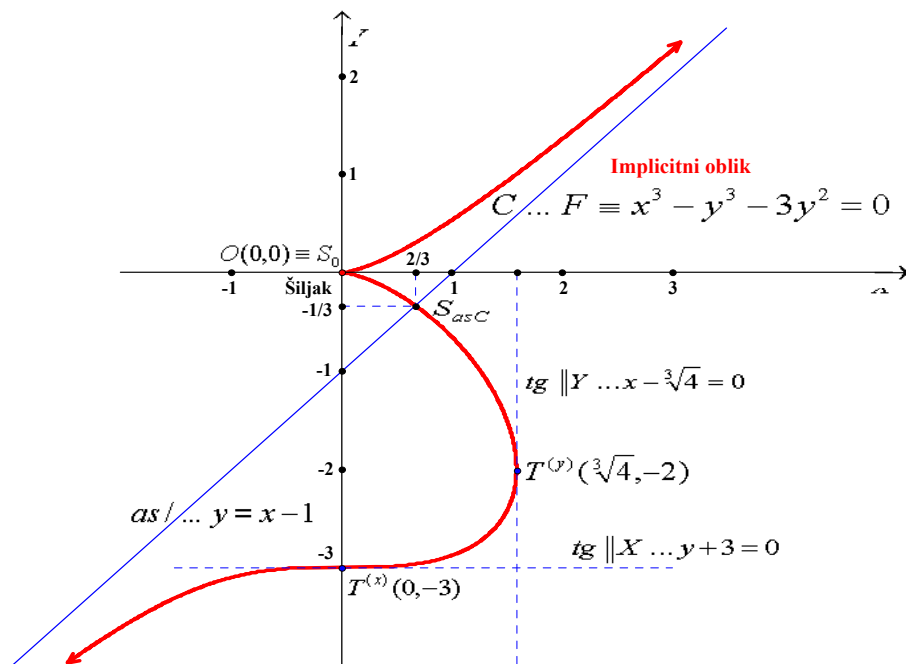
$$tg_{1,2} \parallel X \dots y \pm \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0.$$

Napomenimo, da za crvenu granu kažemo, da je iznad plave grane, jer te nazive imenujemo po bojama u prvom i četvrtom kvadrantu.

Zadatak 7.13. Nacrtajmo krivulju

$$C \dots F \equiv x^3 - y^3 - 3y^2 = 0. \tag{67}$$

Rješenje Z7.13. (Sl.7.12.)



Slika 7.12.

Rješenje sustava

$$F_x \equiv 3x^2 = 0, \quad F_y \equiv -3y^2 - 6y = 0$$

su točke $S_0(0,0) \in C$, $S_{01}(0, -2) \notin C$. Iz

$$F_{xx}^0 \equiv 0, \quad F_{xy}^0 \equiv 0, \quad F_{yy}^0 \equiv -6 \text{ je } \text{sgn}|F_{xx}^0| + \text{sgn}|F_{xy}^0| + \text{sgn}|F_{yy}^0| \geq 1,$$

dakle $S_0(0,0)$ je singularitet drugog reda. $(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 0$ povlači da postoji dvostruka tangenta (ili šiljak ili kljun ili samododir). Da ustaovimo podslučaj singulariteta, tada iz (67) slijedi da trebamo razmotriti jednadžbu

$$y^3 + 3y^2 - (\Delta x)^3 = 0 \text{ u okolišu } S_0(0,0).$$

Uzmimo da je $\Delta x = \pm 1$, tada jednadžba prima oblike

$$y^3 + 3y^2 \pm 1 = 0.$$

Ako je $\Delta x = 1$, tada jednadžba

$$y^3 + 3y^2 - 1 = 0$$

ima rješenja: $y_{11} \approx -2.881$, $y_{12} \approx -0.66$, $y_{13} \approx 0.53$, a ako je $\Delta x = -1$, tada jednadžba $y^3 + 3y^2 + 1 = 0$ ima samo jedno relno rješenje $y_{21} \approx -3.1$, dok su rješenja y_{22} , y_{23}

konjugirano kompleksna. Iz ove analize slijedi da pravac $x - 1 = 0$ sječe (67) u tri točke: $S_{11}(1, y_{11}), S_{12}(1, y_{12}), S_{13}(1, y_{13})$; a pravac $x + 1 = 0$ sječe tu krivulju smo u jednoj realnoj točki $S_{21}(-1, y_{21})$. Dakle, radi se o šiljku, jer je $y_{13} > 0$ a $y_{12} < 0$, što se na slici i vidi.

Presječne točke sa osi ordinata su $S_{x,y_1}(0,0), S_{x,y_2}(0,-3)$. Nadalje, postoji jedna kosa asimptota, čiji je koeficijent, kako se vidi iz (67), $k = 1$. Prema tome jednačina kose asimptote je $y = x + \lambda$, a ako to uvrstimo u (67) dobivamo

$$x^3 - (x + \lambda)^3 - 3(x + \lambda)^2 = 0$$

pa tu jednakost podijelimo s x^2 i napravimo granični prijelaz $x \rightarrow \infty$, tada dobijemo $l = -1$, dakle je

$$as/\dots y(x) = x - 1. \quad (68)$$

Ako riješimo sustav jednačbi $F_x \equiv 0, F \equiv 0$ dobijemo točku $T_x(0, -3)$, a samo ona dolazi u obzir i u njoj je tangenta paralelna sa osi apscisa. Jednačina te tangente glasi,

$$tg\|X \dots y + 3 = 0$$

Analogno se dobije, da je u točki $T_y(\sqrt[3]{4}, -2)$ tangenta

$$tg\|Y \dots x - \sqrt[3]{4} = 0$$

Sjecište krivulje (67) i asimptote (68) je u točki $S_{asc}(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. Možemo još pokazati, da je $T^{(x)}(0, -3)$ točka infleksije. Izneseno se također vidi na slici.

Zadatak 7.14. Nacrtajmo krivulju

$$C \dots F \equiv x^2 + y^2 - x^2y^2 = 0.$$

Rješenje Z6.14. (Sl.7.13.) Sustav jednačbi

$$F_x \equiv 2x - 2xy^2 = 0, \quad F_y \equiv 2y - 2x^2y = 0$$

ima rješenja $S_0(0,0) \in C, S_{1,2,3,4}(\pm 1, \pm 1) \notin C$. Druge derivacije funkcije u singularnoj točki S_0 su jednake

$$F_{xx}^0 \equiv (2 - 2y^2)_0 = 2, \quad F_{xy}^0 \equiv (-4xy)_0 = 0, \quad F_{yy}^0 \equiv (2 - 2x^2)_0 = 2,$$

Dakle radi se o singularitetu drugoga reda, odnosno o izoliranoj točki, jer je $(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = -4 < 0$. S koordinatnim osima je jedino presjecište sama singularna točka. Graf krivulje je simetričan s obzirom na koordinatne osi i s obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta, odnosno drugog i četvrtog, kvadranta ($y = \pm x$). Evidentno je, da nema kosih asimptota, te da postoje po dvije asimptote paralelne s koordinatnim osima;

$$tg_{1,2}\|X \dots y \pm 1 = 0, \quad tg_{1,2}\|Y \dots x \pm 1 = 0.$$

Nadalje simetrale prvog i trećeg, odnosno drugog i četvrtog, kvadranta sjeku krivulju u četiri tjemena

$$T_{1,2,3,4}(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}),$$

a u njima su jednadžbe tangenti

$$tg_{T_{1,2,3,4}} \dots y = \pm x \pm 2\sqrt{2}.$$

Domena i konomena zadane krivulje su identične, dakle

$$D_C \equiv K_C \equiv \langle -\infty, -1 \rangle \cup \{0\} \cup \langle 1, \infty \rangle.$$

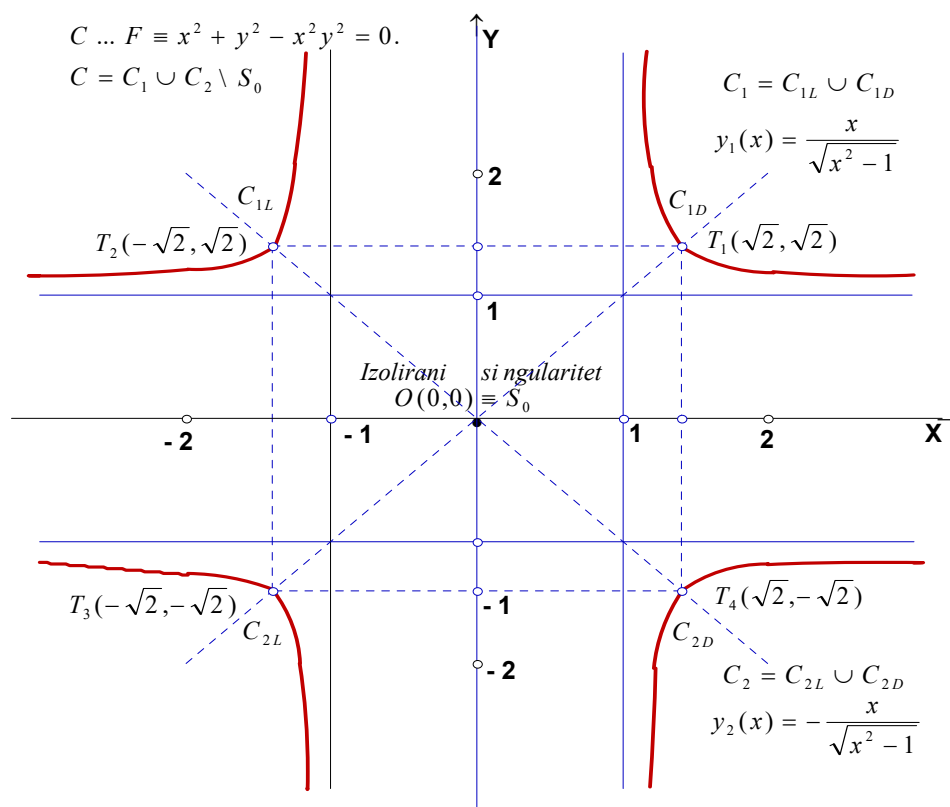
Zadanu krivulju možemo rastaviti u dvije krivulje s po dvije grane, koje ne sadrže izoliranu točku, dakle:

$$C_1 \dots y_1(x): D_{C_1} \rightarrow K_{C_1}, \quad C_2 \dots y_2(x): D_{C_2} \rightarrow K_{C_2},$$

za

$$y_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad y_2(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

gdje je $D_{C_1} \equiv D_{C_2} \equiv K_{C_1} \equiv K_{C_2} \equiv \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$. Prema tome $C = C_1 \cup C_2 \cup S_0$. Možemo još grafove funkcija rastaviti na lijevu i desnu granu, dakle $C_1 = C_{1L} \cup C_{1D}$, $C_2 = C_{2L} \cup C_{2D}$. Graf promatrane funkcije je prikazan na Sl.7.13.



Slika 7.13.

Zadatak 7.15. Nacrtajmo krivulju

$$C \dots F \equiv x^2 y^2 - x + y^2 = 0. \quad (69)$$

Rješenje Z7.15. (Sl. 7.14.) Zadanu krivulju možemo rastaviti na dvije funkcije

$$C_{1,2} \dots y_{1,2}(x) = \pm \sqrt{\frac{x}{x^2+1}},$$

gdje je

$$C = C_1 \cup C_2; C_1 \dots y_1(x): [0, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right], C_2 \dots y_2(x): (0, \infty) \rightarrow \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Jasno je, da smo vrijednost apscise $x = 0$ morali pridjeliti domeni samo jedne funkcije.

Iz (69) se vidi da krivulja nema kosih i vertikalnih asimptota, dok je sama os apscisa horizontalna asimptota. Sustav jednažbi

$$F_x \equiv 2xy^2 - 1 = 0, \quad F_y \equiv 2x^2y + 2y = 0,$$

nema realnih rješenja, dakle ne postoje singulariteti. Rješenje sustava $F_y \equiv 0, F \equiv 0$ su koordinate točke $T_y(0,0)$, dakle os Y je tangenta na tu krivulju u ishodištu. No, krivulja ima dvije tangente paralelne sa osi X u točkama $T_{x_1, x_2} \left(1, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, što se dobije rješavanjem sustava jednažbi $F_x \equiv 0, F \equiv 0$. Budući je $F(x, -y) = F(x, y)$, to povlači da je graf krivulje C simetričan s obzirom na os X , kao što se vidi na slici.

No, mogli smo zadanu krivulju rastaviti u dvije funkcije u smjeru osi Y , s time da se druga funkcija sastoji od dvije grane. Taj prikaz bi mogao izgledati ovako:

$$C_3 \dots x_1(y): \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \rightarrow [0, 1],$$

gdje je

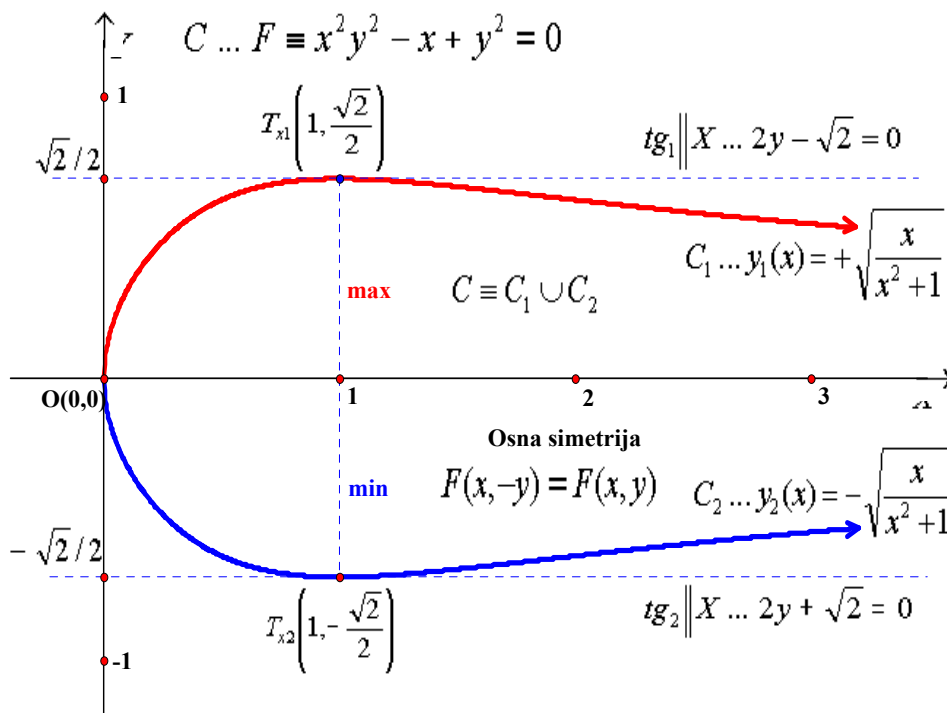
$$x_1(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y^4}}{2y^2} = \frac{2y^2}{1 + \sqrt{1 - 4y^4}};$$

$$C_4 = C_{4D} \cup C_{4G} \dots x_2(y): \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \rightarrow \langle 1, \infty \rangle,$$

gdje je

$$x_2(y) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y^4}}{2y^2} = \frac{2y^2}{1 - \sqrt{1 - 4y^4}}.$$

Svakako da je $C = C_1 \cup C_2 = C_3 \cup C_4 = C_3 \cup C_{4D} \cup C_{4G}$



Slika 7.14.

Zadatak 7.16. Nacrtajmo krivulju

$$C \dots F \equiv (y - 2x^2)^2 + x^2 - 2 = 0. \tag{70}$$

Rješenje Z7.16. (Sl.7.15.) $F(x, y) \equiv F(-x, y)$, dakle graf krivulje je simetričan s obzirom na os Y . Ako u (70) uvrstimo $y = 0$ slijedi jednačba $4x^4 + x^2 - 2$, čiji su realni korijeni apscise presječnih točaka krivulje sa osi X , dakle $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{8}}$, a same točke su

$$S_{1,2}^{(x)} \left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{8}}, 0 \right) \approx S_{1,2}^{(x)} (\pm 0.77, 0).$$

Analogno se dobiju presječne točke sa osi Y , dakle

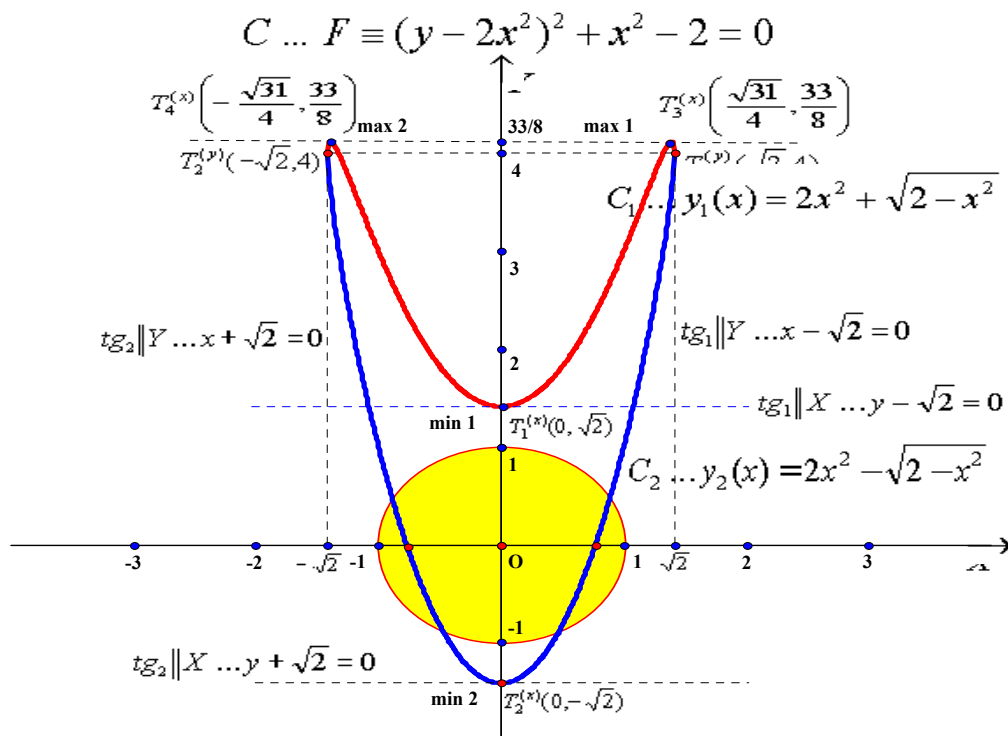
$$S_{1,2}^{(y)} (0, \pm\sqrt{2}) \approx S_{1,2}^{(y)} (0, \pm 1.41).$$

Iz razvijenog oblika jednačbe

$$F(x, y) \equiv y^2 - 4yx^2 + 4x^4 + x^2 - 2 = 0$$

je vidljivo da krivulja nema asimptota, jer je

$$\varphi_0(x_0) \equiv 1 \neq 0, \psi_0(y_0) \equiv 4 \neq 0, k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{F(x,y)}{x^3} = 0.$$



Slika 7.15.

Rješenje sustava jednažbi $F_x \equiv 0, F_y \equiv 0$ je $S_0(0,0) \notin C$, dakle krivulja nema singularne točke.

Potražimo tangente paralelne sa osi X . Točke u kojima one tangiraju krivulju dobiju se ako riješimo sustav jednažbi $F_x \equiv 0, F \equiv 0$, tj.

$$F_x \equiv -8xy + 16x^3 + 2x = 0, F \equiv y^2 - 4x^2y + 4x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Rješenja toga sustava su

$$T_{1,2}^{(x)}(0, \pm\sqrt{2}) \approx T_{1,2}^{(x)}(0, 1.41), T_{3,4}^{(x)}\left(\pm\frac{\sqrt{31}}{4}, \frac{33}{8}\right) \approx T_{3,4}^{(x)}(\pm 1.39, 4.13).$$

Na osnovi dobivenog imamo, da su tangente paralelne sa osi X dane jednažbama

$$tg_{1,2} || X \dots y \pm \sqrt{2} = 0, tg_{3,4} || X \dots 8y - 33 = 0 \text{ (one su dvostruke)}.$$

Sada potražimo tangente paralelne sa osi Y . Točke u kojima one tangiraju krivulju dobiju se ako riješimo sustav jednažbi $F_y \equiv 0, F \equiv 0$, tj.

$$F_y \equiv 2y - 4x^2 = 0, F \equiv y^2 - 4x^2y + 4x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Rješenja toga sustava su

$$T_{1,2}^{(y)}(\pm\sqrt{2}, 4).$$

Na osnovi dobivenog imamo, da su tangente paralelne sa osi Y dane jednadžbama

$$tg_{1,2} \parallel Y \dots x \pm \sqrt{2} = 0.$$

Svakako, možemo provjeriti da je

$$T_{1,2}^{(x)}(0, \pm\sqrt{2}) \in C, T_{3,4}^{(x)}\left(\pm\frac{\sqrt{31}}{4}, \frac{33}{8}\right) \in C, T_{1,2}^{(y)}(\pm\sqrt{2}, 4) \in C.$$

Graf promatrane funkcije je prikazan na Sl.7.15.

Napomenimo, da smo zadanu krivulju mogli rastaviti u dvije funkcije npr.:

$$C_1 \dots y_1(x): [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \rightarrow [\sqrt{2}, 4],$$

gdje je

$$y_1(x) = 2x^2 + \sqrt{2 - x^2}; \quad (71a)$$

$$C_2 \dots y_2(x): \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle \rightarrow [-\sqrt{2}, 4],$$

gdje je

$$y_2(x) = 2x^2 - \sqrt{2 - x^2}. \quad (71b)$$

Iz ovako definiranih funkcija slijedi da je $C = C_1 \cup C_2$ i $C = C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Zgodno je još dokazati, da je površina unutar ove zatvorene krivulje jednaka $P(intC) = 2\pi$, gdje je ustvari $intC = \{(x, y) \mid |(y - 2x^2)^2 + x^2| \leq 2\}$. Iz slike slijedi

$$P(intC) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (y_1(x) - y_2(x)) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (y_1(x) - y_2(x)) dx.$$

Ako tu uvrstimo (71a) i (71b) dobivamo da je $P(intC) = 4 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx$. Prijedemo li na novu varijablu vezom $x = \sqrt{2} \cos t$, tada je

$$P(intC) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 4 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi,$$

što smo i očekivali. Zanimljivo je, da je površina nutrine krivulje točno dvaputa veća od površine jediničnog kruga, to nam je "jasno" i iz slike.

Zadatak 7.17. Nađimo singularitete, površinu petlje i nacrtajmo graf *Bernoullijeve lemniskate*

$$C \dots F \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2).$$

Rješenje Z7.17.(Sl.7.16.) Krivulja siječe os apscisa u tačkama $S_0(0,0)$, $S_{x_1, x_2}(\pm a\sqrt{2}, 0)$, a os ordinata samo u tački $S_0(0,0)$. Iz razvijenog oblika jednadžbe

$$C \dots F \equiv x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 = 0.$$

se vidi, nakon diobe s x^4 i graničnog prijelaza $x \rightarrow \pm\infty$ dobivamo, da je $3k^4 + 1 = 0$, dakle ne postoje kose asimptote, jer ova jednačba nema realnih rješenja. Nadalje, vidljivo je da ne postoje ni paralelne ni vertikalne asimptote.

Ako riješimo sustav jednačbi

$$F_x \equiv x^3 + xy^2 - a^2x = 0, \quad F_y \equiv y^3 + x^2y + a^2y = 0,$$

tada dobijemo točke $S_0(0,0) \in C$, $S_{01,02}(\pm a, 0) \notin C$. Dakle, mogući singularitet drugog reda je samo točka $S_0(0,0) \equiv O$. Vrijednosti drugih derivacija u toj točki su

$$F_{xx}^0 \equiv -a^2, F_{xy}^0 \equiv 0, F_{yy}^0 \equiv a^2.$$

Dakle

$$\text{sgn}|F_{xx}^0| + \text{sgn}|F_{xy}^0| + \text{sgn}|F_{yy}^0| = 2,$$

a to znači da postoji singularitet drugog reda. Relacija $(F_{xy}^{01})^2 - F_{xx}^{01}F_{yy}^{01} = a^4 > 0$ povlači da krivulja ima uzao, pa iz (8) slijedi $k_{01,02} = \pm 1$, dakle $tg_{S_0} \dots y = \pm x$.

Tangente paralelne sa osi apscisa nalaze se u točkama, koje su rješenje sustava jednačbi

$$F_x \equiv x^3 + xy^2 - a^2x = 0, \quad F \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2).$$

Točke koje dolaze u obzir su

$$T_{x,1,2,3,4} \left(\pm \frac{a\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{a}{2} \right),$$

a jednačbe su

$$as_{1,2} \|X \dots 2y - a = 0, \quad as_{3,4} \|X \dots 2y + a = 0.$$

Ako riješimo sustav jednačbi;

$$F_y \equiv y^3 + x^2y + a^2y = 0, \quad F \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$$

dobijemo točke $T_{Y1,2}(\pm a\sqrt{2}, 0)$ u kojima su tangente paralelne sa osi ordinata, a jednačbe su $as_{1,2} \|Y \dots x \pm a\sqrt{2} = 0$. Domena i kodomena zadane krivulje su $D_C = [-a\sqrt{2}, a\sqrt{2}]$, $K_C = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$.

Jasno je, da jednačbu krivulje možemo rastaviti na dvije disjunktne funkcije, gornju funkciju i donju funkciju. Gornju funkciju možemo definirati kao

$$C_1 \dots y_1(x): [-a\sqrt{2}, a\sqrt{2}] \rightarrow \left[0, \frac{a}{2}\right],$$

gdje je

$$y_1(x) = +\sqrt{2\sqrt{2x^2 + 1} - (x^2 + 1)},$$

dakle donja funkcija je dana s

$$C_2 \dots y_2(x): \langle -a\sqrt{2}, a\sqrt{2} \rangle \rightarrow \left[0, \frac{a}{2}\right]$$

gdje je

$$y_2(x) = -\sqrt{2\sqrt{2x^2 + 1} - (x^2 + 1)}$$

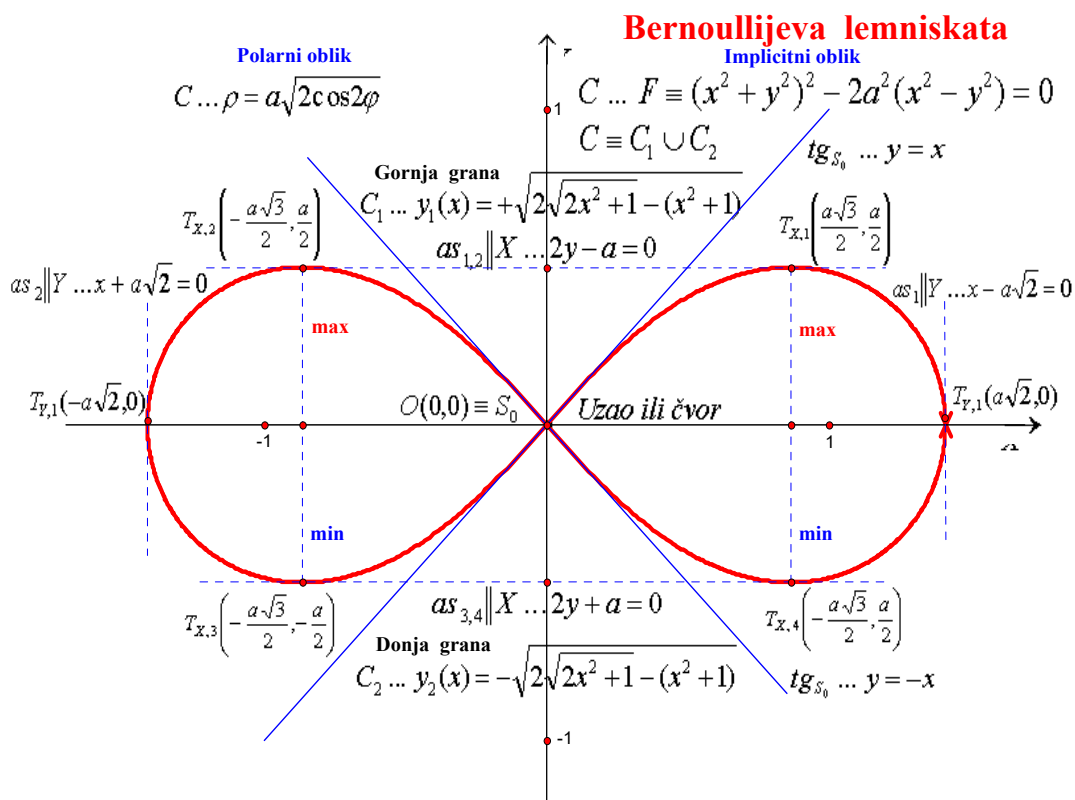
Sada ćemo pokazati da je $P(intC) = a^2$, tj. površina svake petlje je $a^2/2$. Iz simetrije grafa krivulje imamo da je

$$P(intC) = 4 \int_0^{a\sqrt{2}} y_1(x) dx = 4 \int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{2\sqrt{2x^2 + 1} - (x^2 + 1)} dx = \dots = a^2,$$

a postupak smo skratili, jer ima dosta ispisa. No, do istog rezultata možemo doći, ako upotrijebimo polarni oblik lemniskate, dakle imamo

$$P(intC) = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi = (a^2 \cos 2\varphi) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = a^2. \quad (72)$$

Zanimljivo je napomenuti, da se iz (72) vidi, da je netranscendentnost mjernog broja parametra a nužna i dovoljna za netranscendentnost mjernog broja površine petlje lemniskate.



Slika 7.16.

Literatura

- [1] D. Blanuša. *Viša matematika, I dio, Drugi svezak*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.
- [2] I. N. Bronštejn i K. A. Semendjajev. *Matematički priručnik*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
- [3] D. S. Mitrinović. *Zbirka zadataka iz matematike*. Naučna knjiga, Beograd, 1962.
- [4] B. Pavković i D. Veljan. *Elementarna matematika I, II*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1992/1995.
- [5] P. Svirčević. *Funkcije koje predstavljaju parabolu ili hiperbolu*. Nastava matematike, 62(2-3), Beograd, 2017.
- [6] P. Svirčević. *Algebarske periodične funkcije*. Drugi kongres nastavnika matematike Republike Hrvatske, HMD, Zagreb, 2004.
- [7] *The Geometer's Sketchpad* (upotrebljeni program za crteže)
- [8] Sl. 2.6., Sl. 2.7. i Sl.4.4. su posuđene iz Wikipedije.