MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXV (1)(2019), 1-8 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1901001A

JOŠ JEDAN DOKAZ PTOLEMEJEVE TEOREME I NJENA ZNAČAJNA PRIMJENA

Dr. Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

Sažetak: U ovom radu je dat jedan novi dokaz poznate Ptolemejeve teoreme koristeći trigonometriju te dokaz Stjuartove teoreme pomoću Ptolemejeve teoreme i dva zadatka.

Ključne riječi i izrazi: Ptolemejeva teorema, trigonometrija, tetivni četverougao, Stjuartova teorema, sinusna teorema, potencija tačke, zadaci.

ANOTHER EVIDENCE OF THE PTOLEMY'S THEOREM AND ITS SIGNIFICANT APPLICATION

Abstract: In this paper we give one new proof of well known Ptolemy's theorem using the trigonometry, the proof of the Stewart's theorem by the aid of the Ptolemy's theorem and two problems.

Kwy words and phrases: Ptolemy's theorem, trigonometry, the cyclic quadrilateral, Stewart's theorem, the law of sines, power of a point, the problems.

AMS Subject classification (2010): **51M04**, **97G40**
ZDM Subject classification (2010): **G40**

U geometriji koja se odnosi na četverougao dobro je poznata Ptolemejeva teorema[1] koja glasi:

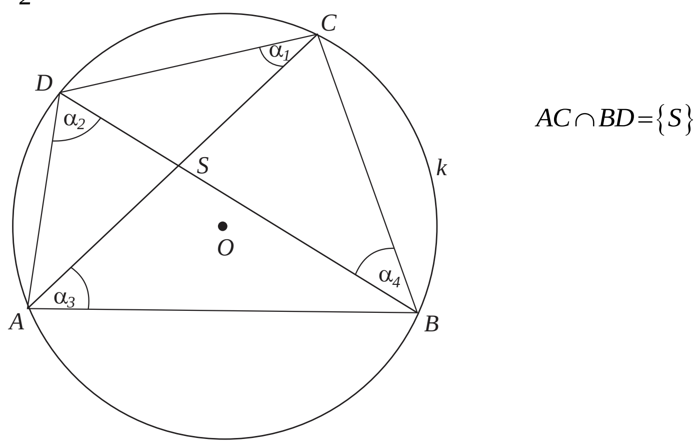
Proizvod dužina dijagonala tetivnog četverougla jedanak je zbiru proizvoda dužina naspramnih stranica tog četverougla.

---

[1] Claudius Ptolemy (*Klaúdios Ptolemaîos*, *Claudius Ptolemaeus*; oko. AD 100 – oko. 170) , starogrčki geograf, astronom i matematičar.

Tri razna dokaza ove teoreme se mogu naći u [1], str. 370-384. No, mi ćemo sada dati još jedan dokaz koristeći trigonometriju.

Dokaz: Posmatraćemo četverougao $ABCD$ upisan u krug k. Uzećemo da je (Slika 1). poluprečnik tog kruga $R=\frac{1}{2}$, tj. prečnik $2R=1$ ne umanjujući opštost pri tome.



Slika 1.

Neka su $\angle ACD = \alpha_1$ i $\angle CBD = \alpha_4$. Koristeći poznatu činjenicu da su periferijski uglovi nad istim lukom (tetivom) jednaki, imamo sljedeće jednakosti:

$$\angle ABD = \alpha_1 ,\ \angle ACB = \alpha_2 ,\ \angle BDC = \alpha_3 \text{ i } \angle DAC = \alpha_4 .$$

Pošto je $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$, to sada dobijamo:

$$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=360^0 ,$$

tj.:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=180^0 . \tag{1}$$

Primjenjujući sinusnu teoremu na trouglove $\Delta ACD, \Delta ABD, \Delta BAC$ i ΔDBC, imamo:

$$\frac{AD}{\sin\alpha_1}(=2R)=1, \frac{AB}{\sin\alpha_2}=1, \frac{BC}{\sin\alpha_3}=1 \text{ i } \frac{CD}{\sin\alpha_4}=1 ,$$

a odavde

$$AD=\sin\alpha_1, AB=\sin\alpha_2, BC=\sin\alpha_3 \text{ i } CD=\sin\alpha_4 . \tag{2}$$

Na sličan način koristeći sinusnu teoremu dobijamo iz gore pomenutih trouglova:

$$\frac{AC}{sin(\alpha_2+\alpha_3)}=\frac{AC}{sin(\alpha_1+\alpha_4)}=1 \quad \text{i} \quad \frac{BD}{sin(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{BD}{sin(\alpha_3+\alpha_4)}=1,$$

a odavde:

$$AC=sin(\alpha_2+\alpha_3)=sin(\alpha_1+\alpha_4) \ \text{ i } \ BD=sin(\alpha_1+\alpha_2)=sin(\alpha_3+\alpha_4). \tag{3}$$

Sada ćemo dokazati da važi jednakost:

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD, \tag{4}$$

odnosno zbog (2) i (3):

$$sin\alpha_2\, sin\alpha_4+sin\alpha_3\, sin\alpha_1=sin(\alpha_1+\alpha_4)sin(\alpha_3+\alpha_4). \tag{5}$$

Koristit ćemo sada poznate formule iz trigonometrije:

$$sin\alpha_2\, sin\alpha_4=\frac{1}{2}\left[cos(\alpha_2-\alpha_4)-cos(\alpha_2+\alpha_4)\right],$$
$$sin\alpha_3\, sin\alpha_1=\frac{1}{2}\left[cos(\alpha_3-\alpha_1)-cos(\alpha_3+\alpha_1)\right],$$
$$sin(\alpha_1+\alpha_4)sin(\alpha_3+\alpha_4)=\frac{1}{2}\left[cos(\alpha_1-\alpha_3)-cos(\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_4)\right].$$

Imamo, sada, iz trouglova ΔASD i ΔCSD:

$$\angle ASD = 180^0-(\alpha_2+\alpha_4) \ \text{ i } \ \angle CSD = 180^0-(\alpha_1+\alpha_3)$$

a odavde:

$$cos\angle ASD = cos[180^0-(\alpha_2+\alpha_4)] = -cos(\alpha_2+\alpha_4) \tag{6}$$

te

$$cos\angle CSD = cos[180^0-(\alpha_1+\alpha_3] = \ = -cos(\alpha_1+\alpha_3)$$

$$\Leftrightarrow \ cos(180^0-\angle ASD) = -cos(\alpha_1+\alpha_3)$$

$$\Leftrightarrow \ -cos\angle ASD = -cos(\alpha_1+\alpha_3) \tag{7}$$

Nakon sabiranja (6) i (7) dobijamo:

$$0=-cos(\alpha_2+\alpha_4)-cos(\alpha_1+\alpha_3),$$

tj.:

$$cos(\alpha_2+\alpha_4)+cos(\alpha_1+\alpha_3)=0. \tag{8}$$

Sada imamo na osnovu (1):

$$cos(\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_4)=cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_4)=cos\left(180^0-\alpha_2+\alpha_4\right)=$$

$$=cos\left[180^0-(\alpha_2-\alpha_4)\right]=-cos(\alpha_2-\alpha_4). \tag{9}$$

Jednakost (4) je sada ekvivalentna sa jednakošću:

$$\frac{1}{2}\left[cos(\alpha_2-\alpha_4)-cos(\alpha_2+\alpha_4)\right]+\frac{1}{2}\left[cos(\alpha_3-\alpha_1)-cos(\alpha_3+\alpha_1)\right]=$$
$$\frac{1}{2}\left[cos(\alpha_1-\alpha_3)-cos(\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_4)\right]$$

$$\Leftrightarrow cos(\alpha_2-\alpha_4)+cos(\alpha_3-\alpha_1)-\left[cos(\alpha_2+\alpha_4)+cos(\alpha_1+\alpha_3)\right]=cos(\alpha_1-\alpha_3)-cos(\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_4),$$

a odavde zbog (8) i (9):

$$cos(\alpha_2-\alpha_4)+cos(\alpha_3-\alpha_1)=cos(\alpha_1-\alpha_3)+cos(\alpha_2-\alpha_4),$$

što je tačno.

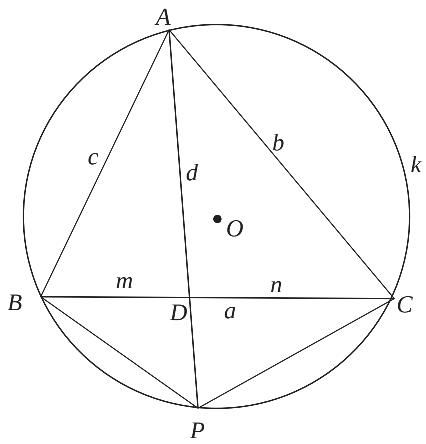
Dakle, jedankost (5) je tačna, tj. jednakost (4) je tačna, čime je Ptolemejeva teorema dokazana. □

Koristeći Ptolemejevu teoremu, sada ćemo dokazati poznatu Stjuartovu teoremu[2] koja glasi:

Neka tačka D pripada stranici BC trougla ΔABC *i neka je* $\boldsymbol{m=DB, n=DC}$ *i* $\boldsymbol{d=AD}$. *Tada važi jednakost*:

$$\boldsymbol{a\left(d^2+mn\right)=b^2m+c^2n}.$$

Dokaz: Neka prava AD siječe kružnicu k opisanu trouglu ΔABC u tački P (Slika 2).



Slika 2.

[2] Stjuart (Matthew Stewart, 1717. - 1785.), škotski matematičar

Uočimo slične trouglove $\Delta BPD : \Delta ADC$ i $\Delta CPD : \Delta ADB$, odakle slijedi:

$$\frac{BP}{BD}=\frac{AC}{AD} \text{ i } \frac{CP}{CD}=\frac{AB}{AD},$$

odnosno

$$\frac{BP}{m}=\frac{b}{d} \text{ i } \frac{CP}{n}=\frac{c}{d}, \text{ tj.:}$$

$$BP=\frac{bm}{d} \text{ i } CP=\frac{cn}{d}. \tag{10}$$

Koristeći teoremu o potenciji tačke D u odnosu na krug k imamo:

$$DP\cdot AD=BD\cdot CD, \text{ tj.:}$$
$$DP\cdot d=m\cdot n$$

odnosno

$$DP=\frac{mn}{d}. \tag{11}$$

Primjenjujući Ptolemejevu teoremu na tetivni četverougao $ABPC$ dobijamo:

$$BC\cdot AP=AC\cdot BP+AB\cdot CP,$$

a odavde na osnovu (10) i (11):

$$a\left(d+\frac{mn}{d}\right)=b\cdot\frac{bm}{d}+c\cdot\frac{cn}{d}$$

$$\Leftrightarrow a\left(d^2+mn\right)=b^2m+c^2n. \qquad \square$$

Napomena 1. U literaturi (npr. u [1]) nalazi se dokaz Stjuartove teoreme; najčešće se koristi Pitagorina teorema (više puta) i Karnoova teorema[3], a koji je nešto duži od ovog dokaza koga smo upravo predstavili.

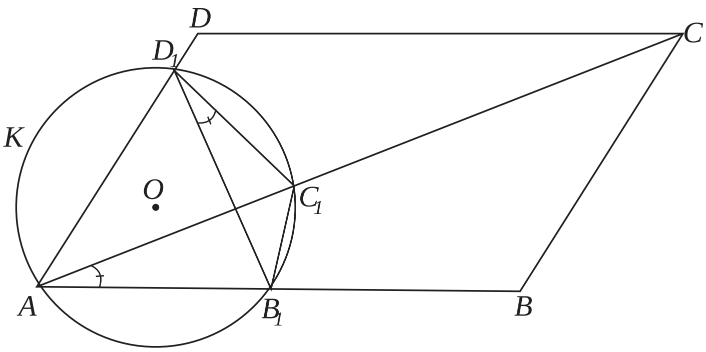
Na kraju ćemo dati i dva zanimljiva zadatka za čije rješavanje ćemo koristiri Ptolemejevu teoremu.

Zadatak 1. Krug K prolazi kroz tjeme A paralelograma $ABCD$ i pri tome siječe poluprave AB, AC i AD redom u tačkama B_1, C_1 i D_1. Dokazati da je tada:

$$AC\cdot AC_1=AB\cdot AB_1+AD\cdot AD_1.$$

[3] Lazare Nicolas Marguerite, *comte* Carnot (1753–1823), francuski matematičar

Rješenje:



Slika 3.

Primjenom Ptolemejeve teoreme na tetivni četverougao $AB_1C_1D_1$ dobijamo da je (Slika 3).

$$AC_1 \cdot B_1D_1 = AB_1 \cdot C_1D_1 + AD_1 \cdot B_1C_1 . \tag{12}$$

Trouglovi ΔABC i ΔB_1C_1D su slični jer su uglovi $\angle BAC$ i $\angle B_1C_1D_1$ jednaki kao periferijski uglovi nad istim lukom $\widehat{B_1C_1}$ (tetivom B_1C_1), dok su uglovi $\angle ABC$ i $\angle B_1C_1D_1$ jednaki jer se i jedan i drugi sa uglom $\angle BAD$ dopunjavaju do 180^0. Iz navedene sličnosti trouglova slijedi proporcija:

$$\frac{B_1D_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$$

$$\Rightarrow B_1D_1 = k \cdot AC;\ C_1D_1 = k \cdot AB;\ B_1C_1 = k \cdot BC . \tag{13}$$

Sada iz (12) i (13) slijedi:

$$AC_1 \cdot k \cdot AC = AB_1 \cdot k \cdot AB + AD_1 \cdot k \cdot BC / :k$$

$$\Rightarrow AC \cdot AC_1 = AB \cdot AB_1 + BC \cdot AD_1 ,$$

a odavde zbog $BC = AD$:

$$AC \cdot AC_1 = AB \cdot AB_1 + AD \cdot AD_1 .$$ ♦

Zadatak 2. U oštrouglom trouglu ΔABC su u, v i w rastojanja centra opisanog kruga O od stranica a, b i c. Dokazati da važi nejednakost:

$$3r \le u + v + w \le \frac{3}{2} R ,$$

gdje su R i r poluprečnici opisanog i upisanog kruga tog trougla.

Rješenje: Očigledno važi jednakost (Slika 4):

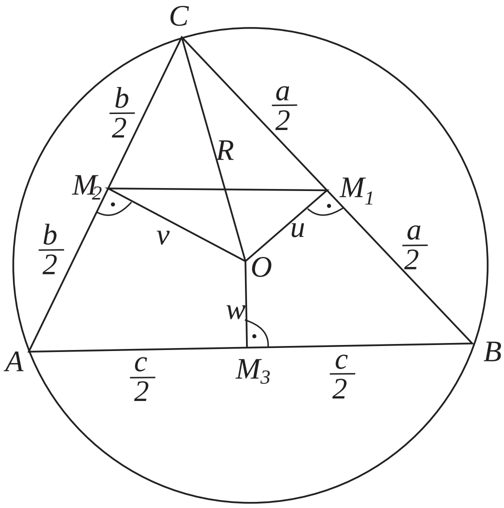
$$P_{\Delta BOC}+P_{\Delta COA}+P_{\Delta AOB}=P_{\Delta ABC},$$

odnosno

$$\frac{au}{2}+\frac{bv}{2}+\frac{cw}{2}=rs\,;\quad \left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

a odavde

$$au+bv+cw=(a+b+c)r\,. \tag{14}$$



Slika 4.

Imamo da je $M_1M_2=\frac{c}{2}$ (srednja linija trougla ΔABC) i $OC=R$ (gdje je R poluprečnik opisanog kruga trougla ΔABC).

Četverougao OM_1CM_2 je tetivni pa je na osnovu Ptolemejeve teoreme:

$$OM_1\cdot CM_2+OM_2\cdot CM_1=M_1M_2\cdot OC\,,$$

odnosno

$$u\cdot\frac{b}{2}+v\cdot\frac{a}{2}=\frac{c}{2}\cdot R\,,$$

tj.:

$$ub+va=cR\,. \tag{15}$$

Analogno, imamo sljedeće jednakosti:

$$vc+wb=aR \tag{16}$$

i

$$wa+uc=bR . \tag{17}$$

Sabirajući jednakosti (14), (15), (16) i (17), dobijamo jednakost

$$(a+b+c)(u+v+w)=(a+b+c)(R+r),$$

a odavde nakon dijeljenja sa $a+b+c$:

$$u+v+w=R+r . \tag{18}$$

Koristeći poznatu Ojlerovu nejednakost

$$R \geq 2r,$$

(čijih se više dokaza može naći u [1], op.a.) iz nje slijede sljedeće nejednakosti:

$$R+r \geq 3r \text{ i } R+r \leq \frac{3}{2}R . \tag{19}$$

Sada iz (18) i (19) slijedi nejednakost:

$$3r \leq u+v+w \leq \frac{3}{2}R,$$

što je trebalo dokazati.

Vrijedi jednakost ako i samo ako je $R=2r$, tj. kada je u pitanju jednakostranični trougao.

♦

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić. *Matematika za nadarene*. Sarajevo: Bosanska riječ, 2005.
[2] V. Blagojević. *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, I. Sarajevo, 2002.
[3] E. Specht. *Geometria - scientiae atlantis*, Otto-von-Guericke Universität, Magdeburg, 2001.