MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIV (3)(2018), 147-151 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1803147A

ZAŠTO KOMPLIKOVANO KADA MOŽE JEDNOSTAVNO

Dr. Šefket Arslanagić, Sarajevo[1]

Sažetak. U ovom radu se posmatra jedna funkcija sa dvije primjenljive koja glasi:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\ ;\ x,y\in[-1,1]$$

i traži njena najveća vrijednost, tj. f_{max}.
Data su tri rješenja ovog zadatka i to jedno koj je složeno i dva mnogo jednostavnija, takoreći elementarna.

Ključne riječi i izrazi: funkcija dvije promjenljive, maksimum funkcije, parcijalni izvodi funkcije, nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine.

WHY COMPLICATED WHEN IT CAN SIMPLY

Abstract. In this paper we consider one function with two variables:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\ ;\ x,y\in[-1,1]$$

and we search hers maximum value, i.e. f_{max}. We give three solutions of this problem - one slolution is complicated and two solutions are very simple, so to speak elementary.

Key words and phrases: the function of two variables, maximum of the function, partial derivatives of the function, inequality between arithmetic and quadratic mean.

AMS Subject Cassification (2010): 97 F 50
ZDM Subject Cassification (2010): F 50, N 50

[1] University of Sarajevo, Faculty of sciences and mathematics, Department of Mathematics, Zmaja od Bosne 35, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina; e-mail: asefket@pmf.unsa.ba

U svojoj dugogodišnjoj nastavnoj praksi u srednjoj školi i na raznim fakultetima ponekad sam se susretao sa slučajevima da neki od učenika ili studenata riješi neki od zadataka na izuzetno lijep i elegantan način, sasvim drugačije nego što je rješenje u nekoj od zbirki zadataka ili pak na nekom od ispita iz matematike. Ja sam uvijek takve učenike ili studente pohvalio i nagradio većom ocjenom. Upravo, u ovom radu ćemo dati jedan takav primjer. U pitanju je sljedeći zadatak:

Odrediti najveću vrijednost funkcije

$$\boldsymbol{f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}} \, .$$

Rješenje 1: Funkcija f je definisana u kvadratu $\{(x,y)|-1\le x\le 1, -1\le y\le 1\}$. S obzirom da je funkcija f parna i po x i po y, dovoljno je da se ograničimo na kvadrat$\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. Posmatraćemo najprije ekstremume (maksimum) funkcije f u unutrašnjosti kvadrata $\{(x,y)|0<x<1, 0<y<1\}$. Za ovo rješenje ćemo koristiti diferencijalni račun za funkcije dvije promjenljive.
Imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{te} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \, .$$

Iz uslova $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ dobijamo:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0 \quad \text{i} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=0 \, .$$

Pošto smo uzeli da je $x\neq 0$ i $y\neq 0$ (kao i $x\neq 1,\ y\neq 1$); to dobijamo iz gornjih jednakosti:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}=0 \, ,$$

tj.

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1-x^2} \quad \text{i} \quad \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1-y^2} \, ,$$

odnosno

$$x^2+y^2=1-x^2 \quad \text{i} \quad x^2+y^2=1-y^2 \, ,$$

a odavde

$$1-x^2=1-y^2 \text{, tj.}$$

$$x^2 = y^2 ,$$

odnosno (zbog $x>0$ i $y>0$):

$$x=y .$$

Sada dobijamo da je $x^2+x^2=1-x^2$, te $3x^2=1$, tj. $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Dakle, immao stacionarnu tačku $M_o\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ date funkcije f.

Dalje dobijamo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}+\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}-\frac{y^2}{\left(1-y^2\right)^{3/2}}+\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} .$$

Sada imamo:

$$r=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_o}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ t=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_o}=-\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ i } s=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{M_o}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

a odavde:

$$\Delta=rt-s^2=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=\frac{3}{2}-\frac{3}{8}=\frac{9}{8}>0,$$

a zbog $r<0$ slijedi da data funkcija f ima maksimum koji iznosi:

$$f_{max}=f_{M_o}=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+\sqrt{1-\frac{1}{3}}+\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}=3\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{6} .$$

Dakle,

$$f_{max}=\sqrt{6} \text{ za } x=y=\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ tj.}$$

$$f_{max}=\sqrt{6}$$

u tačkama $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ zbog parnosti funkcije f i po x i po y.

Napomena 1. U tačkama $(0,0),(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$ funkcija f ima vrijednost 2, a u tačkama $(1,1),(1,-1),(-1,1)$ i $(-1,-1)$ funkcija f ima vrijednost $\sqrt{2}$. Odavde zaključujemo da je $f_{min}=\sqrt{2}$ u tačkama $(1,1),(1,-1),(-1,1)$ i $(-1,-1)$.

Očigledno, u ovom rješenju ima puno posla i poznavanja bitnih činjenica vezanih za ekstremne vrijednosti funkcije dvije promjenljive.

Sada ćemo dati još dva jednostavna rješenja ovog zadatka koja se temelje na poznavanju nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine za tri pozitivna broja koja glasi:

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}};\ \left(a_1,a_2,a_3>0\right). \tag{1}$$

Rješenje 2: Vodeći računa da je $-1\le x\le 1$ i $-1\le y\le 1$, odnosno $0\le x\le 1$ i $0\le y\le 1$ zbog parnosti funkcije f i po x i po y imamo na osnovu nejednakosti (1):

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}}{3}\le\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2+\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\le 3\sqrt{\frac{x^2+y^2+1-x^2+1-y^2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\le 3\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\le\sqrt{6}\ ,$$

tj.

$$f_{max}=\sqrt{6}$$

za $x=y=\frac{\sqrt{3}}{3}$, odnosno $x=\frac{\sqrt{3}}{3}, y=-\frac{\sqrt{3}}{3}; x=-\frac{\sqrt{3}}{3}, y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x=y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ što smo detaljno obrazložili u Rješenju 1.

Rješenje 3. I ovo rješenje će se temeljiti na nejednakosti (1). Zbog činjenice da je $0\le x\le 1$ i $0\le y\le 1$ možemo uvesti trigonometrijsku smjenu:

$$x=\sin\alpha,\ y=\sin\beta;\ \left(\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Sada data funkcija f glasi:

$$f(\alpha,\beta)=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}+\cos\alpha+\cos\beta\,.$$

Dobijamo sada iz nejednakosti (1):

$$\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}+\cos\alpha+\cos\beta}{3}\le\sqrt{\frac{\left(\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}\right)^2+\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}+\cos\alpha+\cos\beta\le 3\sqrt{\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}+\cos\alpha+\cos\beta\le 3\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}+\cos\alpha+\cos\beta\le\sqrt{6}\text{, tj.}$$

$$f_{max}=\sqrt{6}$$

za $\sin\alpha=\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$, tj. $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Na kraju, mislim da je naslov ovog rada opravdan i jasan budućim čitaocima.

Literatura

[1] Š. Arsanagić. *Matematika za nadarene*. Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arsanagić. *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike.* Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] M. Anđić. *Matematika 2, Teoreme, definicije, primjeri, zadaci*, Univerzitet Mediteran, Podgorica, 2009.

[4] D.Đ. Tošić. *Elementi više matematike II.*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2014.