MAT-KOL (Banja Luka)
XXIV (2)(2018), 141-146
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1803141S

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

Klasa subtangentnih funkcija i klasa subnormalnih krivulja

Petar Svirčević

Zagreb, Hrvatska
e-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr

Sažetak. U ovome članku je izvedena klasa subtangentnih i klasa subnormalnih krivulja, koje imaju svojstvo da su im duljine subtangenti, odnosno subnormala, konstantne duljine. To svojstvo vrijedi nad čitavim područjem definicije funkcije odnosno krivulje. Za analizu ovih problema koristimo gradivo elementarnog infinitezimalnog računa. Svakako, da tu en passant koristimo i rješenje elementerne linearne diferencijalne jednadžbe prvoga reda.

Ključne riječi. Subtangenta, subnormala.

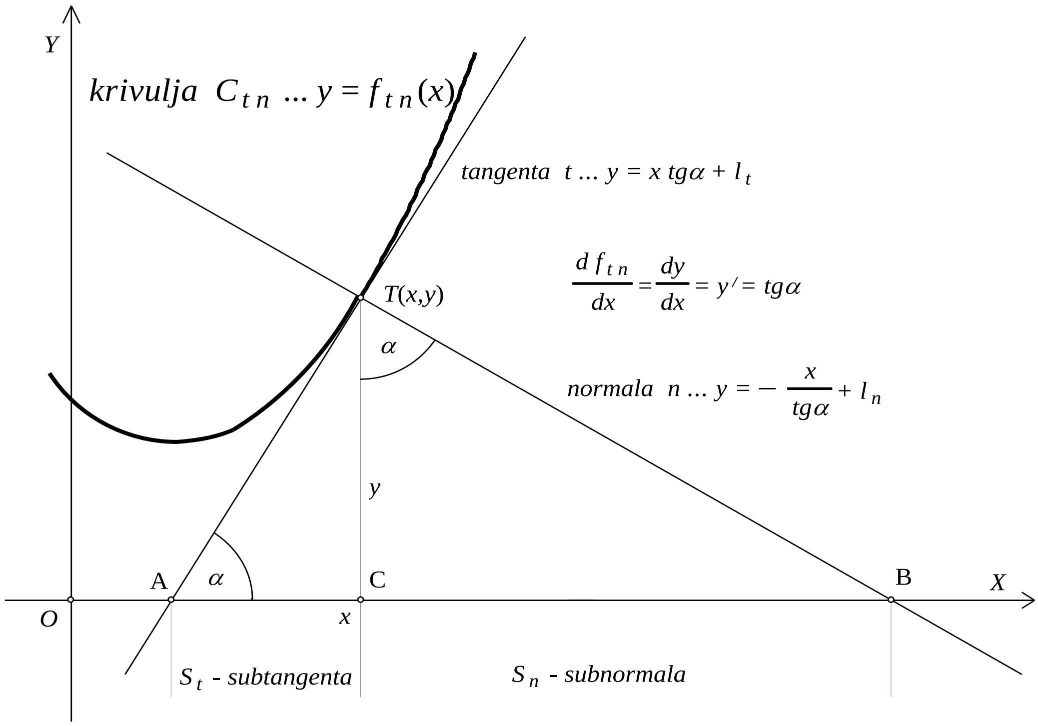
Class of subtangent functions and class of subnormal curves

Abstract. In this paper, subtangent classes and subnormal curve classes have been performed, having the characteristic that their lengths are subtangent, or subnormal, of constant length. This property applies to the whole range of function definition or curve. To analyze these problems, we use the element of an elementary infinitesimal account. Of course, we also use the passant as the solution of the elementary linear differential equation of the first order.

Keywords. Subtangent, subnormal.

Suvišno bi bilo, da objašnjavamo, što je tangenta i normala u točki krivulje, odnosno funkcije. Međutim, podsjetimo se kako su definirane subtangenta i subnormala. Dakle to se dobro vidi na Sl.1.

$$S_t = |AC|, S_n = |CB|.$$



Slika 1.

Budući se graf funkcije i graf krivulje suštinski razlikuju, tada ćemo dati definiciju grafa krivulje.

Definicija 1. Graf krivulje $C \ldots F(x, y) = 0$ se definira kao skup točaka u ravnini, koje zadovoljavaju relaciju

$$\Gamma(C) = \left\{(x, y) \,\middle|\, F(x, y) = 0 \& x \in D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \& y \in K \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}\right\},$$

gdje je $D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ domena krivulje, koja je općenito relacija, a skup $\{a_1, \ldots, a_n\}$ je skup elemenata koji nije u *D*, jer ta krivulja nije za njih definirana ili ima asimptote paralelne sa osi *Y*, dok je $K \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}$ kodomena krivulje, koja je općenito relacija, a skup $\{b_1, \ldots, b_m\}$ je skup elemenata koji nije iz *K* i u kojima vrijednosti te krivulje nisu definirane ili ona ima u njima asimptote paralelnu sa osi *X*.

Napomena 1. Graf krivulje, čija je jednadžba $F(x, y) = 0$, se može rastaviti u *k* disjunktnih grafova funkcija, čije su im domene i kodomene općenito nedisjunktne, ali im je unija domena i unija kodomena jednaka respektivno domeni odnosno kodomeni imenovane krivulje. Prema tome

$$\Gamma(C) = \Gamma(C_1) \cup \ldots \cup \Gamma(C_k), \qquad \Gamma(C_i) \cap \Gamma(C_j) = \phi;\ i \neq j;\ i, j = 1,2, \ldots, k,$$

gdje je

$$C_i \dots y_i: D_i \to K_i; \;\; D_1 \cup \dots \cup D_k = D \setminus \{a_1, \dots, a_n\}; \;\; K_1 \cup \dots \cup K_k = D \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$$

Iznesimo i verbalne definicije subtangente i subnormale.

Definicija 2. Spojimo li dodirnu točku tangente i krivulje sa sjecištem te tangente sa osi *X*, tada dobijemo dužinu. Ako tu dužinu ortogonalno projiciramo na navedenu apscisnu os, tada dobijemo dužinu, koja se zove subtangenta za pripadnu dodirnu točku krivulje. Nadalje, spojimo li presječnu točku normale i krivulje sa sjecištem te normale sa osi *X*, tada dobijemo dužinu. Ako tu dužinu ortogonalno projiciramo na navedenu apscisnu os, tada dobijemo dužinu, koja se zove subnormala za zadanu točku krivulje.

Definicija 3. Subtangentna funkcija ili subtangentna krivulja je ona funkcija ili krivulja, koje ima svojstvo da ima konstantu duljinu subtangente, odnosno subnormale, nad čitavim područjem definicije funkcije ili krivulje.

Napomena 1. Iz mnemotehničkih razloga u slike smo unijeli i neke formule. Nadalje, treba paziti da ne zbuli što označavamo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gdje je $f(x) = e^{ax+b}$ nekiput u obliku $y = e^{ax+b}$. To činimo iz praktičnih razloga zbog primjene neodređenog integriranja.

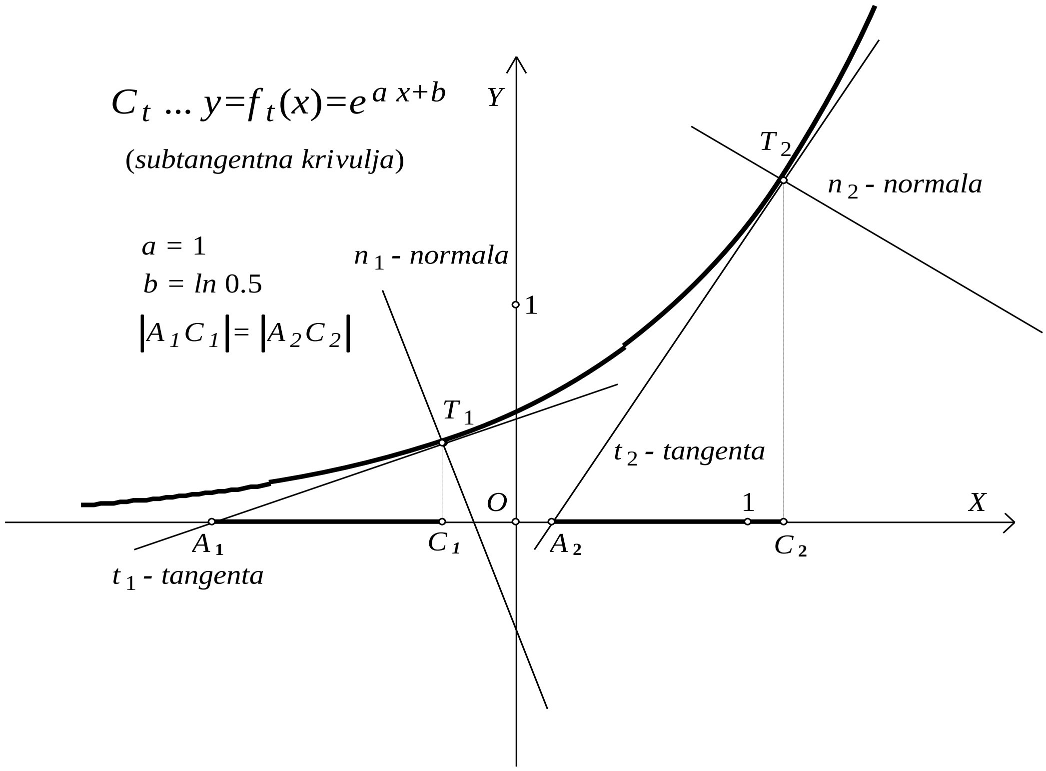
Klasa subtangentnih funkcija

Ako je $S_t = 1/a$, tada iz ΔACT (Sl.1.) slijedi tg $\alpha = \frac{y}{S_t} = ay = y' = \frac{dy}{dx}$. Nakon separacije varijabli dobivamo $\frac{dy}{y} = adx$, te nakon integracije imamo $\int \frac{dy}{y} = a \int dx$, odnosno $lny - b = lny - lne^b = ax$ (a,b su proizvoljne konstante) ili

$$C_t \dots \; y = f_t(x) = e^{ax+b}, \;\; f_t: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Zadatak 1. Nacrtajmo graf eksponencijalne funkcije (1) za parametre $a = 1$ i $b = ln0.5$, te napravimo konstrukcije subtangente u dvije točke te funkcije.

Rješenje. Konstrukcija je napravljena u GSP-u, što je prikazano na Sl.2. i može se lako u istom programu provjeriti, da je $|A_1C_1| = |A_2C_2|$ za bilo koju poziciju tih točaka na grafu dobivene krivulje (funkcije) C_t, koja ustvari striktno rastuća ili padajuća funkcija nad domenom $\mathbb{R}$.



Slika 2.

Napomena 2. Budući je (1) striktno rastuća ili padajuća funkcija nad domenom ℝ, čija je kodomena $\mathbb{R}^+$, tada je njezina inverzna funkcija

$$C_t^{-1} \text{ ... } f_t^{-1}(x) = \frac{1}{a}(lnx - b),\ \ f_t^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.. \tag{2}$$

Budući su grafovi funkcije i njezine inverzije osno simetrični s obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta, tada slijedi da (2) predstavlja klasu subtangentnih funkcije s obzirom na ordinatnu os. To bi svojstvo mogli zvati *ordinantna subtangentnost*. Iz iznesenog slijedi da je suvišno teorijski ili računski provjeravati navedeno svojstvo.

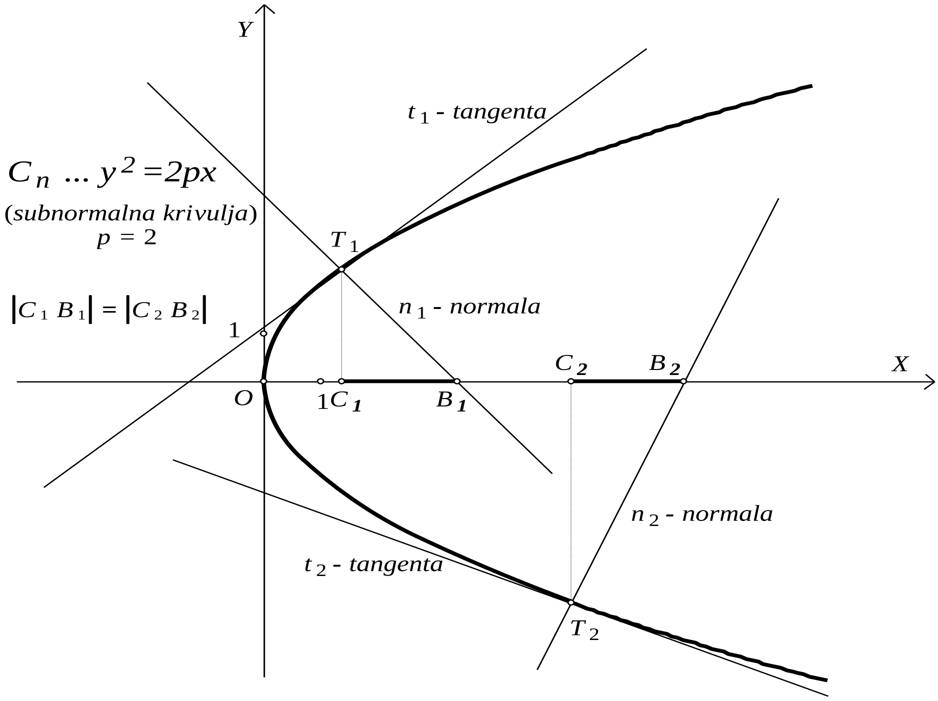
Klasa subnormalnih krivulja

Iz Definicije 3. i Sl.1. slijedi da je duljina subnormale $S_n = y \cdot tg\alpha = yy'$. Ako označimo da je $S_n = p\ (p\ je\ konstanta)$, tada dobivamo diferencijalnu jednadžbu $yy' = p$ ili u obliku $y\frac{dy}{dx} = p$. Nadalje, nakon separiranja varijabli i izvršenog neodređenog integriranje dobijemo $\int ydy = p\int dx$, dakle

$$C_n \text{ ... } y^2 = 2px - 2px_0 = 2p(x - x_0);\ \ x_0 \text{ je proizvoljna konstanta.} \tag{3}$$

Vidimo da krivulja (3) nije funkcija, već smo dobili klasu parabola s tjemenom $T(x_0, 0)$, koje imaju konstantnu subnormalu. Znamo, da parametar p predstavlja udaljenost fokusa parabole od njezine direktrise.

Napomena 3. Iz (3) slijedi da ako je $p > 0$, tada ta klasa parabola ima tjeme na lijevoj strani a „otvor“ na desnoj strani. No, ako je $p < 0$, tada je u toj klasi tjeme na desnoj strani a „otvor“ na lijevoj strani.



Slika 3.

Napomena 4. U skladu s Napomenom 1. ćemo se prisjetiti, kako možemo pomoću računala nacrtati graf na Sl.3. Dakle u ovome slučaju ćemo graf ove parabole prikazati kao uniju dvaju grafova poluparabola. Tako je gornja poluparabola $f_G: [0,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$, gdje je $f_G(x) = \sqrt{2px}$. Analogno za donju poluparabolu je $f_D: \langle 0,\infty\rangle \to \langle 0,-\infty\rangle$, gdje je $f_D(x) = -\sqrt{2px}$. Svakako, da moramo paziti da je kodomena krivulje jednaka uniji disjunktnih kodomena funkcija. Jasno je kako bi glasile funkcije poluparabola, ako bi „otvor“ parabole bio okrenut na lijevu stranu.

Nadalje dobivamo, da je inverz klase krivulja (3) klasa funkcija

C_n^{-1} ... $x^2 = 2py - 2py_0 = 2p(y - y_0)$; gdje je y_0 proizvoljna konstanta. (4)

Ta klasa parabola se može prikazati i u obliku C_n^{-1} ... $y = ax^2 + b$, koji nam je dobro poznat, gdje je $a = 1/2p$ i $b = y_0$.

Napomena 5. Budući su grafovi krivulje (parabole) i njezine inverzne parabole, koja je funkcija, simetrični s obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta, tada slijedi da (4) predstavlja klasu subnormalnih funkcije s obzirom na ordinatnu os, dakle radi se o ordinatnoj subnormalnosti.

Literatura

[1] Mitrinović D.S. *Zbirka zadataka iz matematike*. Naučna knjiga, Beograd 1962.

[2] Pavković, B. i Veljan D. *Elementarna matematika I, II.* Tehnička knjiga, Zagreb 1992(95).

[3] Svirčević, P. Funkcije koje predstavljaju parabolu ili hiperbolu. *Nastava matematike*, **62**(2-3)(2017), 33-38.

[4] Svirčević P., Algebarske periodične funkcije. Drugi kongres nastavnika matematike Republike Hrvatskee, HMD, Zagreb 2004.

[5] The Geometer's Sketchpad (upotrebljeni program za crtanje grafova funkcija i krivulja).