MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN: 0354-6969 (p), ISSN: 1986-5228 (o)
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
Vol. XXIV (3)(2018), 131-139
DOI: 10.7251/1803131S

O KOMPARACIJI MATRIČNIH METODA SUMABILNOSTI U KLASIČNOM I ULTRAMETRIČKOM SLUČAJU

Samra Sadiković, Sanela Halilović i Edin Alibegović

ABSTRACT. U radu je dat pregled najznačajnijih rezultata koji se odnose na matrične metode sumabilnosti i izvršena komparacija tih rezultata u klasičnom i ultrametričkom slučaju.

ABSTRACT. In this paper we give the review of the most important results related to the matrix methods of summability and we compare those results in classical and ultrametric case.

1. Uvod

Divergentni redovi bili su motivacioni faktor za nastanak teorije sumabilnosti koja se, u najkraćem, bavi proučavanjem postupaka kojima se divergentnom redu pridružuje broj, koji se onda smatra poopštenom sumom tog reda. Pod klasičnom teorijom sumabilnosti u najopštijem smislu podrazumijeva se slučaj u kojem je polje brojeva nad kojim se radi ili polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, dok je kod ultrametričke teorije sumabilnosti to polje $\mathbb{K}$ sa ultrametričkom ili ne -Arhimedovom valuacijom, tj. preslikavanje $|.| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljava ultrametričku nejednakost $|x + y| \leqslant max(|x|, |y|)$.
Jedna od važnih osobina metričkog prostora $\mathbb{R}$ je nejednakost trougla. Međutim postoji potklasa metričkih prostora za koje vrijedi jača nejednakost

$$d(x,y) \leqslant \max\{d(x,z), d(z,y)\} \leqslant d(x,z) + d(z,y).$$

Metrički prostori za koje vrijedi ova nejednakost nazivaju se ultrametrički ili ne-Arhimedski prostori, i upravo primjer takvog prostora je polje p-adskih brojeva

2010 *Mathematics Subject Classification.* 42B08.

Key words and phrases. Matrix summability methods, Nörlund method, complete ultrametric fields.

Supported by Federal Ministry of Education and Science of the Federation of Bosnia and Herzegovina.

$\mathbb{Q}_p$. Takođe primjeri ovakvih prostora su i bilo kakav skup sa trivijalnom metrikom, hiperrealni brojevi u nestandardnoj analizi, skup svih realnih polinoma sa metrikom koja je inducirana odgovarajućom valuacijom i slično.

Prema poznatom Teoremu Ostrowskog [**1**] ma koja netrivijalna norma na $\mathbb{Q}$ je ekvivalentna ili apsolutnoj vrijednosti ili p-adskoj normi, za neki prost broj p. Kompletiranjem polja racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ u odnosu na metriku induciranu apsolutnom vrijednošću dobivamo polje realnih brojeva $\mathbb{R}$, a kompletiranjem $\mathbb{Q}$ u odnosu na p-adsku normu dobivamo polje p-adskih brojeva $\mathbb{Q}_p$, za svaki prost broj p. p-Adske brojeve uveo je njemački matematičar Kurt Hensel krajem XIX vijeka i oni danas čine integralni dio teorije brojeva, algebarske geometrije, teorije reprezentacija i drugih grana moderne matematike.

Razlozi zašto koristiti p-adske brojeve u istraživanjima leže u činjenici da postoji dovoljno dobro razvijena analiza nad $\mathbb{Q}_p$ analogna onoj nad $\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}_p$ je lokalno kompaktan, separabilan i totalno nepovezan kompletan topološki prostor. Kako je $\mathbb{Q}_p$ lokalno kompaktna komutativna grupa u odnosu na sabiranje to na $\mathbb{Q}_p$ postoji Haar-ova mjera koja je invarijantna u odnosu na translaciju. Takođe matematički modeli fizičkih fenomena preferiraju algebarske ekstenzije od $\mathbb{Q}$ i kompletiranja $\mathbb{Q}$, radije nego sam $\mathbb{Q}$.

Klasična teorija sumabilnosti bavi se generalizacijom konvergencije nizova i redova kompleksnih odnosno realnih brojeva. Naime, poznato je da divergentni nizovi i redovi nemaju granicu u uobičajenom smislu, pa je ideja različitim metodama omogućiti nalaženje "granice" divergentnih nizova tj. "sumirati" divergentne redove. Pomenute metode nazivaju se metode sumabilnosti. Umjesto polaznih nizova i redova posmatraju se transformacije na njima kao i nizovi i redovi dobiveni pomoću tih transformacija. Teorija sumabilnosti nalazi mnoge primjene i u matematičkoj analizi i u primijenjenoj matematici [**2**]. Takođe inženjeri i fizičari koji se u svom radu susreću sa Fourierovim redovima ili analitičkim produžavanjima, i uopšte svi koji se bave teorijom signala, nalaze rezultate ove teorije vrijednim za svoja naučna istraživanja.

2. Glavni rezultati

Proučavanje matričnih transformacija u ultrametričkom smislu je relativno skorijeg porijekla. Uprkos pionirskom radu A. F. Monna iz 1940. godine koji povezuje analizu i funkcionalnu analizu preko ultrametričkog polja, tek su Andree i Petersen 1956. godine uspjeli dokazati analogon Silverman - Toeplitzovog teorema za p-adsko polje $\mathbb{Q}_p$, koji govori o regularnosti beskonačne matrične transformacije.

Roberts ([**9**], p.127) je dokazao Toeplitz - Silvermanov teorem za uopšteno ultrametričko polje , dok je Monna [**7**] dokazao isti teorem koristeći Banach - Steinhausov teorem. Nakon toga detaljnije istraživanje matričnih transformacija, specijalno proučavanje metoda sumabilnosti u ultrametričkom pravcu sproveo je Natarajan [**8**].

U nastavku, podrazumjevamo da je K je kompletno, netrivijalno ultrametričko polje, osim ako nije drugačije naznačeno. Pretpostavimo da su vrijednosti ulaznih nizova, redova i beskonačnih matrica iz K. Označimo sa $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

DEFINITION 2.1. Neka je $A = \{a_{nk}\}, a_{nk} \in K, n, k \in \mathbb{N}_0$, beskonačna matrica. Pod A-transformacijom $A(x)$ niza $x = \{x_k\}, x_k, k \in \mathbb{N}_0$ podrazumjevamo niz $\{(Ax)_n\}$, gdje je

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \in K, n \in \mathbb{N}_0,$$

pod uslovom da red na desnoj strani konvergira.
Ako je $\lim_{n\to\infty} (Ax)_n = l$, kažemo da je niz $x = \{x_k\}$ A-sumabilan ka l.

DEFINITION 2.2. Neka su X i Y prostorni nizovi sa elementima iz K. Kažemo da beskonačna matrica $A = (a_{nk}), a_{nk} \in K; n, k \in \mathbb{N}_0$ transformiše X u Y ako kad god je niz $x = \{x_k\} \in X$, niz $\{(Ax)_n\}$ je definisan za svako $n \in \mathbb{N}_0$ i $\{(Ax)_n\} \in Y$. Tada pišemo $A \in (X, Y)$.

DEFINITION 2.3. Ako je $A \in (c, c)$, gdje je c - ultrametrički Banahov prostor, koji se sastoji od svih konvergentnih nizova u K u odnosu na normu definisanu sa $|x| = \sup_{k\geqslant 0} |x_k|, x = \{x_k\} \in c$, kažemo da je matrica A-konzervativna ili da čuva konvergenciju. Ako je dodatno i $\lim_{n\to\infty} (A_x) = \lim_{k\to\infty} x_k$, matricu A nazivamo i regularnom matricom ili Toeplitzovom matricom. Ako je A regularna matrica onda pišemo $A \in (c, c; P)$ (P je prvo slovo riječi "preservation" - čuvanje).

THEOREM 2.1. (Toeplitz - Silverman) *Matrica $A \in (c, c)$ čuva konvergenciju ako i samo ako je*

$$\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty, \tag{2.1}$$

postoji

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \delta_k, k = \mathbb{N}_0, \tag{2.2}$$

i postoji

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \delta. \tag{2.3}$$

U tom slučaju $\lim_{n\to\infty} (Ax)_n = s\delta + \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - s)\delta_k, \lim_{k\to\infty} x_k = s.$

Dalje, $A = (c, c; P)$ tj. A je regularna ako i samo ako uslovi (2.1), (2.2) *i* (2.3) *vrijede uz dodatne zahtjeve da je $\delta_k = 0, k \in \mathbb{N}_0$ i $\delta = 1$.*

DEFINITION 2.4. Matricu A zovemo Schurovom matricom ako $A \in (l_\infty, c)$ (gdje l_∞ označava ultrimetrički Banachov prostor svih ograničenih nizova u K u odnosu na normu $||x|| = \sup_{k\geqslant 0} |x_k|, x = \{x_k\} \in l_\infty$.)

Navest ćemo sada dva rezultata [**8**]:

THEOREM 2.2. (Schur) $A \in (l_\infty, c)$ *tj. A je Schurova matrica ako i samo ako*

$$\lim_{k\to\infty} a_{nk} = 0, n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.4}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant 0} |a_{n+1} - a_{nk}| = 0. \tag{2.5}$$

THEOREM 2.3. (Steinhaus) *Matrica A ne može istovremeno biti i Toplitz-ova i Schur-ova matrica ili ekvivalentno za datu regularnu matricu A postoji ograničen divergentni niz koji nije A- sumabilan. Simbolički, ovu izjavu možemo pisati u sljedećem obliku*

$$(c, c; P) \cap (l_\infty, c) = \phi.$$

Kada je $K = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, Maddox [**6**] je dao karakterizaciju Schur-ovih matrica u smislu egzistencije ograničenog divergentnog niza čiji su svi podnizovi sumabilni pomoću matrice. Ova karakterizacija uključuje raniju Buckovu ([**3**], 1943) karakterizaciju sumabilnosti realnog konvergentnog niza, pokazujući da je realni niz x konvergentan ako i samo ako postoji regularan matrični metod sumabilnosti koji sumira svaki podniz od x. Fridy [**4**] je pokazao da u Buckovom rezultatu možemo zamjeniti "podniz" sa "preuređenjem" da bi dobili da je niz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sumabilan regularnom matricom A konvergentan ako i samo ako A sumira svaki od njegovih preuređenja.

U vezi sa tim, možemo reći da nema svaki rezultat u ultrametričkoj analizi dokaz analogan njegovom klasičnom odgovarajućem rezultatu, pa čak ni u smislu pojednostavljenog dokaza. Odsustvo analogije za signum funkciju, gornju i donju granicu niza realnih brojeva itd, tjeraju nas na traženje alternativnih postupaka. Ovi postupci obezbjeđuju potpuno različit pristup čak i kod tačnijih analogona klasičnih teorema. Na primjer, dokaz sljedećeg teorema opširno ilustruje navedeno:

THEOREM 2.4. *Neka je K kompletno ne-trivijalno ultrametričko polje. Reći ćemo da je $A = (a_{nk}), a_{nk} \in K, n, k \in \mathbb{N}_0$ Schur-ova matrica ako i samo ako postoji ograničen divergentan niz $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, x_k \in K, k \in \mathbb{N}_0$, čiji je svaki podniz A-sumabilan .*

PROOF. Ako je A Schurova matrica, onda je tvrđenje teorema posljedica definicije takve matrice. Obratno, neka je niz $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ divergentan niz čiji je svaki podniz A-sumabilan. Za svako $p \in \mathbb{N}_0$, možemo izabrati dva podniza od x, recimo $\{x_k^{(1)}\}, \{x_k^{(2)}\}$ takve da ako je $y_k = x_k^{(1)} - x_k^{(2)}$, onda je $y_k = 0$, a za $k \neq p$ je $y_p \neq 0$. Takav izbor je moguć pošto niz x divergira. Niz $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je A-sumabilan. Dakle, slijedi da postoji $\lim_{n\to\infty} a_{np}, p \in \mathbb{N}_0$. Dalje ćemo pokazati da je $\lim_{p\to\infty} a_{np} = 0, n \in \mathbb{N}_0$. U suprotnom, postoji $\varepsilon' > 0$ i ne-negativan cijeli broj m takav da je

$$|a_{m,p(i)}| > \varepsilon', i \in \mathbb{N},$$

gdje je $p(i)$ rastući niz pozitivnih cijelih brojeva. Pošto x divergira, on nije nula niz i na taj način postoji $\varepsilon'' > 0$ i rastući niz $l(j)$ pozitivnih cijelih brojeva takav da je

$$|x_{l(j)}| > \varepsilon'', j \in \mathbb{N}.$$

Sada je,

$$|a_{m,p(i)} x_{l(p(i))}| > \varepsilon^2, i \in \mathbb{N},$$

gdje je $\varepsilon = min(\varepsilon^{'}, \varepsilon^{''})$. Ovo znači da A-transformacija niza $x_{l(j)}$ ne postoji, što je kontradikcija. Prema tome $\lim\limits_{p\to\infty} a_{np} = 0, n \in \mathbb{N}_0$. Pošto x divergira, imamo da je $|x_{k+1} - x_k| \nrightarrow 0, k \to \infty$, tako da postoji $\varepsilon^{'''} > 0$ i rastući niz $\{k(j)\}$ pozitivnih cijelih brojeva takav da je

$$\left|x_{k(j)+1} - x_{k(j)}\right| > \varepsilon^{'''}, j \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Možemo pretpostaviti da je $k(j+1) - k(j) > 1, j \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da ako A nije Schurova matrica, onda bi trebalo da postoji $\varepsilon > 0$ i dva rastuća niza $\{n(i)\}$ i $\{p(n(i))\}$ pozitivnih cijelih brojeva tako da je

$$\left.\begin{array}{c} \sup\limits_{0\leqslant p\leqslant p(n(i-1))} \left|a_{n(i)+1,p} - a_{n(i),p}\right| < \dfrac{\varepsilon^2}{4M}, \\ \left|a_{n(i)+1,p(n(i))} - a_{n(i),p(n(i))}\right| > \varepsilon, \\ \sup_{p\geqslant p(n(i+1))} \left|a_{n(i)+1,p} - a_{n(i),p}\right| < \dfrac{\varepsilon^2}{4M}, \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

gdje je $M = \sup|x_k|$. Prije dokaza tvrdnje, pokažimo da ako A nije Schurova matrica, onda je x ograničen pod pretpostavkom teorema. Pretpostavimo da je x neograničen. Razmatramo dva slučaja:

Slučaj (i); Ako je A takva matrica da je $a_{nk} \neq 0$ za neko n i $k = k(i), i \in \mathbb{N}$ izabraćemo podniz $\{x_{\alpha(k)}\}$ od niza x, koji je neograničen i takav da važi

$$\left|a_{nk}x_{\alpha(k)}\right| > 1, k = k(i), i \in \mathbb{N}.$$

Očigledno, $\{x_{\alpha(k)}\}$ nije A-sumabilan, što znači da smo došli do kontradikcije.

Slučaj (ii); Ako je sada $a_{nk} = 0, k > k(n), n \in \mathbb{N}_0$, A nije Schurova matrica, pa možemo naći dva strogo rastuća niza pozitivnih cijelih brojeva $\{n(j)\}, \{k(j)\}$ takvih da je $a_{n(j),k(j)}$ posljednji nenula član u $n(j)$-tom redu. Kako je x neograničen, možemo izabrati podniz $\{x_{\alpha(k)}\}$ od x takav da je

$$\left|A_{n(j)}(\{x_{\alpha(k)}\})\right| > j, j \in \mathbb{N}.$$

Da bi smo to uradili izaberimo $x_{\alpha(i)}, i = 1, 2, ..., k(1)$ takav da je $\left|x_{\alpha(1)}\right| > \dfrac{1}{\left|a_{n(1),1}\right|}$, ako je $a_{n(1),1} \neq 0$, a $x_{\alpha(1)}$ izabirimo kao odgovarajući x_k inače. Za izabrani $x_{\alpha(1)}$, izaberemo $x_{\alpha(2)}, \alpha(2) > \alpha(1)$, tako da je $\left|x_{\alpha(2)}\right| > \dfrac{1}{\left|a_{n(1),2}\right|}\{1 + \left|a_{n(1),1}x_{\alpha(1)}\right|\}$, ako je $a_{n(1),2} \neq 0$.
Inače izaberimo $x_{\alpha(2)}$, tako da je $\alpha(2) > \alpha(1)$. Sada je,

$$\begin{aligned} &\left|a_{n(1),1}x_{\alpha(1)} + a_{n(1),1}x_{\alpha(2)}\right| \\ &\geqslant \left|a_{n(1),2}x_{\alpha(2)}\right| - \left|a_{n(1),1}x_{\alpha(1)}\right|, \text{ ako je } a_{n(1),2} \neq 0; \\ &= \left|a_{n(1),1}x_{\alpha(1)}\right|, \text{ ako je } a_{n(1),2} \neq 0. \end{aligned}$$

Tako imamo,

$$\left|a_{n(1),1}x_{\alpha(1)} + a_{n(1),1}x_{\alpha(2)}\right|$$

$$\begin{aligned} &= \ 0, \text{ako je } a_{n(1),1} = 0 = a_{n(1),2}; \\ &> \ 1, \text{ako je jedan od } a_{n(1),1}, a_{n(1),2} \neq 0. \end{aligned}$$

Biramo $x_{\alpha(i)}, i = 1, 2, ..., k(1)$ kao što je gore navedeno. Onda je,

$$\left| \sum_{k=1}^{k(1)} a_{n(1),k} x_{\alpha(k)} \right| > 1.$$

Ako je sada,

$$\sum_{k=1}^{k(1)} a_{n(2),k} x_{\alpha(k)} = \alpha,$$

odaberimo na sličan način $x_{\alpha(k)}, k(1) < k \leqslant k(2)$ sa $\alpha(k(1)) < \alpha(k(1)+1) < ... < \alpha(k(2))$ i

$$\left| \sum_{k=k(1)+1}^{k(2)} a_{n(2),k} x_{\alpha(k)} \right| > 2 + |\alpha| \, .$$

Onda je,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{k(2)} a_{n(2),k} x_{\alpha(k)} \right| &\geqslant \left| \sum_{k=k(1)+1}^{k(2)} a_{n(2),k} x_{\alpha(k)} \right| - \left| \sum_{k=1}^{k(1)} a_{n(2),k} x_{\alpha(k)} \right| \\ &> 2 + |\alpha| - |\alpha| = 2. \end{aligned}$$

Po indukciji, mi dakle možemo izabrati $x_{\alpha(k)}, k \in \mathbb{N}$ sa

$$\begin{aligned} \left| A_{n(j)}(\{x_{\alpha(k)}\}) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{k(j)} a_{n(j),k} x_{\alpha(k)} \right| \\ &> j, \ (j \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Ako sada slijedi da $\{x_{\alpha(k)}\}$ nije A-sumabilan, imamo kontradikciju. Tako u oba slučaja dobijamo da je x ograničen ako A nije Schurova matrica.

Dalje, razmatramo da pošto A nije Schurova matrica postoji $\varepsilon > 0$ i rastući niz $\{n(i)\}$ pozitivnih cijelih brojeva takav da je

$$\sup_{p \geqslant 0} \left| a_{n(i)+1,p} - a_{n(i),p} \right| > \varepsilon, i \in \mathbb{N}.$$

Zgodno, onda postoji $p(n(i))$ takav da je

$$\left| a_{n(i)+1,p(n(i))} - a_{n(i),p(n(i))} \right| > \varepsilon, i \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Pretpostavimo da je $p(n(i))$ ograničen. Tada postoji samo konačan broj različitih ulaznih vrijednosti za taj niz. Posljedično, postoji $p = p(n(m))$ koji se javlja u nizu $\{p(n(i))\}$ beskonačno mnogo puta. Za ovo p, (2.8) će onda biti u kontradikciji sa egzistencijom $\lim\limits_{n\to\infty} a_{np}, p \in \mathbb{N}_0$, a što smo ustanovili ranije. Obzirom da smo odabrali $\{n(i)\}$ i $\{p(n(i))\}$ da zadovoljava (2.8), jasno je da odabirom podniza od

$\{n(i)\}$, ako je potrebno možemo pretpostaviti da (2.7) važi. Razmotrimo sada podniz $\{y_p\}$ definisan na sljedeći način:

$$y_p = \begin{cases} x_{k(p)+1}, p = p(n(i)), \\ x_{k(p)}, p \neq p(n(i)), i \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

gdje je niz $\{k(j)\}$ već odabran kao u (2.6). Tako je

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{p=0}^{\infty} \{a_{n(i)+1,p} - a_{n(i),p}\}(y_p - x_{k(p)}) \right| \\ > \quad & \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^2}{4M} \cdot M - \frac{\varepsilon^2}{4M} \cdot M, \text{ koristeći (2.7)} \\ = \quad & \frac{\varepsilon^2}{2}, i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

gdje možemo pretpostaviti da je $\varepsilon \geqslant \varepsilon'''$. Ovo je u kontradikciji sa činjenicom da

$$\{\sum_{p=0}^{\infty} (a_{n+1,p} - a_{n,p})(y_p - x_{k(p)})\}_{n=0}^{\infty}$$

konvergira. Ovo dokazuje da je A Schurova matrica.

Dokaz teorema je time kompletiran. □

Analogon Buckovom rezultatu u ultrametričkom slučaju proizilazi kao posljedica Teorema 2.1, a glasi da je niz $x = \{x_k\}, x_k \in K, k \in \mathbb{N}_0$ sumabilan regularnom matricom A konvergentan ako i samo ako je svaki od njegovih podnizova A-sumabilan.

Navest ćemo još jedan analogon u ultrametričkom slučaju:

THEOREM 2.5. *Niz $x = \{x_k\}, x_k \in K, k \in \mathbb{N}_0$, sumabilan regularnom matricom A je konvergentan ako i samo ako svako od njegovih preuređenja je A-sumabilno.*

Kada je $K = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, u kontekstu preuređenja ograničenog niza Fridy [**4**] je dokazao sljedeći rezultat:

THEOREM 2.6. *Nula niz $x = \{x_k\}$ je u l_1 ako i samo ako postoji matrica $A = (a_{nk}) \in (l_1, l_1; P)$ koja transformiše sva preuređenja od x_k u nizove u l_1.*

Kombinujući Teorem 2.6 i rezultate od Keagy [**5**] formulisan je sljedeći teorem.

THEOREM 2.7. *Kada je $K = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, nula niz $x = \{x_k\}$ je u l_1 ako i samo ako postoji matrica $A = (a_{nk}) \in (l_1, l_1; P)$ koja transformiše svaki podniz ili preuređenje od x u niz u l_1.*

Nastojeći da uvede specijalne metode sumabilnosti u ultrametričku analizu Srinivasan [**10**] je definisao Nörlundov metod sumabilnosti (N, p_n) na polju K na sljedeći način: (N, p_n) metod definiše se pomoću beskonačne matrice (a_{nk}) gdje je

$$\begin{aligned} a_{nk} &= \frac{p_n}{P_n}, k \leqslant n \\ &= 0, k > n, \end{aligned}$$

gdje je $|p_0| > |p_j|, j \in \mathbb{N}$ i $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k, n \in \mathbb{N}_0$. Primjetimo da je $p_0 \neq 0$. Srinivasan [**10**] je dokazao da ako

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0 \tag{2.9}$$

onda je (N, p_n) regularan. Jedan primjer regularnog (N, p_n) metoda u p-adskom polju $\mathbb{Q}_p$, za prost broj p dat je sa $p_n = p^n, n \in \mathbb{N}_0$. Primjetimo da je uslov (2.9) takođe i potreban za regularnost metoda (N, p_n), pa imamo:

THEOREM 2.8. *(N, p_n) metod je regularan ako i samo je $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.*

DEFINITION 2.5. Pišemo da je $(N, p_n) \subseteq (N, q_n)$ ako kad god je $\{s_n\}$ (N, p_n) sumabilan ka s, onda je takođe i (N, q_n) sumabilan ka s. Kažemo da su (N, p_n) i (N, q_n) ekvivalentni ako je $(N, p_n) \subseteq (N, q_n)$ i $(N, q_n) \subseteq (N, p_n)$.

Sljedeća dva rezultata su bitno različita od njihovih odgovarajućih analogona u klasičnom smislu. Iz ovih rezultata vidimo da je apsolutna konvergencija u klasičnoj analizi zamjenjena običnom konvergencijom u ultrametričkoj analizi.

THEOREM 2.9. *Neka su (N, p_n) i (N, q_n) regularni metodi. Tada je $(N, p_n) \subseteq (N, q_n)$ ako i samo ako je $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$, gdje je $\frac{q(x)}{p(x)} = k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k_n x^n$.*

THEOREM 2.10. *Regularni metodi (N, p_n) i (N, q_n) su ekvivalentni ako i samo ako je $\lim_{n\to\infty} k_n = 0 = \lim_{n\to\infty} h_n$, gdje je $\{k_n\}$ definisano kao u Teoremu 2.9 i $\{h_n\}$ definisan sa $\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$.*

Sljedeća dva rezultata se takođe razlikuju od njihovih analogona u klasičnom slučaju.

THEOREM 2.11. *Ako je $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ i $\{b_k\}$ sumabilan po regularnom (N, p_n) metodu, onda je $\{c_k\}$ (N, p_n) sumabilan gdje je $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}, k \in \mathbb{N}_0$.*

THEOREM 2.12. *Ako red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergira ka A, a red $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ je sumabilan ka B po regularnom (N, p_n) metodu, onda je red $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ (N, p_n) sumabilan ka AB, gdje je c_k definisan kao u Teoremu 2.11.*

Navest ćemo sada rezultat za ultrametrički slučaj koji pokazuje značajno odstupanje od odgovarajućeg rezultata u klasičnom slučaju, u smislu da ovdje nema potrebe za uvođenjem apsolutne sumabilnosti.

THEOREM 2.13. *Ako je red $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sumabilan po regularnom metodu (N, p_n) ka A, a red $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sumabilan po regularnom metodu (N, q_n) ka B, onda je red $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$*

sumabilan po regularnom metodu (N, r_n) *ka* AB, *gdje je* $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}, r_k = \sum_{j=0}^{k} p_j q_{k-j}, k \in \mathbb{N}_0$.

Primjetimo da pretpostavka o regularnosti (N, p_n) i (N, q_n) metoda za sumabilnost reda $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ne može biti izostavljena.

Istaknimo na kraju i poznati rezultat klasične teorije sumabilnosti Teorem Mazur-Orlicza, koji kaže da ako matrica koja čuva konvergenciju sumira ograničeni divergentni niz onda ona sumira i neograničeni takođe. Kontraprimjer da navedeni rezultat ne važi u ultrametričkom slučaju je svaki regularni (N, p_n) metod. Wilansky ([**11**], p.34) je dokazao da u klasičnom smislu vrijedi da je svaka neregularna realna Nörlundova matrica koja čuva konvergenciju "konula", međutim, u ultrametričkom slučaju odgovarajući rezultat se razilazi od klasičnog. Naime, svaka neregularna Nörlundova matrica koja čuva konvergenciju nikad nije "konula" u ovom slučaju.

References

1. A. J. Baker, *An Introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis*, University of Glasgow, 2005.
2. J. Boos, *Classical and modern methods in summability,* Oxford University Press, Oxford 2000.
3. R. C. Buck, *A note on subsequences*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 898-899.
4. J. A. Fridy, *Summability of rearrangements of sequences*, Math.Z. **143** (1975), 187-192.
5. T. A. Keagy, *Matrix transformations and absolute summability*, Pacific J. Math. **63** (1976), 411-415.
6. LJ. Maddox, *A Tauberian theorem for subsequences*, Bull.London Math. Soc. **2** (1970), 63-65.
7. A. F. Monna, *Sur le théorème de Banach-Steinhaus*, Indag. Math. **25** (1963), 121-131.
8. P. N. Natarajan, *An Introduction to Ultrametric Summability Theory*, New York, Springer, 2014.
9. J. B. Roberts, *Matrix summability in F-fields*, Proc. Am. Math. Soc. **8** (1957), 541-543.
10. V. K. Srinivasan, *On certain summation processes in the p-adic field*, Indag. Math. **27** (1965), 319-325.
11. A. Wilansky, *Summabiity Through Functional Analysis*, North Holland, Amsterdam (1984).

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Tuzla, Tuzla, Bosnia and Herzegovina

E-mail address: `samra.sadikovic@untz.ba, sanela.halilovic@untz.ba`