MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIV (2)(2018), 65-130 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1802065D

Правилни звездасти полиедри и њихови звездоиди

Ратко Динић

Јована Дучића Х-36, Теслић, Република Српска, БиХ

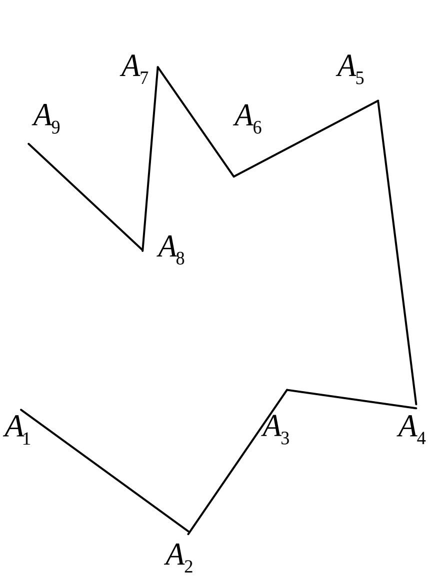
Увод

У овом тексту се обрађују звездасти и звездолики полиедри. Звездасти полиедри су сложени полиедри (њихове стране имају заједничких унутрашњих тачака), а њихове редукције на просте полиедре зову се звездолики полиедри. Излагање о овим полиедрима има централно место у раду. То су полиедри који су у литератури познати као: мали звездасти додекаедар, велики додекаедар, велики звездасти додекаедар и велики икосаедар. Претходно се обрађују звездасти и звездолики полигони. Осим ових фигура, у знатно мањем обиму, помињу се и склопови полигона и полиедара. Добијање (конструкције) ових фигура као и њихове особине се коректно геометријски изводе и доказују синтетичком методом.

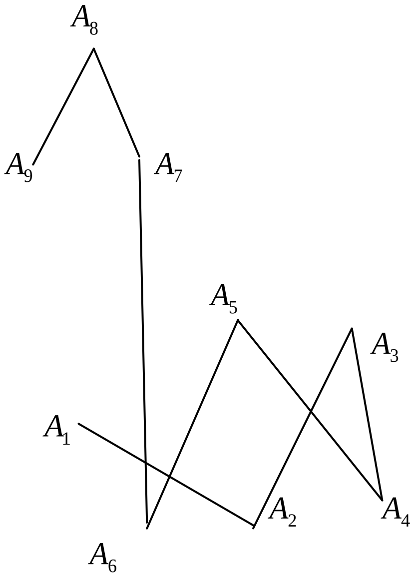
Звездасти и звездолики облици су предмет интересовања разних стваралаца: ликовних уметника (и сликара и вајара), инжењера разних струка (машинство, архитектура итд.), кулинара и других. У последње време овим облицима се посебно баве програмери који праве програме којима се ове фигуре доводе у везу са другим фигурама и врше различита кретања (анимација) и на тај начин добијају врло допадљиве слике. Дела ових стваралаца прихвата и користи као илустрације шири круг људи. Наравно, у таквим делима долази и до деформације геометријског смисла ових фигура. Ствараоци, свакако, на то имају право. Ипак, строги геометријски приступ мора бити полазиште. Коришћење рачунара у разматрањима сложенијих фигура је неопходно. Аутор овог рада је морао да уради неколико програма којима се добијају пројекције звездастих полиедара. Програми су давали резултате који су упућивали на нека решења која геометричар није очекивао. Аутор није дозволио да програмски резултати буду замена за геометријски приступ, па је све резултате геометријски увео и верификовао строгим синтетичким методама.

1. Полигоналне линије и полигони

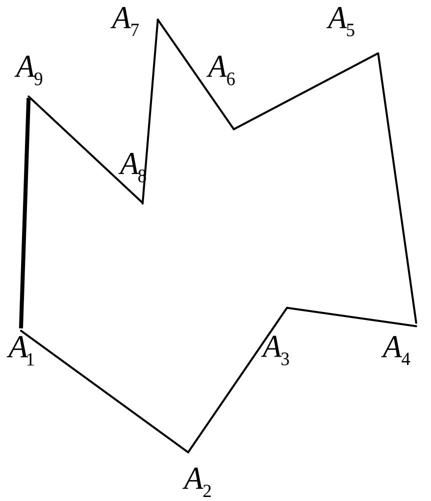
Због значаја појмова које ћемо у овом тексту обрађивати навешћемо неке опште познате појмове и ставове, водећи се и позивајући се, пре свега, на Хилбертов приступ тим појмовима.



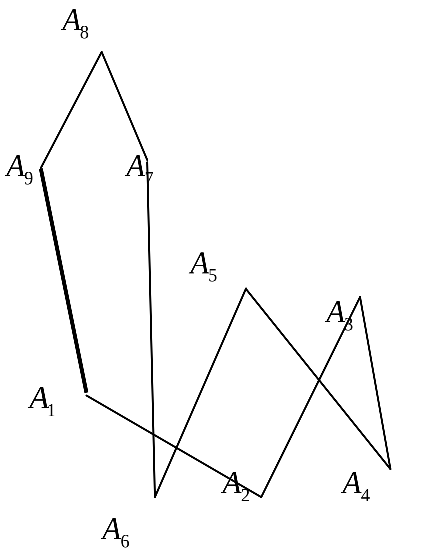
Сл.1$_А$.
Проста изломљена линија



Сл. 1$_Б$
Сложена изломљена линија



Сл.2$_А$.
Проста полигонална линија

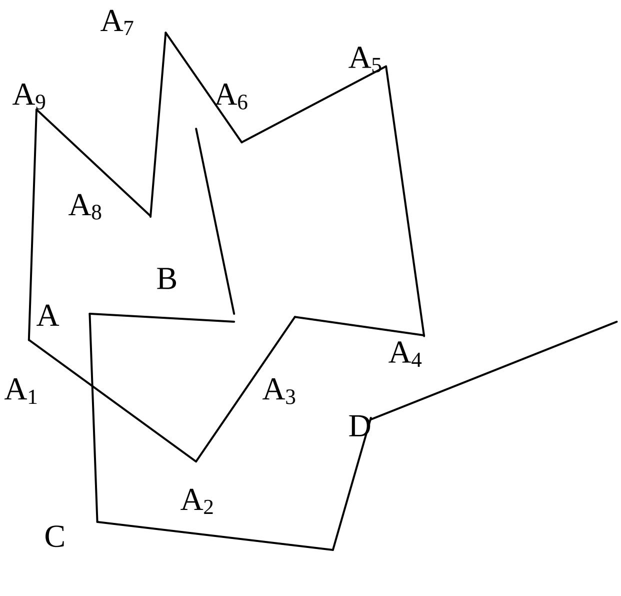


Сл. 2$_Б$
Сложена полигонална линија

Дефиниција 1. Нека је задато $n > 2$ тачака $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ простора, при чему сваке три узастопне тачке не припадају истој прави; унија свих дужи $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n$ зове се *изломљена линија*. Ако све наведене тачке леже у истој равни, онда је то *равна изломљена линија.* Ако дужи које чине изломљену линију не секу једна другу, онда је то *проста иизломљена линија,* у супротном је *сложена*. Ако се изломљеној линији дода и дуж A_nA_1, онда се таква линија зове *полигонална* или *многоугаона линија.* Полигонална линија,такође, може бити равна или просторна. За изломљену $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n$ кажемо да *спаја* тачке A_1 и A_n. Дужи које чине изломљену (полигоналну) линију зову се *странице*, а њихови крајеви *темена* изломљене (полигоналне) линије.

Не упуштајући се у расправу о ставовима 8 и 9 из Хилбертове књиге „Основе геометрије“, изнећемо следећи закључак који представља парафразиран став 9 из поменуте књиге.

Свака проста равна полигонална линија дели скуп преосталих тачака равни у којој се налази на два дела. Сваке две тачке истог дела могу се спојити изломљеном линијом која не сече полигоналну линију, док свака изломљена линија која спаја две тачке из различитих делова сече полигоналну линију. Онај део за чију произвољну тачку постоји полуправа чија је то почетна тачка и која не сече полигоналну линију зове се *спољашња област*; други од ова два дела се зове *унутрашња област* полигоналне линије. Спољашња и унутрашња област полигоналне линије се још редом зову *спољашњост* и *унутрашњост* полигоналне линије.

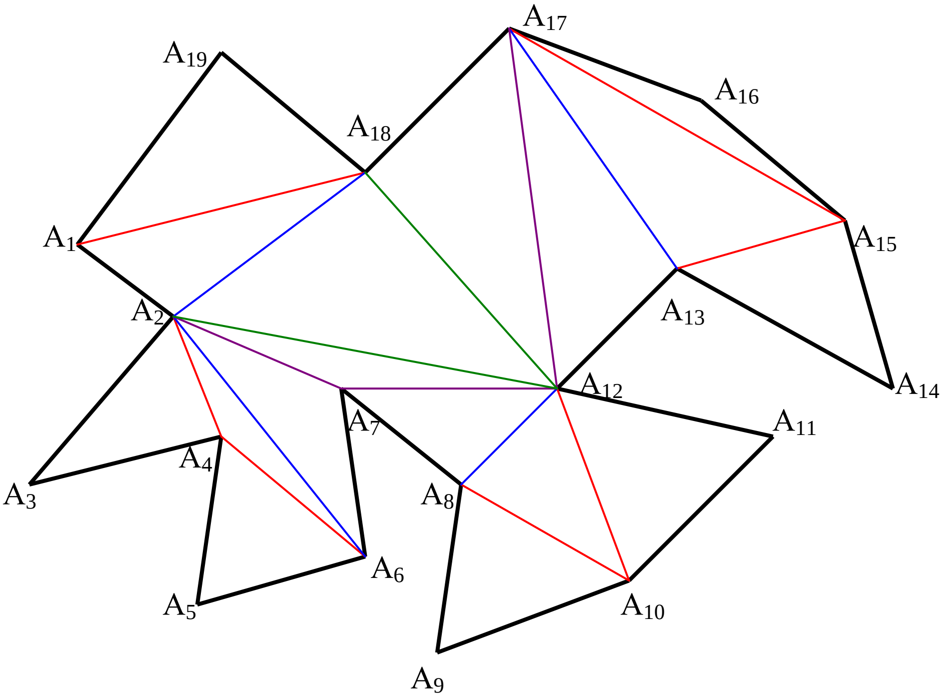


Сл. 3.

Дефиниција 2. *Полигон* или *многоугао* је унија једне равне просте полигоналне линије и њене унутрашње области. Полигонална линија се тада зове *међа* или *руб* полигона, дужи које чине полигоналну линију *странице* полигона, а крајеви страница *темена* полигона. Дуж која спаја несуседна темена полигона зове се *дијагонала.* Угао чији су краци одређени суседним страницама полигона и који има особину да постоји тачка у његовој области чија спојница са теменом тога угла лежи у унутрашњој области полигона зове се *унутрашњи угао полигона*.

У овом тексту правићемо строгу разлику између полигона (површи) и полигоналне линије.

Теорема 1. Сваки прост полигон у равни који има n темена може се разложити на $n-2$ троугла чија су темена темена полигона.



Сл. 4.

Доказ. Нека је $A_1A_2\cdots A_n$, $n>3$, произвољан прост полигон у равни. (На Сл.1. је $n=19$). Полазећи од било ког темена (на пример од A_k, $k\le n$) у једном од два могућа смера оријентације (на пример у позитивном), конструишимо дијагонале на следећи начин. Ако дијагонала A_kA_{k+2} лежи у области полигона, онда је узимамо у обзир, ако не, онда прелазимо на теме A_{k+1}, а ако ни тада услов није испуњен, онда на A_{k+2} и тако даље док услов не буде испуњен. Како сваки полигон осим троугла има бар две дијагонале, онда је оваква конструкција могућа. Нека је A_iA_{i+2} једна таква дијагонала. (На Сл.1. је $k=1$. A_1A_3 не испуњава услов. Следећа дијагонала полази из темена A_2 и она испуњава услов; то је дијагонала A_2A_4, па је $i=2$.) Поступак одређивања оваквих дијагонала настављамо док не дођемо до последњег темена које испуњава постављени услов. (Ове дијагонале су на Сл.1. означене црвеном бојом.) Свака од ових дијагонала са одговарајућим теменом (A_{i+1}) одређује троугао чије су друге две странице странице полигона (на пример, A_2A_3 и A_4A_3).

Одстранимо привремено овакве троуглове тј. изоставимо их из даљег посматрања. На тај начин смо изоставили онолико темена полигона колико има дијагонала. Остатак од полазног полигона је полигон чије су странице ове дијагонале и странице (ако их има) које нису одстрањене. Поступак одстрањивања се наставља на полигон-остатак као и на полазни. Дијагонале у другом одстрањивању су означене плавом бојом. Поступак се завршава кад је полигон-остатак четвороугао или троугао. Ако је задњи полигон-остатак четвороугао, онда је одстрањено $n-4$ троуглова и толико темена полигона, па је полазни полигон разложен на те троуглове и преостали четвороугао. Сваки четвороугао се бар једном дијагоналом може разложити на два троугла. Према томе, укупан број троуглова на које је полазни полигон разложен је $n-4+2=n-2$. Ако је задњи полигон-остатак троугао, онда је одстрањено $n-3$ троуглова , што заједно са овим троуглом даје $n-3+1=n-2$. Што је и требало доказати. □

Теорема 2. Збир унутрашњих углова полигона је $(n-2)\cdot 180^0$.

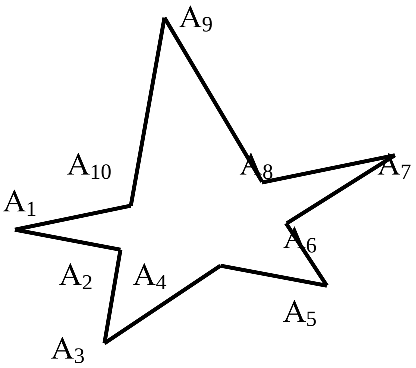
Доказ. Ова теорема је непосредна последица Теореме 1, јер, како је свако теме полигона заједничко за један или више троуглова, то је онда сваки унутрашњи угао многоугла једнак или једном унутрашњем углу троугла или збиру онолико унутрашњих углова троуглова којима је то заједничко теме. Како троуглови немају других темена осим темена полигона и како су троуглови дисјунктни, то су онда унутрашњи углови полигона разложени на унутрашње углове троуглова. Према томе, збир унутрашњих углова полигона једнак је збиру унутрашњих углова свих троуглова на које је полигон разложен. Како оваквих троуглова има $n-2$, а збир унутрашњих углова троугла је 180^0, то онда следи тврђење. □

Подсетимо се још једног изузетно важног појма. Скуп тачака је *конвексан* ако и само ако за било које две тачке тога скупа следи да дуж која спаја те две тачке лежи у том скупу. За полигон важи следеће тврђење: Полигон је конвексан ако и само ако за сваку праву која садржи једну страницу полигона следи да све тачке полигона које не припадају тој прави леже са исте стране те праве; тј. конвексан полигон је пресек полуравни.

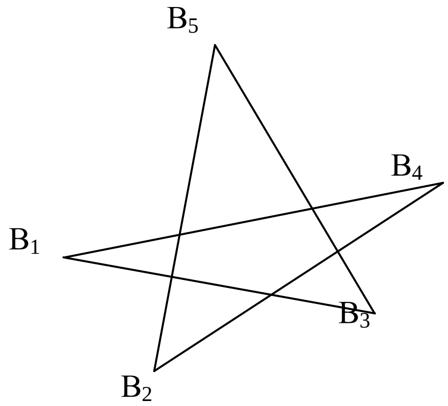
2. Звездасте полигоналне линије

Дефиниција 3. Нека је задат полигон $A_1A_2\cdots A_{2n-1}A_{2n}$. Ако за сваку страницу овог полигона постоји још тачно једна његова страница тако да се обе странице налазе на истој прави, тада постоји дуж чији су крајеви они крајеви ових страница за које добијена дуж садржи обе странице; друга два краја ових страница одређују дијагоналу полигона $A_1A_2\cdots A_{2n-1}A_{2n}$ која допуњује ове две странице до добијене дужи; ову дијагоналу зваћемо *допунска дуж*. Добијену дуж која је унија одговарајућих страница и њима одговарајуће допунске дужи зваћемо *продужена страница*. Ако постоји редослед надовезивања n продужених страница у којем се крај задње продужене странице поклапа са слободним крајем прве продужене странице у овом редоследу, онда се унија свих ових продужених страница зове *звездаста полигонална линија.* Продужене странице ћемо тада звати *странице* звездасте полигоналне линије. Крајеви страница звездасте полигоналне линије зову се *темена* звездасте полигоналне линије и има их n. Ова темена одређују полигон који се зове *кућиште* звездасте полигоналне линије. Јасно је да је звездаста полигонална линија сложена. Полигоналну линију $A_1A_2\cdots A_{2n-1}A_{2n}$ зваћемо *звездолика полигонална линија.* Звездолика полигонална линија је проста и одређује полигон који ћемо звати *звездолики полигон.*

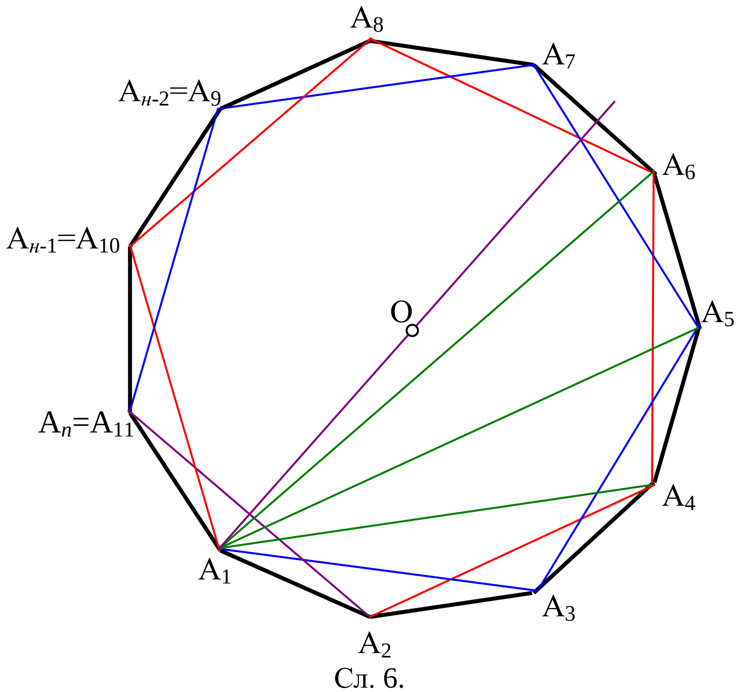
Звездасте полигоналне линије се класификују према броју страница.



Сл.5А.
Проста полигонална линија



Сл.5Б.
Звездаста полигонална линија



Сл. 6.

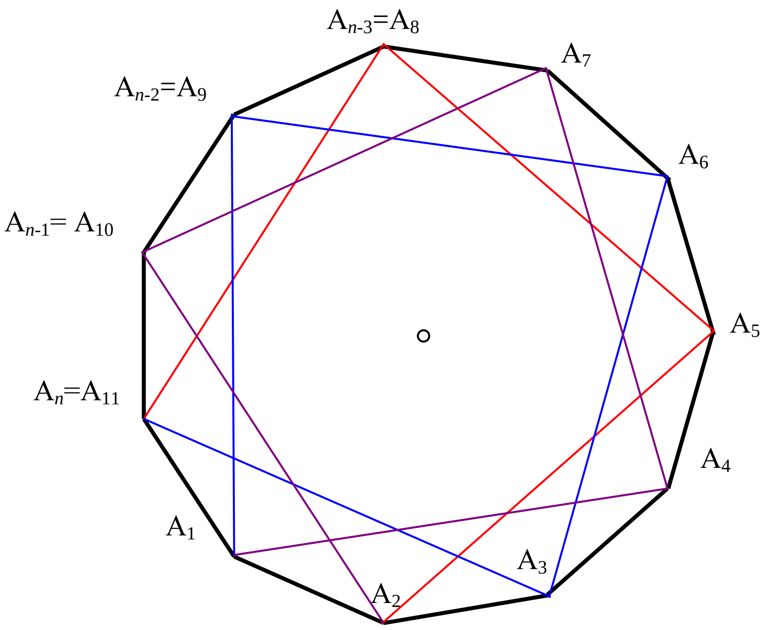
Дефиниција 4. Дијагоналу правилног n-тоугла која спаја два његова темена која су спојена и са изломљеном линијом сачињеном од k његових страница које су тетиве одсечка описаног круга који не садржи центар зваћемо *k-дијагоналом* и обележаваћемо је са $_k d$.

На Сл. 6. је правилни 11-тоугао; 2-дијагонала је A_1A_3, 3-дијагонала A_1A_4, 4-дијагонала A_1A_5, 5-дијагонала A_1A_6. Страница правилног n-тоугла се може схватити као 1-дијагонала. По дефиницији је $k \le \left[\frac{n}{2}\right]$. Према томе, бројеви m већи од $\left[\frac{n}{2}\right]$ дају k-дијагонале за које је $k = n - m$.

Теорема 3. Нека је $A_1A_2\cdots A_n$ правилан n-тоугао и $_k d$ једна његова k-дијагонала. Ако су n и k узајамно прости бројеви, онда је унија $_k d$-ova конструисаних из свих темена полигона $A_1A_2\cdots A_n$ сложена полигонална линија.

Доказ. Доказ изводимо за $k = 2,3,4,\cdots$.

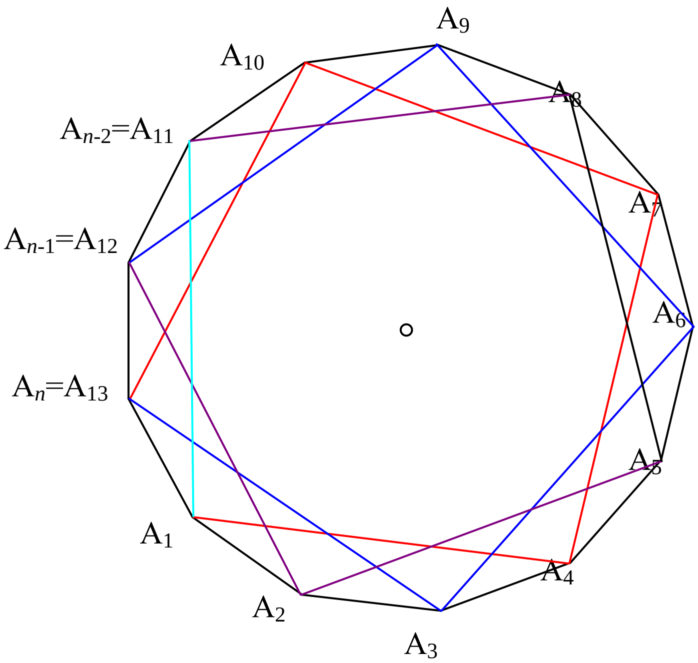
(<u>$k = 2$</u>). Узајамно прост број са 2 је сваки непаран број. Према томе n је непаран број, а тада је n-1 паран. Надовезивање $\frac{n-1}{2}$ 2-дијагонала почев од темена A_1 завршава се у темену A_n, јер до темена A_n има n-1 страница, а према дефиницији 4. $\frac{n-1}{2}$ 2-дијагонала. Надовезивање истог броја 2-дијагонала почев од темена A_n завршава се у темену A_{n-1}. Како су темена A_{n-1} и A_1 повезана са две странице, то онда надовезивањем 2-дијагонале $A_{n-1}A_1$ на добијену изломљену линију добија се сложена полигонална линија која има $\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+1=n$ страница (Сл. 6.).



Сл. 7.

($\underline{k=3}$). С обзиром да су бројеви n и 3 узајамно прости, остатак дељења броја n са 3 може бити 1 или 2 тј. $n \equiv 2 (\bmod 3)$ или $n \equiv 1 (\bmod 3)$.

Ако је остатак 2, онда је n-2 дељиво са 3, па се надовезивање $\frac{n-2}{3}$ 3-дијагонала почев од темена A_1 завршава у темену A_{n-1}, јер до темена A_{n-1} има n-2 страница (Сл. 7).



Сл. 8.

Надовезивање $\frac{n-2}{3}$ 3-дијагонала почев од темена A_{n-1} завршава се у темену A_{n-2}, јер је n-1-(n-3) = 2. Тада од темена A_{n-3} до темена A_n води још једна 3-дијагонала. Надовезивање $\frac{n-2}{3}$ 3-дијагонала почев од темена A_n завршава се у темену A_{n-2}, а тада од темена A_{n-2} до темена A_1 води још једна 3-дијагонала. Према томе, надовезивање

$$\frac{n-2}{3}+\frac{n-2}{3}+1+\frac{n-2}{3}+1=n$$

3-дијагонала почиње и завршава се у темену A_1, па је на тај начин добијена сложена полигонална линија која има n страница. Њене странице су 3-дијагонале правилног n-тоугла $A_1A_2\cdots A_n$.

Ако је остатак 1, онда је n-1 дељиво са 3, па се надовезивање $\frac{n-1}{3}$ 3-ија-гонала почев од темена A_1 завршава у темену A_n, јер до темена A_n има n-1 страница (Сл. 8). Надовезивање $\frac{n-1}{3}$ 3-дијагонала почев од темена A_n завршава се у темену A_{n-1}. Надовезивање $\frac{n-1}{3}$ 3-дијагонала почев од темена A_{n-1} авршава се у темену A_{n-2}, а тада од темена A_{n-2} до темена A_1 води још једна 3-дијагонала. Према томе, надовезивање

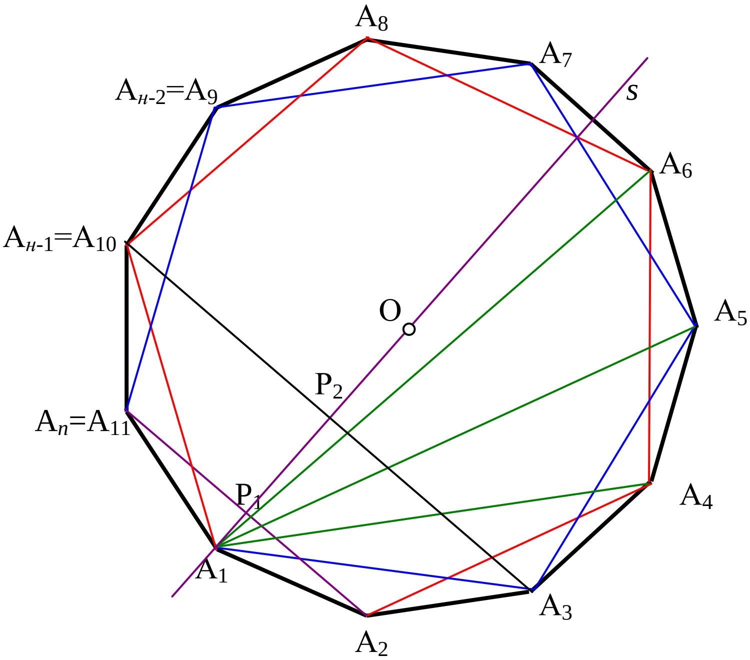
$$\frac{n-1}{3}+\frac{n-1}{3}+\frac{n-1}{3}+1=n$$

3-дијагонала почиње и завршава се у темену A_1, па је и на овај начин добијена сложена полигонална линија која има n страница. Њене странице су 3-дијагонале правилног n-тоугла $A_1A_2 \cdots A_n$.

На сличан начин се доказују и остали случајеви. □

Теорема 4. Симетрала било које k-дијагонале је оса симетрије правилног n-тоугла $A_1A_2 \cdots A_n$, (n>2).

Доказ.



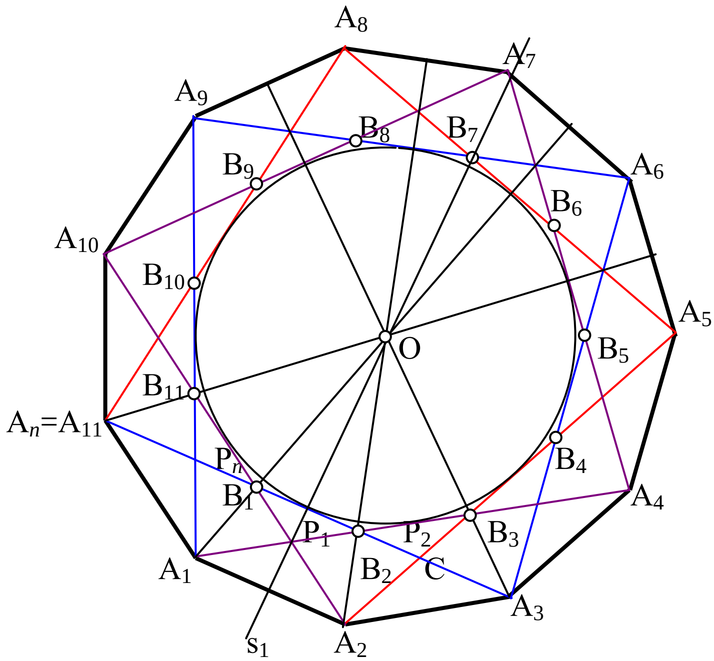
Сл. 9.

Нека је О центар описаног (уписаног) круга правилног n-тоугла $A_1A_2\cdots A_n$ и нека је $OA_1=s$ права која садржи пречник описаног круга (Сл.9). Како центар О лежи у области угла $A_2A_1A_n$, то су онда тачке A_2 и A_n са различитих страна праве s, па права s сече дуж A_2A_n у тачки P_1. Лако се показује да су троуглови $A_1A_2P_1$ и $A_1A_nP_1$ подударни. Из ове подударности следи да је P_1 средиште дужи A_2A_n, па су тачке A_2 и A_n симетричне у односу на s тј. s је симетрала дужи A_2A_n која је 2-дијагонала n-тоугла $A_1A_2\cdots A_n$. Ако је $n=3$, онда је ова дијагонала страница (1-дијагонала), па је тврђење доказано. Ако је $n=4$, онда се лако показује да теме A_3 лежи на правој s, па је и тада доказ завршен. Углови које заклапају две узастопне k-дијагонале конструисане из истог темена су међусобно једнаки као периферијски углови над једнаким луковима, па се лако показује да је сваки од њих једнак $\frac{180^0}{n-2}$.

Страница A_1A_2 (1-дијагонала) и 2-дијагонала A_1A_3 заклапају угао $\frac{180^0}{n-2}$. Ако је он мањи од половине унутрашњег угла n-тоугла $A_1A_2\cdots A_n$, онда права s не пролази кроз област овог угла, јер је она симетрала угла $A_2A_1A_n$. Тада се тачке A_2 и A_3 налазе са исте стране праве s. На исти начин се показује да су и тачке A_n и A_{n-1} са друге стране праве s, па се на основу претходног закључује да се тачке A_3 и A_{n-1} налазе са различитих страна праве s. Из подударности троуглова $A_1A_2A_3$ и $A_1A_nA_{n-1}$ следи једнакост 2-дијагонала A_1A_3 и A_1A_{n-1}. Нека је P_2 пресечна тачка дужи A_3A_{n-1} и праве s. Углови $A_1A_3A_{n-1}$ и $A_1A_{n-1}A_3$ су једнаки као периферијски углови над једнаким тетивама, а углови $A_3A_1P_2$ и $A_{n-1}A_1P_2$ су оба оштра угла, јер су мањи од половине унутрашњег угла многоугла који је мањи од опруженог угла. Из претходних услова следи да су троуглови $A_3A_1P_2$ и $A_{n-1}A_1P_2$ подударни, а из тога да су углови $A_3P_2A_1$ и $A_{n-1}P_2A_1$ прави и да је P_2 средиште дужи A_3A_{n-1}, па су тачке A_3 и A_{n-1} симетричне у односу на праву s тј. права s је симетрала 4-дијагонале A_3A_{n-1}. Поступак настављамо даље примењујући га на теме A_4 итд. Поступак завршавамо са теменом A_m за које је угао $A_mA_1A_2$ једнак половини унутрашњег угла n-тоугла $A_1A_2\cdots A_n$ или кад је разлика половине унутрашњег угла n-тоугла $A_1A_2\cdots A_n$ и угла $A_mA_1A_2$ једнака $\frac{90^0}{n-2}$. У првом случају је n паран број, а у другом непаран. Из овог поступка следи да је права s симетрала бар једног представника из свих класа k-дијагонала и да за сваку k-дијагоналу постоји k-дијагонала из исте класе која јој је симетрична у односу на праву s. □

Теорема 5. Пресек свих затворених полуравни којима су границе праве одређене свим k-дијагоналама (k утврђен број) и које садрже центар описаног круга правилног n-тоугла $A_1A_2\cdots A_n$ је правилан полигон.

Доказ. Пресек полуравни је конвексан скуп. На основу теореме 3. унија свих k-дијагонала је затворена изломљена линија, па је пресек наведених полуравни у исказу теореме конвексан. Граница пресека је сачињена од делова k-дијагонала тј. дужи, па је тај пресек полигон. Како су све k-дијагонале (k утврђен број) једнаке дужине, то су онда и њихова централна растојања од описаног круга око n-тоугла $A_1A_2\cdots A_n$ једнака (Сл. 10.). Према томе, може се конструисати круг који додирује све k-дијагонале n-тоугла $A_1A_2\cdots A_n$ и чији је центар центар описаног круга око n-тоугла $A_1A_2\cdots A_n$.



Сл. 10.

Темена пресека су оне пресечне тачке k-дијагонала за које њихове спојнице са центром не секу ниједну k-дијагоналу, јер би се у супротном таква тачка налазила са оне стране границе бар једне од полуравни са које није центар, па према томе не би припадала пресеку свих поменутих полуравни. Овако добијени полигон се зове *језгро* звездасте полигоналне линије.

Нека је задата једна k-дијагонала n-тоугла $A_1A_2\cdots A_n$ која испуњава услове теореме 3. и нека је s_1 њена симетрала, а P_1 пресечна тачка k-дијагонале и њене симетрале. На Сл.10. је то дијагонала A_3A_n, а $k = 3$, $n = 11$.

Докажимо да је једно теме странице језгра најближе тачки P_1 од свих пресечних тачака задате k-дијагонале од свих пресечних тачака ове k-дијагонале и свих k-дијагонала из њене класе које се налазе са исте стране тачке P_1. Нека је B_2 таква тачка и нека је конструисана још једна k-дијагонала која пролази кроз тачку B_2 и додирује уписани круг језгра у тачки P_2. Свака друга од поменутих пресечних тачака одређује угао CB_2P_2 који је суседан углу P_2B_2O. Како тачке C и O не леже на заједничком краку ових углова и како заједнички крак лежи на правој која садржи k-дијагоналу, то се онда тачке O и C налазе са различитих страна праве која садржи k-дијагоналу, па тачка C не припада језгру. Дакле, тачка B_1 је теме језгра.

Према теореми 4. за сваку k-дијагоналу постоји њој симетрична у односу на праву s_1 k-дијагонала из исте класе, па и за сваку пресечну тачку задате k-дијагонале са осталим k-дијагоналама исте класе постоји њој симетрична тачка. Дакле, постоји тачка B_1 симетрична тачки B_2 у односу на праву s_1. Тада је тачка P_1 средиште дужи B_1B_2 тј $B_1P_1=B_2P_1$ На основу претходних закључака тачка B_1 је теме језгра, а B_1B_2 страница језгра. k-дијагонала која садржи тачку B_2 додирује уписани круг у језгро у тачки P_2, па постоји тачка B_3 која је теме језгра и за коју важи $B_2P_2=B_3P_2$. Међутим, дужи B_2P_1 и B_2P_2 су тангентне дужи конструисане из исте тачке на исти круг, па је $B_2P_1=B_2P_2$. Настављајући овај поступак добија се на крају $B_nP_n= B_1P_n$. Дакле, половине страница су међусобно једнаке, па су и све странице међусобно једнаке. Како је у тај полигон уписан круг, то је онда он правилан. □

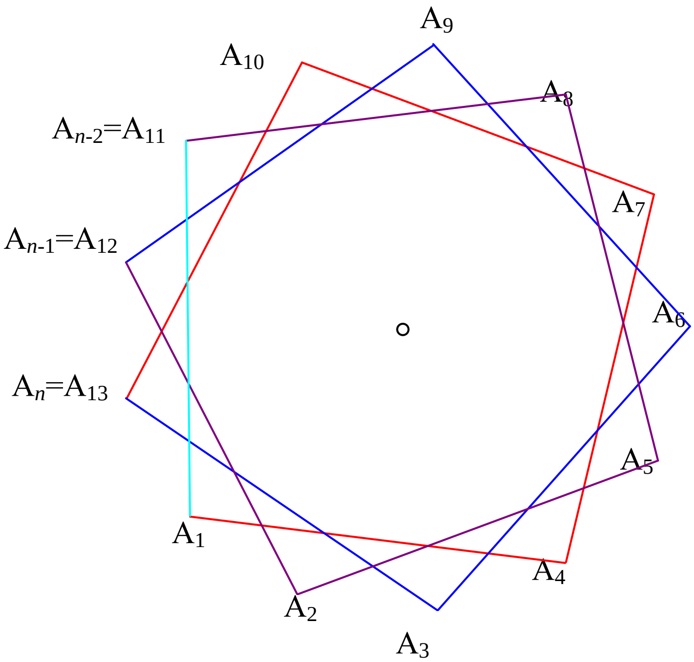
Дефиниција 5. Ако су кућиште и језгро звездасте полигоналне линије правилни полигони са истим бројем темена, онда се она зове *правилна звездаста полигонална линија.*

Теорема 6. Звездаста полигонална линија добијена поступцима из теорема 3, 4, 5 је правилна звездаста полигонална линија.

Доказ. На основу теорема 3,4,5, а по дефиницији 4. следи тврђење. □

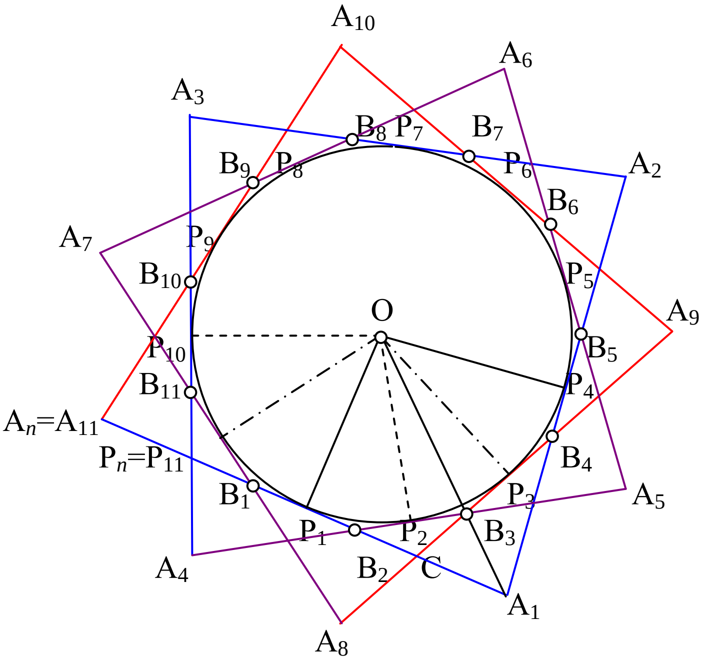
Ми ћемо се у овом тексту бавити само правилним звездастим полигоналним линија.

Теореме 3, 4, 5, 6 обезбеђују постојање правилних звездастих полигоналних линија. Докази ових теорема дају један од два поступка којим се могу конструисати ове полигоналне линије. Тај поступак се зове *страничење* правилне конвексне полигоналне линије и подразумева одбацивање њених страница (Сл. 11).



Сл. 11.

Други поступак се зове *звездичање* правилне конвексне полигоналне линије и представља додавање дужи на њене странице („продужавање“ или „протезање“).



Сл. 12.

Дефиниција 6. Нека је $B_1B_2\cdots B_n$ правилан n-тоугао и K уписани круг у њега. Нека су, даље, $P_1,P_2,\cdots,P_n$ додирне тачке страница полигона и круга K и нека је $k<n/2$ цели број. Тада се централни угао P_iOP_{i+k} чија област садржи k темена полигона $B_1B_2\cdots B_n$ зове k-угао полигона $B_1B_2\cdots B_n$.

Теорема 7. Нека је $B_1B_2\cdots B_n$ правилан n-тоугао са елементима из дефиниције 6. Ако су n и k узајамно прости бројеви, онда се праве одређене одговарајућим страницама полигона $B_1B_2\cdots B_n$ секу у тачкама које су темена правилне звездасте полигоналне линије; њене странице садрже странице полигона $B_1B_2\cdots B_n$ тј. представљају „продужење“ страница од $B_1B_2\cdots B_n$.

Доказ. Доказ изводимо за $k = 3$; за остале случајеве се доказ изводи на исти начин.

Нека је остатак дељења броја n са бројем k једнак 2 (Сл. 12). Угао P_1OP_4 је 3-угао, јер садржи три темена B_2, B_3 и B_4 полигона $B_1B_2\cdots B_n$. Праве B_1B_2 и B_4B_5 су тангенте на круг K у тачкама P_1 и P_2 и секу се у тачки A_1, јер је под условом $k < n/2$ k-угао мањи од опруженог угла. Примењујући исти поступак на 3-угао P_4OP_7 добија се тачка A_2. На овај начин може се конструисати $\frac{n-2}{3}$ 3-углова који, осим заједничког крака, немају других заједничких тачака. Ових $\frac{n-2}{3}$ 3-углова садржи $n-2$ темена $B_2, B_3, \cdots B_{n-1}$ и одређују $\frac{n-2}{3}$ тачака A_i. Следећи 3-угао је $P_{n-1}OP_2$ и садржи темена B_n, B_1, B_2, а такође има заједнички део са полазним P_1OP_4 3-углом, па је на тај начин једном покривен круг К и почиње ново покривање. $\frac{n-2}{3}$ 3-углова који почињу 3-углом $P_{n-1}OP_2$ завршава се краком који садржи тачку P_{n-3}. Ово покривање одређује, такође, $\frac{n-2}{3}$ тачака A_i. Следећи 3-угао $P_{n-3}OP_n$ нема заједнички део са полазним 3-углом P_1OP_4, па и он одређује још једну тачку A_i. Следећи 3-угао P_nOP_3 има заједнички део са полазним 3-углом P_1OP_4, па се њиме почиње ново покривање. $\frac{n-2}{3}$ 3-углова који почињу 3-углом P_nOP_3 завршава се краком који садржи тачку P_{n-2}. Ово покривање одређује још $\frac{n-2}{3}$ тачака A_i. 3-угао чији један крак садржи тачку P_{n-2} има други крак који садржи тачку P_1, па завршава треће покривање круга К и одређује још једну од тачака A_i. На овај начин је одређено $\frac{n-2}{3}+\frac{n-2}{3}+1+\frac{n-2}{3}+1=n$ тачака $A_1, A_2, \cdots, A_n$ које повезане дужима редоследом којим су те тачке добијене представљају звездасту полигоналну линију.

Докажимо да је звездаста полигонална линија $A_1A_2\cdots A_n$ правилна. Како је n-тоугао $B_1B_2\cdots B_n$ правилан, то је онда и полигон $P_1P_2\cdots P_n$ правилан, јер су тачке $P_1, P_2, \cdots, P_n$ средишта страница полигона $B_1B_2\cdots B_n$. Тада је угао $P_1OP_2 = P_2OP_3 = \cdots = P_nOP_1$ једнак $\frac{360^0}{n}$, а 3-угао $\frac{3\cdot 360^0}{n}$. Троугао A_1OP_4 је правоугли чији је оштар угао

$$A_1OP_4 \text{ једнак } \frac{3\cdot 360^0}{2\cdot n}=\frac{3\cdot 180^0}{n},$$

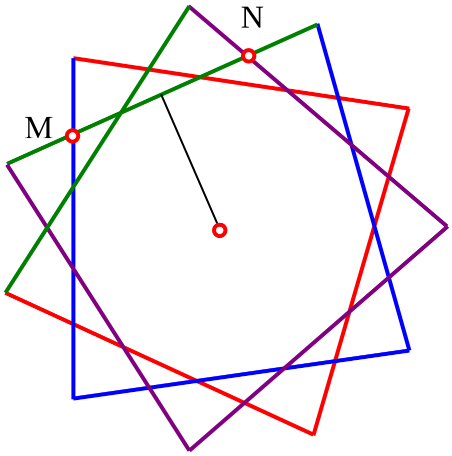
а тада је

$$OA_1=\frac{OP_4}{\cos\frac{3\cdot 180^0}{n}} \text{ и } A_1P_4=OP_4\cdot tg\frac{3\cdot 180^0}{n}.$$

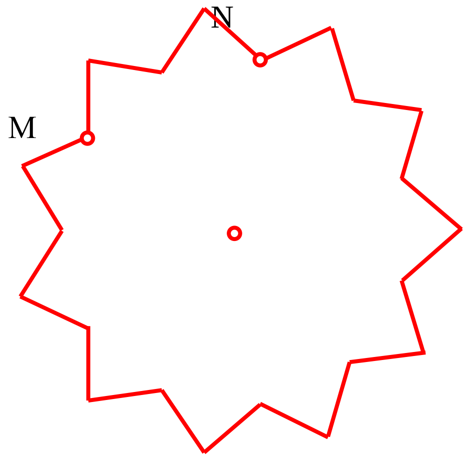
На исти начин се из троугла A_2OP_4 закључује

$$OA_2=\frac{OP_4}{\cos\frac{3\cdot 180^0}{n}} \text{ и } A_2P_4=OP_4\cdot tg\frac{3\cdot 180^0}{n}.$$

Из ових једнакости следи $OA_1 = OA_2$ и $A_1P_4 = A_2P_4$, а како је $A_1P_4 + A_2P_4 = A_1A_2$, то је онда страница звездасте полигоналне линије $A_1A_2=2\cdot OP_4\cdot tg\frac{3\cdot 180^0}{n}$. Настављајући овај поступак и узимајући у обзир да је OP_4 полупречник уписаног круга у полигон $B_1B_2\cdots B_n$ добија се да су све дужи OA_i, $i = 1,2,\cdots,n$ једнаке и све странице звездасте полигоналне линије једнаке. Према томе, тачке A_i припадају истом кругу чији је центар О а све странице звездасте полигоналне линије су 3-дијагонале правилног многоугла чија су темена A_i у одређеном редоследу. Дакле, добијена звездаста полигонална линија је правилна. За остале случајеве доказ се изводи на исти начин. □



Сл.13$_{\text{А}}$.
Правилна звездаста полигонална линија



Сл.13$_{\text{Б}}$
Правилна звездолика полигонална линија

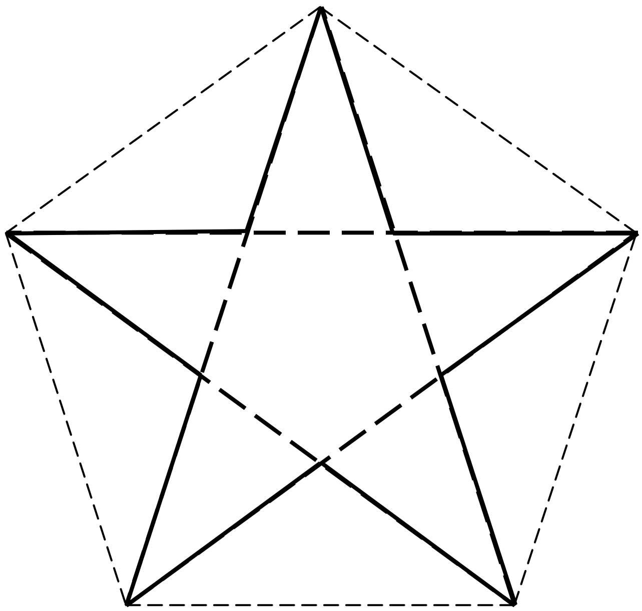
Претходних закључак оправдава следећу дефиницију:

Дефиниција 7. Ако се од сваке странице правилне звездасте полигоналне линије одстрани део између две пресечне тачке текуће странице са свим осталим страницама које је секу, при чему су те тачке најближе од свих пресечних тачака крајевима странице, добије се проста полигонална линија (Сл. 13$_{\text{А}}$. и Сл. 13$_{\text{В}}$.). Остаци страница правилне звездасте полигоналне линије су међусобно једнаке дужи и странице су просте полигоналне линије која има $2n$ страница и $2n$ темена. Од ових $2n$ темена n лежи на једном, а n на другом од два концентрична круга. Ову просту полигоналну линију зваћемо *правилна звездолика полигонална линија*, а полигон одређен овом полигоналном линијом *правилан звездолики полигон*.

Свака правилна звездаста полигонална линија одређује тачно једну правилну звездолику линију, и обрнуто. Због тога ћемо за ове две линије рећи да су *одговарајуће*.

У дефинисању правилних звездастих полигоналних линија коришћени су цели бројеви n и k за које се претпостављало да су узајамно прости. Ова чињеница подсећа на сведени разломак којем су бројилац и именилац редом бројеви n и k, па се овакав разломак може користити као ознака за правилну звездасту полигоналну линију. Уобичајено се пише $\left\{\frac{n}{k}\right\}$. Ако је $k = 1$, онда је то ознака за правилан конвексан полигон $\{n\}$. Ове знаке потичу од швајцарског математичара Шлефлија, а по њему се и зову Шлефлијеве ознаке. Број k се зове *густина* полигоналне линије $\left\{\frac{n}{k}\right\}$ и представља број окретаја око језгра надовезивањем страница, а обележава се са d_n. Број различитих правилних звездастих полигоналних линија за задато n представља број природних бројева мањих од n који су са њим узајамно прости тј. тај број је $\frac{1}{2}\Phi(n)$, где је Φ Ојлерова функција.

Правилна петострана звездаста полигонална линија се зове *пентаграм* или петокрака. Ова фигура има посебан значај за ову тему.



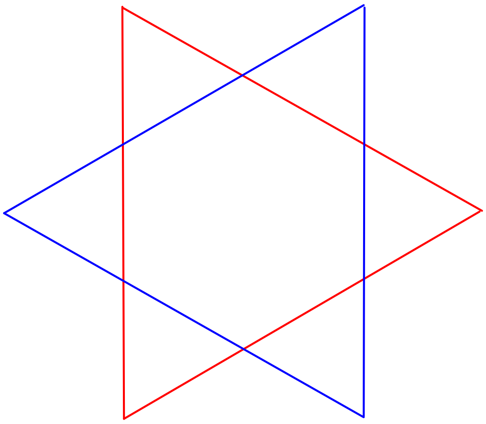
Сл. 14.

3. Склопови полигона

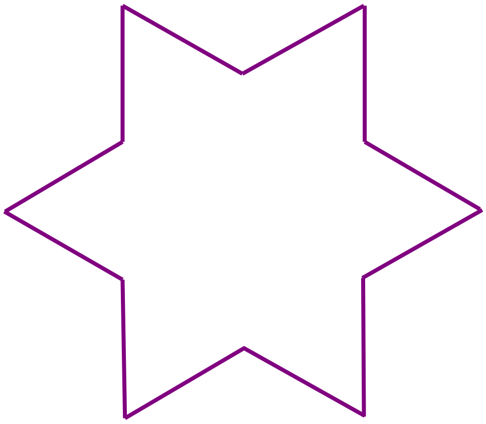
Правилним звездастим полигоналним линијама слични су „звездолики" облици који се зову *склопови*.

Дефиниција 8. Под *склопом полигоналних линија* се подразумева унија подударних правилних полигоналних (простих или звездастих) линија које имају заједнички центар. Под *центром полигоналне линије* се подразумева центар описаног односно уписаног круга те линије.

Склопови се разликују од правилних звездастих полигоналних линија по томе што су правилне звездасте полигоналне линије непрекидне целине, док склопови то нису. На пример, Давидова звезда представља два једнакостранична троугла који имају исти центар, а темена су им темена правилног шестоугла (Сл. $15_А$ и Сл. $15_Б$).

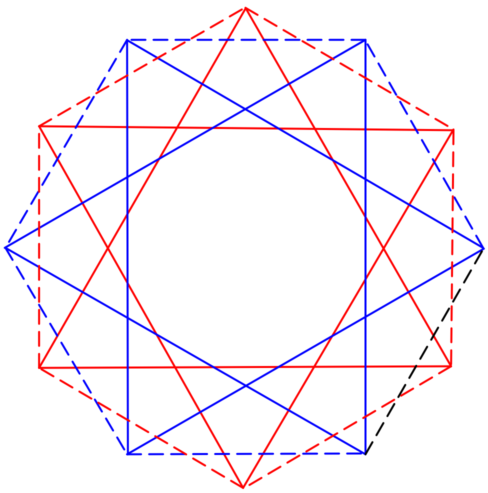


Сл.15$_А$.



Сл.15$_Б$.

За склоп чија темена припадају правилној полигоналној линији каже се да је *теменима правилан*, а за склоп чије странице садрже странице правилне полигоналне линије да је *правилан страницама*. Давидова звезда је и теменима и страницама правилан склоп. Правилна полигонална линија чија су темена и темена склопа зове се *кућиште*, а она чије странице леже на страницама склопа *језгро*. Ознаке за правилне склопове су знатно компликованије од ознака за правилне полигоналне линије. Општа ознака може бити следећа: $\{l \cdot n\}\left[m\left\{\frac{n}{k}\right\}\right]\{l \cdot n\}$, где l означава број $\{n\}$-ова у кућишту

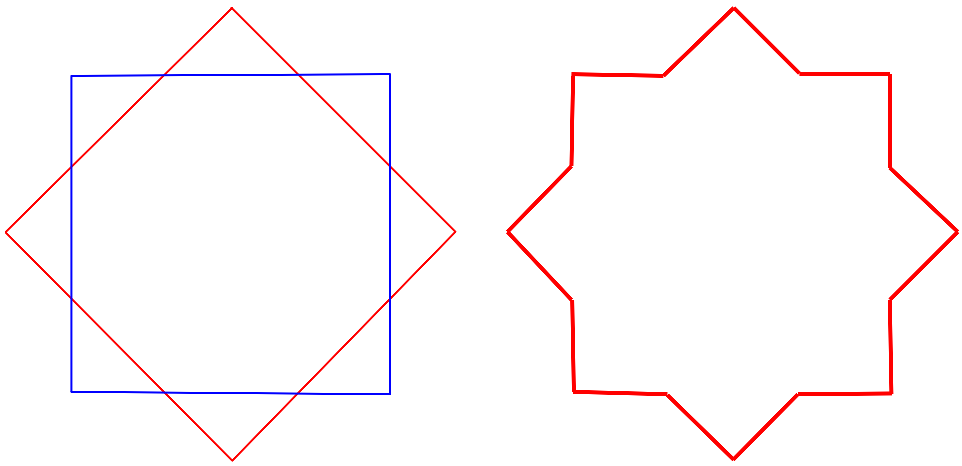


Сл.16.

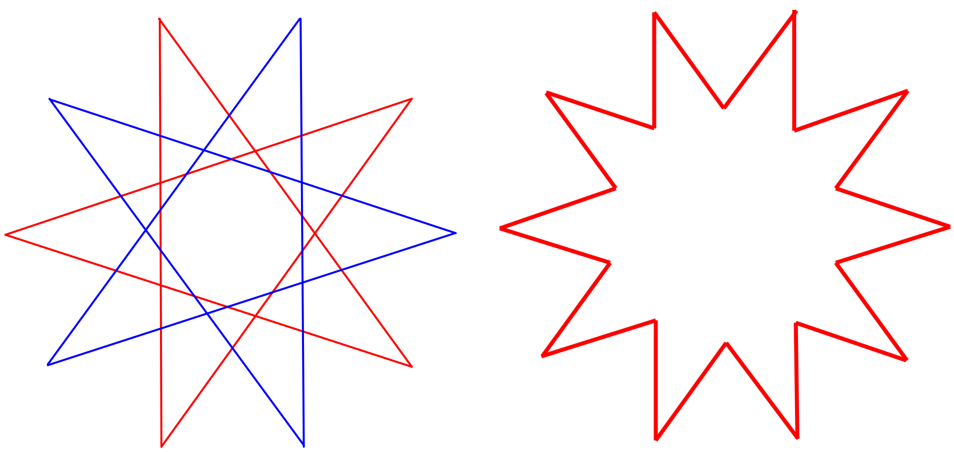
или у језгру, а m број правилних полигоналних линија (простих или звездастих) у склопу. На пример, склоп на Сл.16. има ознаку $\{12\}[4\{3\}]\{12\}$. Дакле, $l=2$ тј. 2 шестоугла у дванаестоуглу, $k=2, n=6$, $\left\{\frac{n}{k}\right\}=\{3\}$ тј. кућиште чине два шестоугла чија су темена наизменична темена у дванаестоуглу, а склоп чине четири троугла. У складу са овим, ознака Давидове звезде је $\{6\}[2\{3\}]\{6\}$.

Правилни склопови се могу добити истим поступцима као и правилне звездасте полигоналне линије тј. страничењем и звездичањем.

На Сл. 17. и Сл. 18. представљена су још два занимљива склопа.



Сл. 17. $\{8\}[2\{4\}]\{8\}$



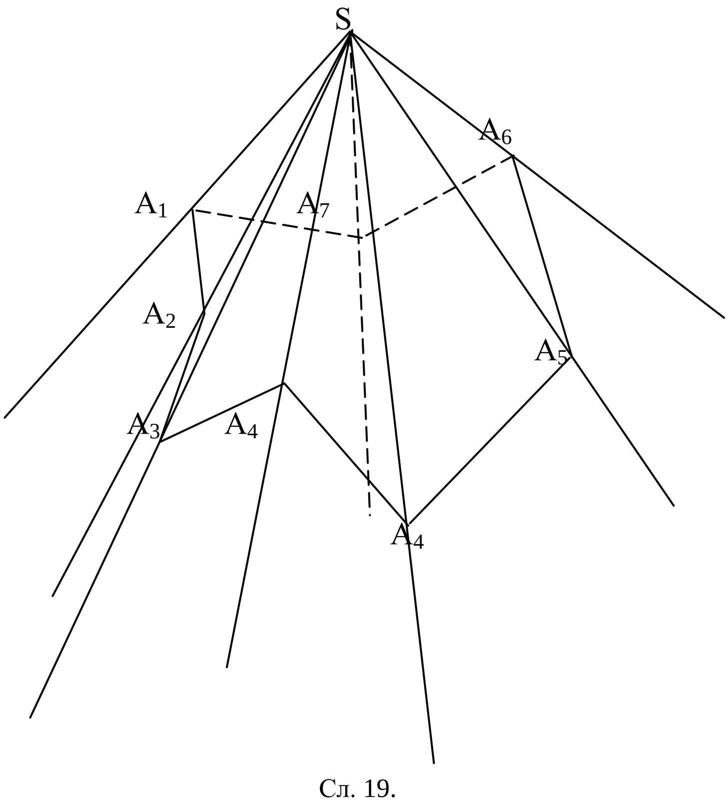
Сл. 18. $\{10\}\left[2\left\{\frac{5}{2}\right\}\right]\{10\}$

4. Полиедарске површи и полиедри

У разматрању неких општих особина полиедарских површи и полиедара нећемо се бавити неким појмовима и особинама тих појмова сматрајући их опште познатима. На пример, нећемо посебно дефинисати нормалност праве на раван, нормалност равни, диедар, паралелну (и ортогоналну) пројекцију на раван итд., као и особине ових појмова и односа. Дефинисаћемо само оне од опште познатих појмова који ће у овом тексту бити прилагођени теми.

Дефиниција 9. Нека су задати раван полигон P_n (ограничен простом полигоналном линијом) и тачка S која не лежи равни полигона P_n (Сл.19.). Унија свих полуправих којима је почетна тачка S и које садрже по једну тачку полигона P_n зове се *рогаљ прве врсте*. Унија свих полуправих од ових које садрже по једну тачку руба полигона P_n зове се *површ рогља*. Свака од ових полуправих која садржи теме полигона P_n зове се *ивица рогља*. Две ивице рогља су *суседне* ако садрже суседна темена полигона P_n. Један од два угла одређен суседним ивицама зове се *ивични угао* или *страна* рогља. Унија површи и комплемента, у односу на простор, рогља прве врсте зваћемо *рогаљ друге врсте*.

Јасно је да рогаљ прве врсте и њему одговарајући рогаљ друге врсте имају исте ивичне углове.



Сл. 19.

Дефиниција 10. Скуп полигона простора је *повезан* ако за свака два темена из скупа темена ових полигона постоји изломљена линија састављена од страница ових полигона која повезује ова два темена тј да су та два темена крајеви изломљене линије.

Дефиниција 11. Нека је задат скуп од коначног броја повезаних полигона P_1, P_2, $\cdots$, P_n таквих да важи:

1) свака страница било ког полигона је страница још највише једног; за ова два полигона се тада каже да су *суседни*;

2) свака два суседна полигона леже у различитим равнима;

3) свако теме било ког полигона је теме највише једног рогља чији су ивични углови одређени свим полигонима којима је то теме заједничко.

Унија полигона P_1, P_2, $\cdots$, P_n се тада зове *полиедарска површ*.

Ако је свака страница било ког полигона заједничка за тачно два полигона, за полиедарску површ се каже да је *затворена* у супротном је *отворена*.

Ако било која два полигона немају заједничких унутрашњих тачака, за полиедарску површ се каже да је *проста*.

Полигони из овог скупа се зову *стране* полиедарске површи, њихове странице се зову *ивице*, а њихова темена *темена* полиедарске површи.

Дефиниција 12. Проста затворена полиедарска површ дели скуп преосталих тачака простора на два дисјунктна скупа:

1) скуп тачака са особином да за сваку тачку из тог скупа постоји права која је садржи и која са полиедарском површи нема заједничких тачака;

2) скуп тачака за које таква права не постоји.

Први од ових скупова се зове *спољашња област* (спољашњост) полиедарске површи, а друга *унутрашња област* (унутрашњост) полиедарске површи.

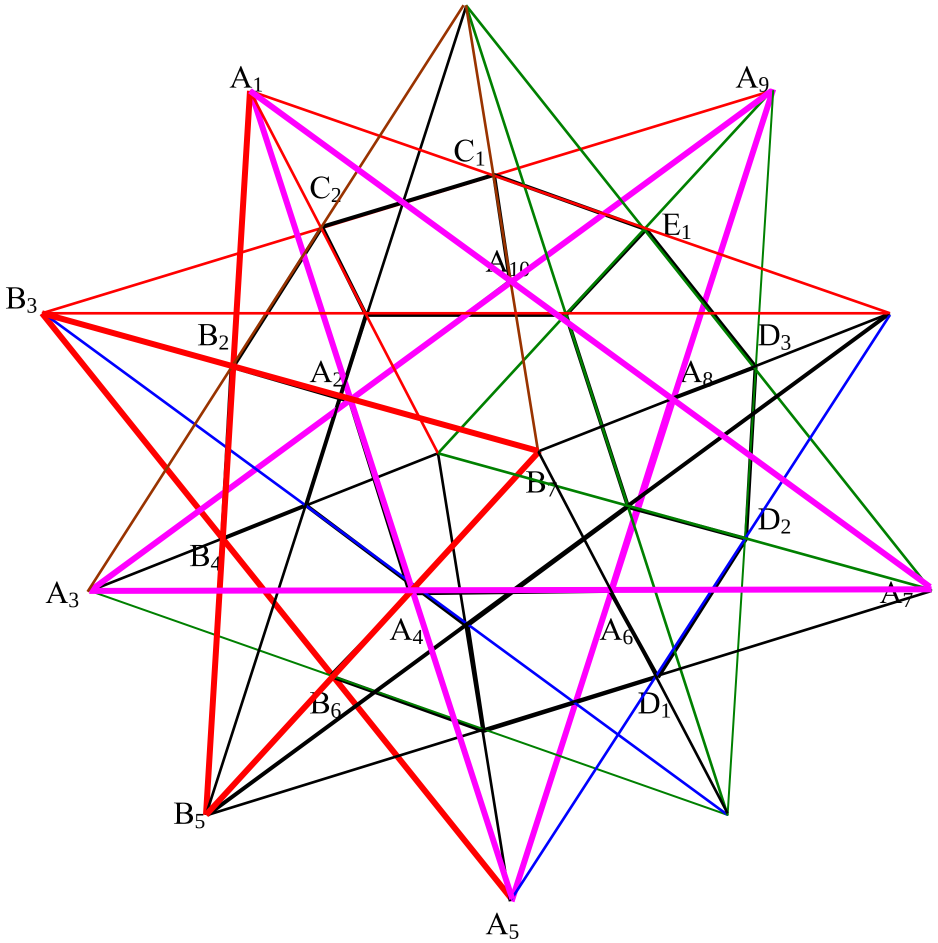
Унија просте затворене полиедарске површи и њене унутрашње области зове се *полиедар*. Темена, ивице и стране полиедарске површи се тада зову темена, ивице и стране полиедра. У даљем тексту ћемо под полиедарска површ подразумевати затворену полиедарску површ ако се другачије не нагласи.

Такође наводимо опште познато тврђење: полиедар је *конвексан* ако и само ако за раван сваке стране полиедра све остале тачке полиедра леже са исте стране те равни тј. конвексан полиедар је пресек полупростора чије су границе равни страна полиедра.

Дефиниција 13. Под *протезањем* равне фигуре се подразумева унија те фигуре са ограниченим делом њене равни који са њом има заједнички руб или непрекидан део руба, при чему руб (или његов део) постаје део унутрашњости новодобијене фигуре и остаје посебно истакнут.

Дефиниција 14. Нека је задат неконвексан полиедар П (пи) и утврђен природан број k. Ако раван сваке стране полиедра П садржи тачно још k-1 страна и ако постоје протезања свих страна једне равни чијом се унијом добија звездолики полигон, онда се унија свих тако добијених звездоликих полигона зове *звездолика полиедарска површ*.

На Сл.20. представљен је један такав полиедар чије су стране троуглови. Уочимо , на пример, страну $A_1A_2A_{10}$. У равни ове стране налазе се још четири стране $A_2A_3A_4$, $A_4A_5A_6$, $A_6A_7A_8$ и $A_8A_9A_{10}$. Протезањем сваке од њих за петоугао $A_2A_4A_6A_8A_{10}$ и унијом тих протезања добија се звездолики пентаграм $A_1A_2\cdots A_{10}$ коме је одговарајући пентаграм $A_1A_5A_9A_3A_7$. На сличан начин, узимајући страну $A_1B_2A_2$ суседну страни $A_1A_2A_{10}$, добија се



Сл. 20.

звездолики пентаграм $A_1B_2B_3B_4B_5B_6A_5A_4B_7A_2$ и одговарајући пентаграм $A_1B_5B_7B_3A_5$. Како је ивица A_1A_2 је заједничка за ова два звездолика полигона који се не налазе у истој равни, то је онда њихов пресек дуж. Према дефиницији 3. та заједничка дуж је страница звездасте полигоналне линије. Ако се странице свих ових звездастих полигоналних линија схвате као ивице звездолике површи из дефиниције 14., онда је та површ сложена и по аналогији са звездастим полигонима и по дефиницији 11. може се звати *звездаста полиедарска површ.* Тада су њена темена само темена рогљева прве врсте. Ову површ ћемо у даљем тексту схватати на оба начина. Напоменимо да је на Сл. 20. једна од правилних звездастих полиедарских површи и о њој ће се још расправљати.

Пре увођења појма правилности звездастих полиедарских површи, а не полиедара, јер ће појам полиедра бити третиран искључиво у смислу дефиниције 12., наводимо три изузетно значајне теореме о полиедрима.

Теорема 8. (Лопандићева). Нека је П произвољан полиедар. Постоји раван на коју се може полиедар П ортогонално пројектовати тако да се никоја два темена полиедра не пројектују у исту тачку и да се ниједна страна полиедра не пројектује у дуж.

Доказ. Нека је П произвољан полиедар и A једно његово теме. Нека су, даље, кроз теме A конструисане праве паралелне свим правама одређеним са било која два темена полиедра и све равни паралелне са равнима страна. Ту се убрајају и све преве одређене теменом A и све стране које садрже теме A. Нека је l права различита од свих поменутих правих, и нека права l не лежи ни у једној од конструисаних равни кроз теме A. Како је број темена полиедра и број његових страна коначан, то онда таква права постоји. Нека је γ произвољна раван нормална на праву l. Докажимо да се ортогоналном пројекцијом овог полиедра на раван γ

1) његова темена пројектују у различите тачке и

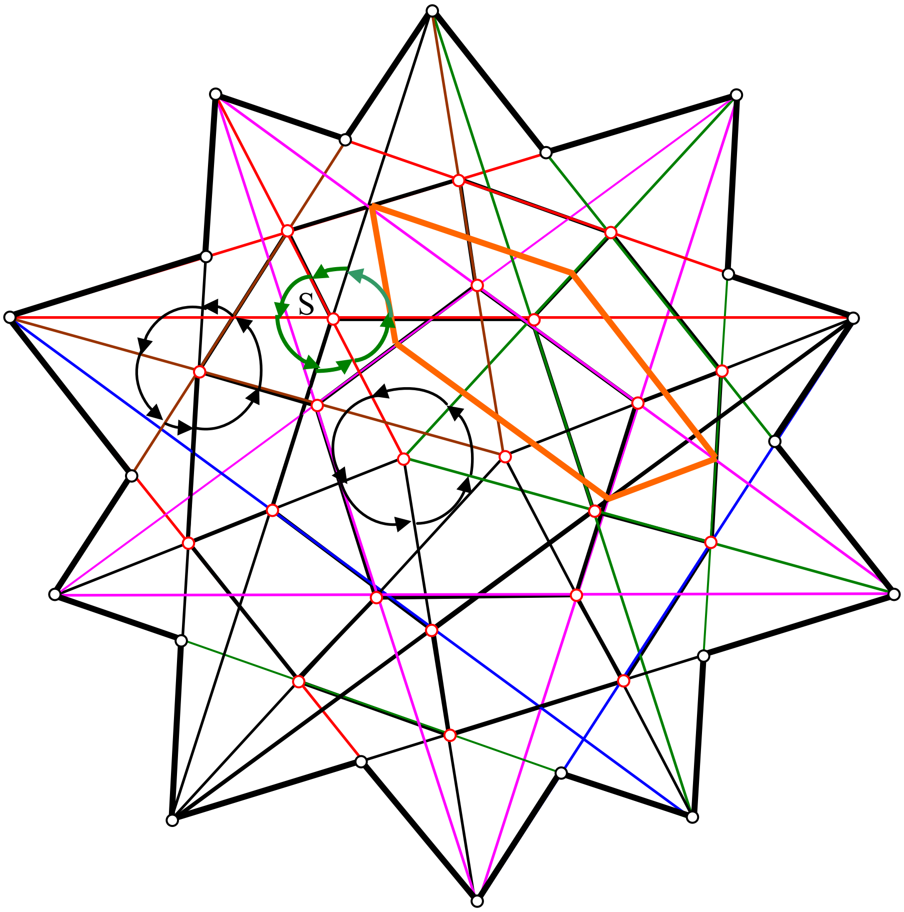
2) да се ниједна страна не пројектује у дуж.

1) Ако би се два различита темена пројектовала у исту тачку, онда се оба темена налазе на истом пројекцијском зраку или различити пројекцијски зраци продиру раван γ у истој тачки. Прву могућност одбацујемо, јер би тада права l била паралелна једној прави одређеној различитим теменима полиедра, што је немогуће с обзиром на избор праве l. Друга могућност повлачи да у истој тачки постоје две нормале на исту раван, што је по познатом ставу из геометрије немогуће.

2) Ако би се једна страна полиедра пројектовала у дуж, онда би се, на основу 1) бар три темена те стране пројектовала у три различите тачке те дужи. Пројекцијски зраци ових темена су међусобно паралелне праве јер су нормалне на пројекцијску раван γ. Две од ових правих одређују једну раван β која садржи праву одређену овом дужи на коју је страна пројектована. Трећа од ових правих садржи једну тачку равни β одређене паралелним правама и паралелна је овим правама, па према томе и она лежи у истој равни. Раван која садржи праву нормалну на другу раван је нормална на ту раван. Према томе, раван β је нормална на раван γ. Према конструкцији равни кроз теме A, постоји раван паралелна са равни β. По познатом ставу из геометрије ова раван је нормална на раван γ. Такође, по познатом ставу из геометрије ова раван садржи нормалу из темена A на раван γ, а то је права l. Дакле, противуречност, јер права l не лежи ни у једној равни која је паралелна равни стране. □

Теорема 9. Ако је t број темена полиедра П, онда је збир његових ивичних углова $(t\text{-}2)\cdot 360^0$.

Доказ. Нека је полиедар П пројектован на раван γ под условима теореме 8. (Видети Сл. 21.). Тада се свака ивица пројектује у дуж и свака страна у полигон са истим бројем темена. Такође следи да ће у пројекцији бити исти број полигона као и страна полиедра. Како је полиедар ограничена фигура, то је онда и пројекција ограничена дужима равна фигура тј. руб пројекције је полигонална линија. Ако рубна полигонална линија има k темена, онда се у унутрашњост руба пројектује t-k темена полиедра. Збир унутрашњих углова полигона зависи само од броја темена (страница). Како су ивични углови полиедра уједно и унутрашњи углови страна, то је онда збир ивичних углова полиедра једнак збиру свих унутрашњих углова страна, према претходним закључцима и збиру свих унутрашњих углова полигонâ пројекције. Један број страна до којих пројекцијски зраци допиру без продора кроз унутрашњост полиедра пројектује се у видљиве полигоне



Сл. 21.

пројекције, а други у невидљиве. И једни и други имају одређен број полигона који имају једну зајеничку страницу са по једном страницом руба пројекције. Према томе, унутрашњи углови рубног полигона пројекције покривени су два пута унутрашњим угловима полигонâ пројекције, па их треба два пута урачунати у укупан збир. Свако од осталих *t-k* темена је теме једног броја полигона чији унутрашњи углови код тог темена чине пун угао. На основу теореме 2. и на основу претходних закључака је тада збир ивичних углова полиедра једнак

$$2\cdot(k-2)\cdot 180^0 + (t-k)\cdot 360^0 = (t-2)\cdot 360^0. \square$$

Лема 1. Број ивичних углова било ког полиедра два пута је већи од броја његових ивица.

Доказ. Свака страна полиедра има исти број унутрашњих углова, који су и ивични углови полиедра, и страница. Како је свака страница стране тј. ивица полиедра заједничка за тачно две стране, то је онда свака ивица у укупном збиру узета два пута, па је онда број ивичних углова два пута већи од броја ивица полиедра. □

Теорема 10. (Ојлерова). Ако је t број темена, i број ивица, а s број страна полиедра П, онда важи t-i+s=2.

Доказ. Нека полиедар П има s страна и нека прва страна има m_1 страница (углова), друга m_2, итд. s-та m_s-та m_s страница (углова). Тада је збир свих ивичних углова једнак збиру унутрашњих углова свих страна тј.

$$(m_1-2)\cdot 180^0+(m_2-2)\cdot 180^0+\cdots+(m_s-2)\cdot 180^0 = (m_1+m_2+\cdots+m_s)\cdot 180^0 - s\cdot 360^0 = \\ =2i\cdot 180^0 - s\cdot 360^0.$$

Задњи израз је добијен на основу леме 1. На основу Теореме 9., овај израз је једнак $(t-2)\cdot 360^0$, па онда важи $2\,i\cdot 180^0 - s\cdot 360^0 = (t-2)\cdot 360^0$. Дељењем ове једнакости са 360^0 добија се $i-s = t-2$ тј. $t-i+s=2$. □

Уобичајено је да се број темена полиедра обележава са N_0, број ивица N_1, а број страна са N_2. Тада се Ојлерова формула пише $N_0 - N_1 + N_2 = 2$.

Теореме 8., 9. и 10. имају посебан значај у проучавању полиедара и полиедарских површи. Занемаривање значаја било које од њих доводи до озбиљних недоумица у проглашавању полиедрима фигура које су налик полиедрима. Теорема 8. представља основу за добро пројектовање.

5. Правилност полиедарских фигура

У дефинисању правилности полиедарских површи и полиедара учествује правилност страна која не прави сметње правилности ни код конвексних ни код звездастих полиедарских површи. Међутим, рогаљ није погодна фигура за дефинисање правилних звездастих полиедарских површи. Правилност конвексних полиедара захтева правилност рогљева, а рогаљ је правилан ако је прве врсте и има једнаке ивичне углове и једнаке диедре тј. ако је конвексан и има једнаке ивичне углове. Код звездастих полиедарских површи се појављују и рогљеви који нису конвексни. Због тога се уводи појам темене фигуре.

Дефиниција 15. Ако средишта свих ивица полиедарске површи које полазе из истог темена леже у истој равни, тада се полигонална линија добијена редом надовезивањем дужи које спајају средишта која леже у истој страни зове *темена фигура*. Под теменом фигуром ћемо, такође, подразумевати и полигоналну линију добијену на исти начин од тачака које леже на ивицама и једнако су удаљене од темена.

Јасно је да су темене фигуре из ове дефиниције међусобно сличне фигуре, а да је темена фигура добијена од средишта представник класе. На Сл. 21. дата је пројекција темене фигуре у наранџастој боји, али је темена фигура и петоугао означен црном бојом који је хомотетичан првом.

Дефиниција 16. Полиедарска површ (конвексна или звездаста) је *правилна* ако и само ако су јој све стране правилни полигони (конвексни или звездолики) са истим бројем страница и све темене фигуре правилне полигоналне линије.

Дефиниција 17. Протезање страна правилне полиедарске површи којим се добија правилна звездаста полиедарска површ зове *звездичање* полазне полиедарске површи.

Поред добијања правилних звездастих полиедарских површи звездичањем постоји и поступак који се зове *страничење* и који је нешто компликованији од звездичања. За добијање правилних звездастих полиедарских површи користиће се у овом тексту само звездичање. Подсетимо се Шлефлијевих ознака за правилне полиедарске површи. Ако је $\{p\}$ ознака стране, а $\{q\}$ ознака темене фигуре правилне полиедарске површи, онда је $\{p,q\}$ Шлефлијева ознака правилне полиедарске површи. За правилне звездасте полиедарске површи тачно један од бројева p или q може бити рационалан број. Правилне звездасте полиедарске површи не одређују полиедар у смислу дефиниције 12.

6. Правилне звездасте полиедарске површи

У овој тачки наодимо све правилне звездасте површи и њихово добијање од правилних конвексних полиедарских површи звездичањем. Да би се то постигло треба размотрити све праве по којима ће раван једне стране одређене правилне полиедарске површи сећи равни свих других страна и из протезања стране издвојити правилне полигоне ограничене овим правама. За правилни тетраедар и коцку једине праве по којима се секу равни страна су праве одређене ивицама (код коцке се равни наспрамних страна и не секу). Због тога за правилни тетраедар и за коцку не постоје звездичања којима би се добиле правилне полиедарске површи. За правилни октаедар постоји звездичање, али оно не даје полиедарску површ (о овој површи ће се говорити касније). Дакле, остају само правилни додекаедар и правилни икосаедар.

6.1. Мали звездасти додекаедар $\left\{\frac{5}{2},5\right\}$.

Теорема 11. Из протезања свих страна правилног додекаедра може се издвојити скуп правилних звездоликих пентаграма чија унија представља правилну звездасту полиедарску површ.

Доказ. Нека је $A_2A_4A_6A_8A_{10}$ једна страна правилног додекаедра (Сл. 20.) и $A_2A_{10}C_1C_2B_2$ и $A_6D_1D_2D_3A_8$ њој суседне стране. Раван стране $A_2A_4A_6A_8A_{10}$ сече редом друге две стране по правама A_2A_{10} и A_6A_8. Ове две праве секу се у тачки A_9. Страна $A_2A_4A_6A_8A_{10}$ је тада протегнута за троугао $A_{10}A_8A_9$ који је једнакокраки, јер су углови на основици A_8A_{10} једнаки као спољашњи углови правилног петоугла,па је $A_8A_9=A_{10}A_9$. Истим поступком се страна $A_2A_{10}C_1C_2B_2$ преко странице $A_{10}C_1$ протеже за троугао $A_8A_{10}A_9'$ који је, такође, једнакокраки, па је $A_8A_9' = D_3A_9'$. Троуглови $A_{10}A_8A_9$ и $A_8D_3A_9'$ су подударни, па је $A_8A_9 = A_8A_9'$. Како се тачке A_9 и A_9' налазе на пресечној прави равни страна $A_2A_4A_6A_8A_{10}$ и $A_6D_1D_2D_3A_8$ и како су са исте стране тачке A_8, то се онда ове тачке поклапају. На исти начин се показује да и равни осталих страна суседних страни $C_1A_{10}A_8D_3E_1$ садрже тачку A_9. Протезањем страна $A_2A_{10}C_1C_2B_2$ и $A_6D_1D_2D_3A_8$ преко страница A_2A_{10} и A_6A_8 редом добија се тачка B_7. Дакле, протезање ове две стране има две заједничке од протегнутих тачака. Како су ове две стране додекаедра произвољно изабране, то онда овај закључак важи за било које две стране додекаедра чије се равни секу. Из једнакокраког троугла насталог протезањем добија се:

$$A_8A_9 = \frac{a}{2\cos 72^0} = \frac{a}{2\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{2a}{\sqrt{5}-1} = \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2} = d\ ,$$

где је a ивица додекаедра, а d дијагонала његове петоугаоне стране. Протезањем стране $A_2A_4A_6A_8A_{10}$ преко свих њених страница, свака страница се продужава у оба смера за дужину дијагонале. На основу Теореме 7. овај поступак даје правилан звездасти пентаграм чија је дужина странице једнака

$$a+2d = a+2a\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2} = a + a\sqrt{5} + a = a\left(2+\sqrt{5}\right).$$

Како је страна $A_2A_4A_6A_8A_{10}$ произвољно изабрана, то се онда овим поступком све стране додекаедра звездичају у правилне пентаграме странице дужине $a\left(2+\sqrt{5}\right)$. Према томе, сви пентаграми су подударни. Како сваки пентаграм лежи у једној страни додекаедра, а како је свака ивица додекаедра заједничка за тачно две стране и свака страница пентаграма представља продужење ивице додекаедра, то је онда свака страница звездастог пентаграма заједничка за тачно два звездолика пентаграма. Како је свако теме једног пентаграма заједничко за још четири пентаграма, а како свака два пентаграма који леже у непаралелним равнима имају два заједничка темена, то је онда један пентаграм повезан преко темена са десет других пентаграма тј. са свима осим са оним које лежи у паралелној равни.

Покажимо да је унија свих овако добијених пентаграма повезана површ у смислу дефиниције 10. Два темена истог пентаграма су повезана страницама звездастог пентаграма. Два темена страна које су повезане теменом су повезана, јер се од једног темена до заједничког темена долази на први начин, од заједничког темена до другог се долази опет на први начин. Два пентаграма у паралелним равнима су повезани једним од осталих десет пентаграма. Дакле, унија ових дванаест пентаграма је полиедарска површ. Како су темена једне стране додекаедра једнако удаљена од одговарајућег темена овако добијене полиедарске површи, то је онда по дефиницији 15. овај правилни петоугао темена фигура. Већ је речено да су сви пентаграми правилни, па је добијена површ правилна звездаста полиедарска површ. □

Дефиниција 18. *Језгро* полиедарске површи је максимално конвексно тело које ограничавају равни страна површи, а *кућиште* минимални конвексан полиедар који садржи темена површи.

Правилна звездаста полиедарска површ добијена на основу Теореме 11. зове се *мали звездасти додекаедар* и има Шлефлијеву ознаку $\left\{\frac{5}{2},5\right\}$ тј. стране су правилни пентаграми, а темене фигуре правилни петоуглови.

На основу теореме 11. језгро малог звездастог додекаедра је правилни додекаедар. Кућиште малог звездастог додекаедра је правилни икосаедар; ово ће бити показано у 6.2.

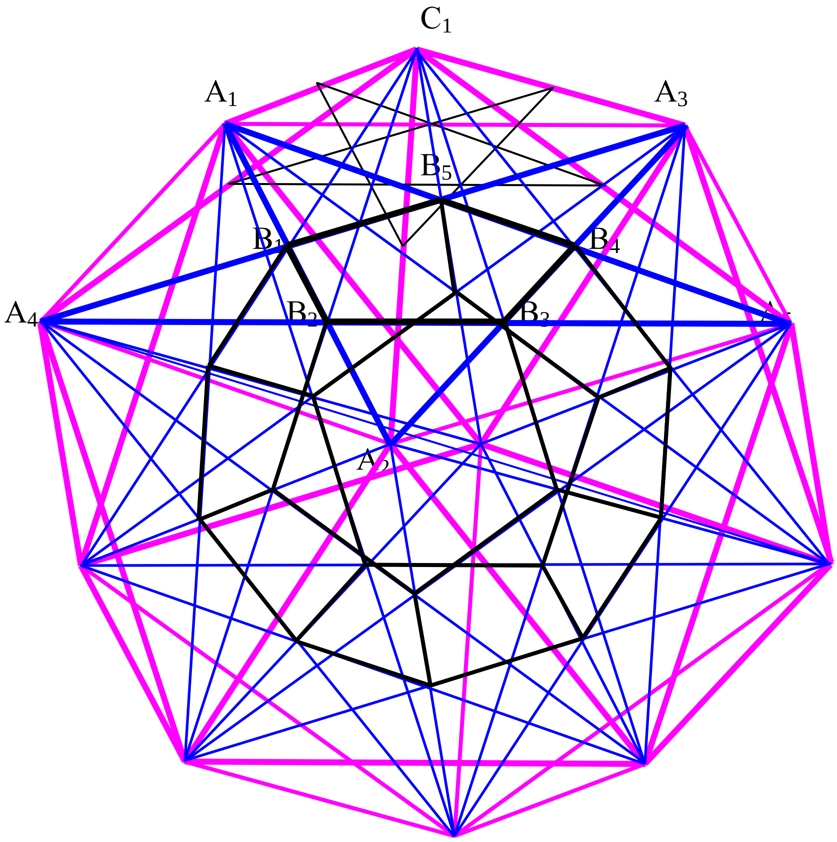
6.2. Велики додекаедар $\left\{5,\frac{5}{2}\right\}$.

Теорема 12. Звездичањем малог звездастог додекаедра, тако што се свака његова страна протеже до правилног петоугла, добија се правилна звездаста полиедарска површ.

Доказ. Нека је пентаграм $A_1A_2A_3A_4A_5$ једна страна малог звездастог додекаедра, петоугао $B_1B_2B_3B_4B_5$ страна додекаедра од које је настао пентаграм звездичањем додекаедра и C_1 теме које одговара страни $B_1B_2B_3B_4B_5$ у том звездичању. Протезањем пентаграма $A_1A_2A_3A_4A_5$ за троуглове $A_1B_1A_4$, $A_4B_2A_2$, $A_2B_3A_5$, $A_5B_4A_3$ и $A_3B_5A_1$ добија се петоугао $A_1A_4A_2A_5A_3$. Према Теореми 11., странице пентаграма су добијене продужавањем ивица додекаедра за дужину његове дијагонале, па су дужи A_1B_1 и B_1A_4 дужине једнаке $\frac{(\sqrt{5}+1)a}{2}$ као и све дужи које спајају одговарајућа темена стране $B_1B_2B_3B_4B_5$ додекаедра и пентаграма $A_1A_2A_3A_4A_5$. Из троугла $A_1B_1A_4$ је тада

$$A_1A_4 = 2\cdot\frac{(\sqrt{5}+1)a}{2}\cdot\sin 54^0 = (\sqrt{5}+1)a\cdot\cos 36^0 = (\sqrt{5}+1)\frac{(\sqrt{5}+1)a}{4} = \frac{(3+\sqrt{5})a}{2},$$

јер је угао $A_4B_1A_1$ унакрсан са унутрашњим углом правилног петоугла, па је према томе једнак 108^0. Тада је сваки угао на основици A_1A_4 троугла $A_1B_1A_4$ једнак 36^0. Како је и угао пентаграма једнак 36^0, то је онда угао $A_1A_4A_2$ петоугла $A_1A_4A_2A_5A_3$ једнак $3\cdot 36^0 = 108^0$. На исти начин се показује да су све остале странице петоугла $A_1A_4A_2A_5A_3$ једнаке $\frac{(3+\sqrt{5})a}{2}$ тј. све су међусобно једнаке и сви унутрашњи углови су по 108^0. Према томе, петоугао $A_1A_4A_2A_5A_3$ је правилан.



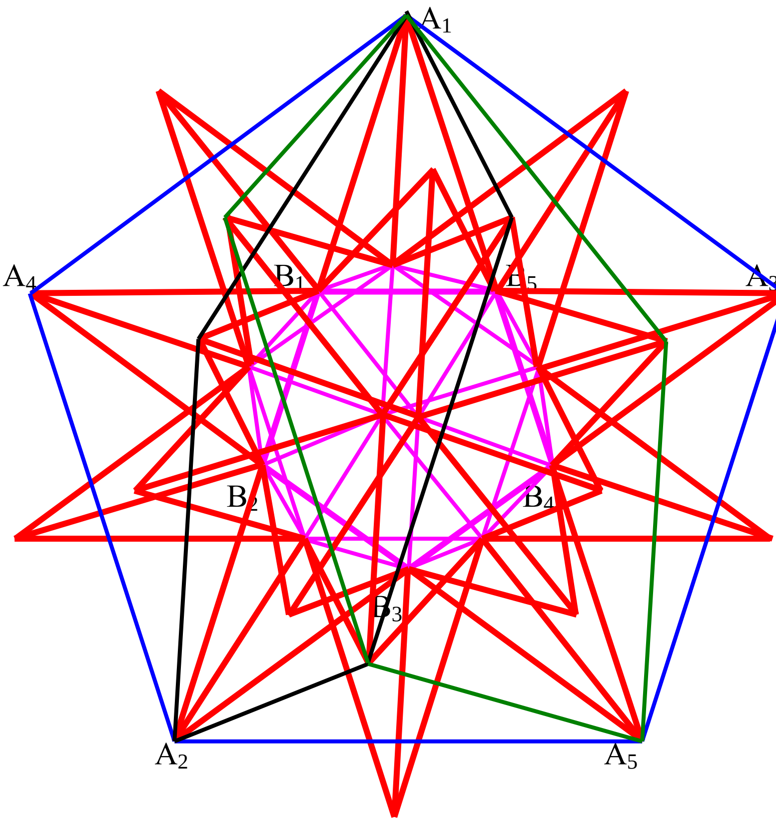
Сл. 22.

Како је пентаграм $A_1A_2A_3A_4A_5$ произвољно изабрана страна малог звездастог додекаедра, то су онда сви петоуглови добијени на овај начин правилни (и имају једнаке странице). Како је C_1 теме које одговара страни $B_1B_2B_3B_4B_5$, то су онда бочне ивице пирамиде $C_1B_1B_2B_3B_4B_5$ дужине једнаке $\frac{(\sqrt{5}+1)a}{2}$, па на исти начин као за странице петоугла $A_1A_4A_2A_5A_3$ следи да је $C_1A_1 = C_1A_2 = C_1A_3 = C_1A_4 = C_1A_5$. Према томе, бочне стране ове пирамиде су јенакостранични троуглови, а петоугао $A_1A_4A_2A_5A_3$ је темена фигура за теме C_1. Како је C_1 произвољно теме из скупа од 12 темена, колико има страна додекаедра, то онда следи да су темена малог звездастог додекаедра такође и темена правилног икосаедра (видети завршетак од 6.1.). На основу претходних закључака следи да несуседне бочне ивице заклапају угао од 108^0, па сваке две од ових ивица одређују пет петоуглова који секу раван пентаграма $A_1A_2A_3A_4A_5$ по страницама тог пентаграма тј. тај пентаграм је темена фигура код темена C_1 површи сачињене од наведених петоуглова. Дакле, полиедарска површ која представља унију свих ових петоуглова је правилна. Та полиедарска површ се зове *велики додекаедар* и његова Шлефлијева ознака је $\left\{5,\frac{5}{2}\right\}$.

6.3. Велики звездасти додекаедар $\left\{\frac{5}{2},3\right\}$.

Теорема 13. Звездичањем великог додекаедра, тако што се свака његова страна протеже до правилног звездоликог пентаграма, добија се правилна звездаста полиедарска површ.

Доказ. Нека је $B_1B_2B_3B_4B_5$ страна великог додекаедра (Сл.23.).



Сл. 23.

Протезањем ове стране на исти начин као у доказу теореме 11. добија се пентаграм $A_1A_2A_3A_4A_5$. Понављајући овај поступак на остале стране добијају се 12 пентаграма. Према доказу теореме 12. странице петоугаоних страна великог додекаедра одређују стране правилног икосаедра. Дакле, три петоугаоне стране имају по једну страницу које одређују једну страну икосаедра. На исти начин као у доказу теореме 11. може се показати да протезања ових трију петоугаоних страна дају пентаграме који имају једно заједничко теме. Према томе, свако теме добијених пентаграма је заједничко за три пентаграма. Како је тада свако теме једнако удаљено од темена троугаоне стране икосаедра, то је онда страна икосаедра темена фигура површи која је унија одговарајућих звездоликих пентаграма. Како су петоугаоне стране великог додекаедра правилне, то су онда и пентаграми добијени од њих правилни. Потребно је још доказати да је добијена површ повезана. Како свакој страни икосаедра одговара по једно теме добијене површи, то онда ова површ има 20 темена. Свака страна површи је преко једног свог темена повезана са две друге стране, а како та страна има пет темена, то је она онда повезана са десет других страна. Паралелна страна овој је повезана са сваком од ових десет страна, па за свако теме једне од паралених страна постоји бар једна страна од ових десет која повезује те паралелне стране. Дакле, добијена површ је повезана, стране су јој правилни пентаграми, а темене фигуре једнакостранични троуглови, па је према томе правилна. Полиедарска површ добијена на овај начин зове се *велики звездасти додекаедар* и има Шлефлијеву ознаку $\left\{\frac{5}{2},3\right\}$. Ивица великог зведастог додекаедра је збир ивице великог додекаедра и његове двоструке дијагонале:

$$a_{vz}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}a+2\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(2+\sqrt{5}\right)a=\frac{11+5\sqrt{5}}{2}a\ ,$$

где је a ивица правилног додекаедра. □

На основу теорема 11., 12., 13. језгро сваке од ових правилних полиедарских површи је правилни додекаедар, јер су сва протезања вршена у равнима страна додекаедра. Како су темена малог звездастог додекаедра и великог додекаедра иста, то је онда њихово кућиште правилни икосаедар.

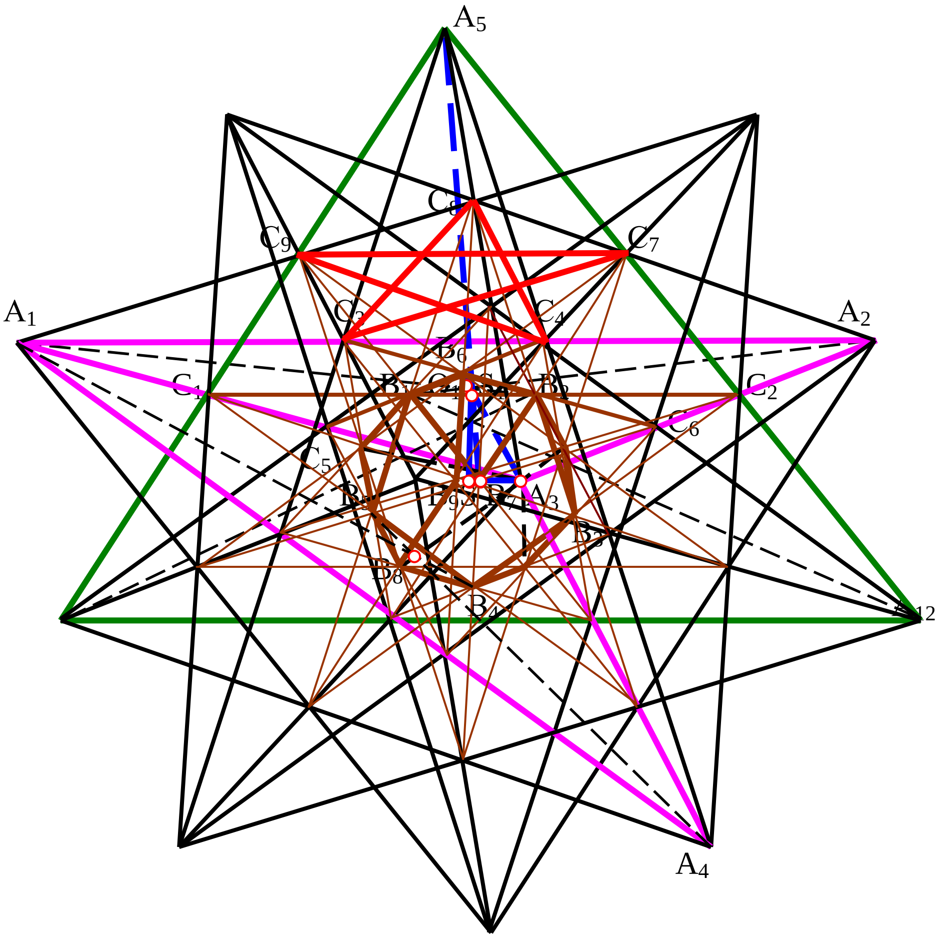
На основу Теореме 13. кућиште великог звездастог додекаедра је правилни додекаедар.

Размишљање по аналогији би могло да доведе до закључка да се овај процес звездичања може продужити у бесконачност. Међутим, звездичањем пентаграма великог звездастог додекаедра добијају се петоуглови чије су странице дужи које нису странице пентаграма и са њима не леже на истој прави. Ти петоуглови морају да леже у равнима различитих пентаграма који имају заједничко теме. Ови петоуглови немају заједничких страница, јер би у супротном равни ових пентаграма имале две различите заједничке праве, па би се ове равни поклапале (Сл. 23.), што је немогуће, јер пентаграми одређују полиедарску површ. Дакле, добијени петоуглови не испуњавају услов 2) дефиниције 11. Према томе, узастопна звездичања која полазе од правилног додекаедра завршавају се са великим звездастим додекаедром.

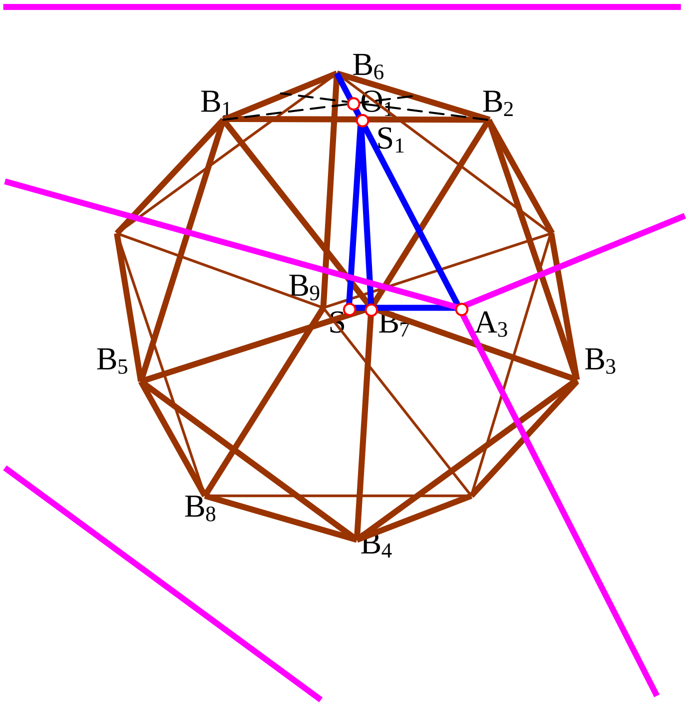
6.4. Велики икосаедар $\left\{3,\frac{5}{2}\right\}$.

Теорема 14. Нека је изабрана било која страна правилног икосаедра добијеног од темена и ивица великог додекаедра. Звездичањем икосаедра тако што се било која страна протеже до пресека њене равни са равнима оних страна које имају заједничку страницу са страном која је паралена изабраној страни, добија се правилна полиедарска површ.

Доказ. Нека је $B_1B_2B_6$ изабрана страна правилног икосаедра и $B_1B_2B_3B_4B_5$ страна великог додекаедра (упореди Сл.$24_А$ и Сл.$24_Б$.). Нека је, даље, O_1 центар описаног (уписаног) круга троугла $B_1B_2B_6$, S_1 средиште ивице B_1B_2, S центар описаног(уписаног) круга петоугла $B_1B_2B_3B_4B_5$ и B_7 теме стране $B_1B_2B_7$ суседне страни $B_1B_2B_6$, при чему је B_7 врх пирамиде чија је основа петоугао, а B_6 теме икосаедра са друге стране равни петоугла. Тада је $SS_1B_7=\varphi$ угао који раван стране $B_1B_2B_7$ заклапа са равни петоугла $B_1B_2B_3B_4B_5$, а оштар угао који права O_1S_1 заклапа са правом S_1B_7 је угао γ који заклапају равни суседних страна икосаедра тј. суплементан углу диедра икосаедра.



Сл. $24_А$.



Сл.24Б.

У том случају је φ+γ угао који раван стране $B_1B_2B_6$ заклапа са равни петоугла $B_1B_2B_3B_4B_5$. Тада је троугао SS_1B_7 правоугли, па важи:

$$\cos\varphi = \frac{S_1S}{SB_7} = \frac{\frac{b}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\frac{b}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\ , \quad \sin\varphi = \sqrt{1-\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\ .$$

b је ивица икосаедра, односно ивица великог додекаедра. Даље је

$$\sin(\varphi+\gamma) = \sin\varphi\cdot\cos\gamma + \cos\varphi\cdot\sin\gamma = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\cdot\frac{2}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{3}} + 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{3} + \frac{20+8\sqrt{5}}{15} + 4\sqrt{\frac{2\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)}{45}}} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{70-2\sqrt{5}}{15} + 4\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{9}}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{70-2\sqrt{5}}{15} + 4\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{3}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{15}}\ .$$

Тада је

$$\cos(\varphi+\gamma)=\sqrt{1-\frac{10+2\sqrt{5}}{15}}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}\ .$$

На основу ових вредности следи да је угао φ+γ различит од правог угла, а према начину избора тачаке B_7 да је оштар. Равни свих страна икосаедра које су у истом положају према петоуглу $B_1B_2B_3B_4B_5$ као и страна $B_1B_2B_6$ заклапају угао φ+γ са равни овог петоугла. Према познатим ставовима из геометрије равни свих ових страна икосаедра секу се у једној тачки која је врх правилне пирамиде чија је основа петоугао $B_1B_2B_3B_4B_5$. Нека је то тачка A_3. Тада је S_1A_3 висина бочне стране те пирамиде, па на основу односа елемената правилне пирамиде следи:

$$d=|S_1A_3|=\frac{S_1S}{\cos(\varphi+\gamma)}=\frac{\frac{b}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}}=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{3(5+2\sqrt{5})}{5-2\sqrt{5}}}=\frac{b(5+2\sqrt{5})\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{b\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}{2}\ .$$

Растојање тачке A_3 од центра O_1 описаног круга око троугла $B_1B_2B_6$ је тада

$$|O_1A_3|=d+\frac{b\sqrt{3}}{6}=\frac{b\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}{2}+\frac{b\sqrt{3}}{6}=\frac{b\sqrt{3}}{2}\left(2+\sqrt{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{b\sqrt{3}(7+3\sqrt{5})}{6}\ .$$

Примењујући исти поступак на средишта страница B_1B_6 и B_2B_6 добијају се тачке A_1 и A_2 за које важи

$$|O_1A_1|=|O_1A_2|=\frac{b\sqrt{3}(7+3\sqrt{5})}{6}\ .$$

Дакле, тачке A_1, A_2 и A_3 су једнако удаљене од тачке O_1, па је тачка O_1 центар описаног круга око троугла $A_1A_2A_3$; полупречник тога круга је добијана вредност $\frac{b\sqrt{3}(7+3\sqrt{5})}{6}$. Праве O_1A_1, O_1A_2 и O_1A_3 су симетрале страница једнакостраничног троугла $B_1B_2B_6$, па сваке две од њих заклапају угао од 120^0. Како полупречници O_1A_1, O_1A_2 и O_1A_3 леже на овим правама, то онда и они заклапају углове од 120^0. Из чега следи да је и троугао $A_1A_2A_3$ једнакостранични. Нека је страница троугла $A_1A_2A_3$ обележена са a_1. Тада важи

$$\frac{a_1\sqrt{3}}{3}=\frac{b\sqrt{3}(7+3\sqrt{5})}{6}\Rightarrow a_1=\frac{b(7+3\sqrt{5})}{2}\ .$$

На основу Теореме 12. је $b=\frac{(3+\sqrt{5})a}{2}$, где је a ивица полазног додекаедра. Тада је

$$a_1=\frac{(3+\sqrt{5})a(7+3\sqrt{5})}{2\cdot 2}=\frac{(21+9\sqrt{5}+7\sqrt{5}+15)a}{4}=\frac{(36+16\sqrt{5})a}{4}=(9+4\sqrt{5})a\ .$$

Симетрална раван било које ивице правилног икосаедра је раван симетрије икосаедра (видети [1]). Нека је Σ симетрална раван ивице B_1B_5 која је заједничка за две петоугаоне стране великог додекаедра $B_1B_2B_3B_4B_5$ и $B_1B_5B_8B_9B_6$. Тада страна $B_1B_2B_6$ заузима исти положај према оба петоугла, па се тачка A_1 добија истим поступком као и A_3 само у односу на петоугао $B_1B_5B_8B_9B_6$. Равни свих троугаоних страна икосаедра које су у истом положају према петоуглу $B_1B_5B_8B_9B_6$ се тада секу у тачки A_1. Страна $B_4B_5B_8$ има исти положај према овим петоугловима као и страна $B_1B_2B_6$, па њена раван садржи тачке A_1 и A_3. На основу особина симетрије правилног петоугла следи да су тачке B_4 и B_2, као и B_8 и B_6 симетричне у односу на раван Σ, па су равни страна $B_4B_5B_8$ и $B_1B_2B_6$ симетричне у односу на Σ, а како су те равни различите и нису пралелне, то се онда секу по правој која лежи у равни Σ. Како ове равни имају заједничке тачке A_1 и A_3, то је онда A_1A_3 пресечна права ових равни. Ако се изврши протезање стране $B_1B_2B_6$ на троугао $A_1A_2A_3$, а стране $B_4B_5B_8$ на $A_1A_3A_4$, онда троуглови $A_1A_2A_3$ и $A_1A_3A_4$ имају заједничку страницу A_1A_3. Како су $B_4B_5B_8$ и $B_1B_2B_6$ једине стране икосаедра које имају исти положај према петоугаоним странама $B_1B_2B_3B_4B_5$ и $B_1B_5B_8B_9B_6$ великог додекаедра, то је онда страница A_1A_3 заједничка само за троуглове $A_1A_2A_3$ и $A_1A_3A_4$. Протезањем свих страна правилног икосаедра на описани начин добија се 20 троуглова, а како свакој страни великог додекаедра одговара једно теме ових троуглова, то онда има 12 темена која одређују ових 20 троуглова. Унија свих 20 троуглова је површ код које је свака страница било ког троугла заједничка за тачно два троугла.

На основу добијања троугла $A_1A_2A_3$ од троугла $B_1B_2B_6$ следи да су ова два троугла обрнуто хомотетична у односу на њихов заједнички центар описаног круга, па су странице B_1B_2 и A_1A_2 паралелне. Нека права B_1B_2 сече редом странице A_1A_3 и A_2A_3 у тачкама C_1 и C_2 тј. страница B_1B_2 протегнута је на дуж C_1C_2. Тада су троуглови $A_1A_2A_3$ и $C_1C_2A_3$ директно хомотетични у односу на тачку A_3. Коефицијент хомотетије је однос висине h_1 троугла $A_1A_2A_3$ и дужи d која је висина троугла $C_1C_2A_3$. Према томе важи:

$$h_1 : d = |A_1A_2| : |C_1C_2| \Rightarrow |C_1C_2| = \frac{d \cdot a_1}{h_1} = \frac{\frac{b\sqrt{3}\left(2+\sqrt{5}\right)}{2} \cdot a_1}{\frac{a_1\sqrt{3}}{2}} = b\left(2+\sqrt{5}\right).$$

На основу теореме 12. је тада

$$|C_1C_2| = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot a \cdot \left(2+\sqrt{5}\right) = \frac{11+5\sqrt{5}}{2} \cdot a\,,$$

где је a ивица полазног додекаедра. Према теореми 13. ова вредност је дужина a_{vz} ивице великог звездастог додекаедра која се добија протезањем ивице b великог додекедра. Према томе, дуж C_1C_2 је ивица великог звездастог додекаедра, при чему се темена C_1 и C_2 налазе на двема ивицама добијене површи. Протезањем осталих двеју страница троугла $B_1B_2B_6$ добијају се још четири тачке, при чему по две од ових 6 тачака леже на свакој страници троугла $A_1A_2A_3$. Како је и троугао $C_1C_2A_3$ једнакостранични, као и остали троуглови добијени на исти начин, то је онда

$$|C_1C_5| = 2 \cdot |C_1A_3| - |C_1C_3| = 2 \cdot \frac{11+5\sqrt{5}}{2} \cdot a - \left(9+4\sqrt{5}\right)a = \left(11+5\sqrt{5}-9-4\sqrt{5}\right)a = \left(2+\sqrt{5}\right)a\,.$$

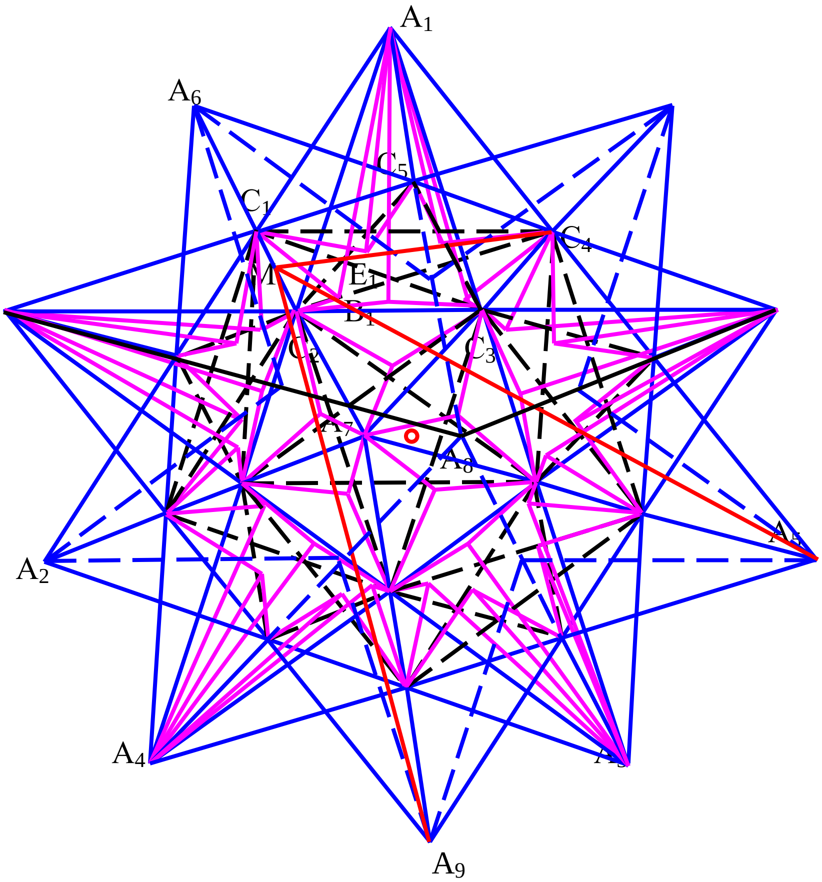
На основу разматрања у 6.3. ове тачке су нека од темена правилног додекаедра који је кућиште великог звездастог додекаедра. Како се тачке C_1 и C_5 добијају протезањем ивица B_1B_2 и B_1B_6 преко темена B_1 за дужину $\frac{b\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}=\left(2+\sqrt{5}\right)a$ и како дуж C_1C_5 не лежи ни на једној ивици великог звездастог додекаедра, то је онда ова дуж ивица његовог кућишта тј. ивица правилног додекаедра. Протезањем дужи C_1C_5 у оба смера за дужину $\left(2+\sqrt{5}\right)a\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ добија се дуж чија је дужина

$$\left(2+\sqrt{5}\right)a+2\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)a\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)a=\left(9+4\sqrt{5}\right)a,$$

а то је дужина странице A_1A_3. Дакле, ивица правилног додекаедра C_1C_5 се протеже на ивицу A_1A_3 добијене површи. Протезањем свих ивица овог додекаедра на описани начин добијају се на основу теореме 11. ивице малог звездастог додекаедра. Дакле, темена и ивице добијене површи су темена и ивице малог звездастог додекаедра. Како су стране малог звездастог додекаедра пентаграми, а ове површи троуглови, то онда ове две површи нису истоветне. На основу теореме 11. по пет ивица ових површи имају заједничко теме за које постоји страна правилног додекаедра чија се темена протежу у то теме. Нека је A_5 једно такво теме, а $C_3C_4C_7C_8C_9$ једна таква страна (Сл. 24_A). Несуседна темена стране са изабраним теменом A_5 одређују једнакостранични троугао, јер несуседна темена, на пример C_7 и C_9, одређују дијагоналу стране за коју је извршено протезање темена стране у теме A_5. Две ивице површи које садрже тачке C_7 и C_9 са теменом A_5 одређују троугао који је хомотетичан са троуглом $A_5C_7C_9$, па је онда и тај троугао једнакостраничан тј. он је страна добијене површи. Како пет ових дијагонала одређују правилан пентаграм и како постоји пет ивица ове површи које садрже темена пентаграма и пет страна које садрже ове дијагонале тј. странице пентаграма, то је онда овај правилни пентаграм темена фигура добијене површи. Потребно је још доказати да је добијена површ повезана. Нека је A_1 произвољно изабрано теме површи. Тада је то теме ивицама површи повезано са пет од осталих 12. Тих пет темена, на основу претходног закључка представљају темена пентаграма чија је страница ивица површи. Тада су свака два темена ове групе од 6 темена повезана међусобно или једном ивицом површи или преко темена A_1 са две ивице. Дијаметрално супротно теме A_{12}, takoђе, одређује групу од 6 темена која су повезана на исти начин, при чему ове две групе немају заједничких темена. Свако теме из једне групе, осим полазног A_1 или A_{12}, повезано је са три темена из групе (једно је A_1, а друга два су крајеви страница пентаграма којима је то теме заједничко). Како из сваког темена полази пет ивица, то онда постоје још две ивице из изабраног темена које то теме ивицом површи спајају са неким теменом из друге групе. Дакле, свако теме једне групе повезано је низом ивица са било којим теменом друге групе. Према томе, добијена површ је повезана. На основу претходних закључака следи да је то правилна звездаста површ. Ова зведаста површ се зове *велики икосаедар* и има Шлефлијеву ознаку $\left\{3,\frac{5}{2}\right\}$. □

6.5. Конструкција великог икосаедра.

Постојање правилних звездастих површи.



Сл. $25_{А}$.

На основу теореме 14. стране великог икосаедра које имају заједничко теме секу одговарајућу страну правилног додекаедра, од кога су ивице великог икосаедра настале, по дијагоналама стране додекаедра. Несуседне стране великог икосаедра садрже пресечну тачку дијагонала стране додекаедра, па како садрже и одговарајуће теме великог икосаедра, то се онда секу по правој која се налази у његовој „унутрашњости“. (Реч унутрашњост стављена је под наводнике, јер унутрашњост овакве површи још нисмо дефинисали.). Нека су то (на Сл.$25_{А}$.) стране $A_1A_2A_3$ и $A_1A_4A_8$ и нека је $C_1C_2C_3C_4C_5$ страна додекаедра која одговара темену A_1. Тада се стране $A_1A_2A_3$ и $A_1A_4A_8$ секу по прави A_1E_1, где је E_1 пресек дијагонала C_1C_3 и C_2C_5. Нека је A_6 A_7 ивица великог икосаедра која садржи ивицу C_1C_2 додекаедра. Нека је још M средиште од A_6A_7 односно од C_1C_2. Симетрална раван ивице A_6 A_7 Σ, према претходним резултатима, садржи тачке A_1 и C_4. Такође, тачке A_1 и C_4 одређују ивицу великог икосаедра која лежи у равни Σ. Нека је другикрај те ивице тачка A_5. Косинус угла $MC_4A_1=\alpha$ је однос полупречника круга описаног око стране $C_1C_2C_3C_4C_5$ и дужине дужи A_1C_4 тј. $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{\dfrac{5+\sqrt5}{10}}}{\dfrac{\sqrt5+1}{2}}=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt5}{10}}$.

Тада је угао MC_4A_5 једнак 180^0-α. Према претходним резултатима ивица додекаедра у овој конструкцији је $b_1=\left(2+\sqrt5\right)a$, а ивица великог икосаедра $a_1=b_1\left(2+\sqrt5\right)=\left(9+4\sqrt5\right)a$, где је a ивица полазног додекаедра у свим изведеним конструкцијама. Тада је

$$\left|MC_4\right|=b_1\sqrt{\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{b_1}{2}\sqrt{5+2\sqrt5}\ ,$$

$$\left|C_4A_5\right|=b_1+\frac{\left(\sqrt5+1\right)b_1}{2}=\frac{\left(3+\sqrt5\right)b_1}{2}\ .$$

Из троугла MC_4A_5 косинусном теоремом, после сређивања, следи:

$$\left|MA_5\right|=b_1\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)+\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{2}}\right)^2-2\cdot\frac{3+\sqrt5}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt5}\cdot\cos\left(180^0-\alpha\right)}$$

$$=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\left(2+\sqrt5\right)b_1=\frac{a_1\sqrt3}{2}\ .$$

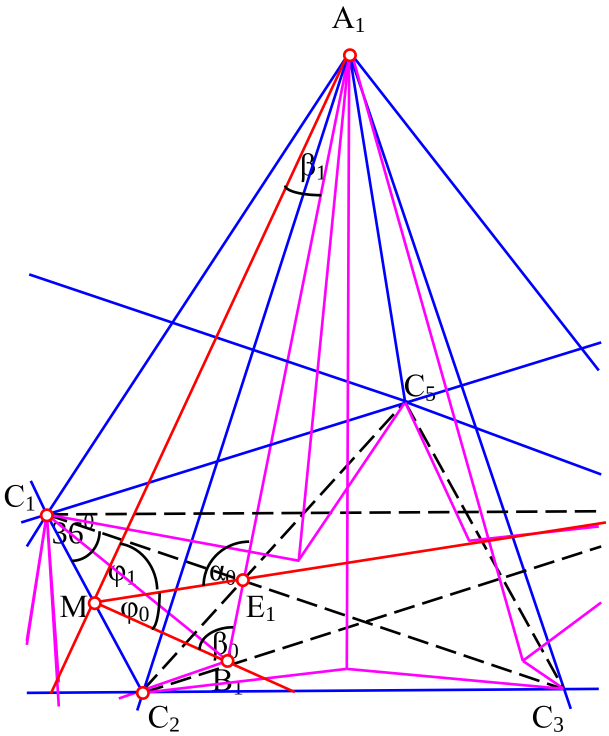
Дакле, MA_5 је висина једнакостраничног троугла чија је страница a_1. Како је $\left|A_6A_7\right|=a_1$, M средиште од A_6A_7 и дуж MA_5 нормална на A_6A_7 јер лежи у равни Σ нормалној на A_6A_7, то је онда троугао $A_6A_7A_5$ једнакостранични тј. страна великог икосаедра. Права A_1E_1 продире ову страну у тачки B_1 која се налази на висини MA_5, јер су тачке праве MA_5 једине заједничке тачке равни ове стране и равни Σ. Према томе, стране $A_1A_2A_3$, $A_1A_4A_8$ и $A_6A_7A_5$ имају заједничку тачку B_1 и по две од њих садрже дужи A_1B_1, C_1B_1 и C_2B_1. Дакле, тачке A_1, C_1, C_2, B_2 одређују тетраедар $A_1C_1C_2B_2$ који представља удубљење у односу на страну $A_1C_1C_2$ пирамиде $A_1C_1C_2C_3C_4C_5$. На сличан начин се може одредити још 59 тачака B_2, $B_3, \cdots$, B_{60} и још 59 тетраедара (по пет над сваком страном додекаедра $C_1C_2 \cdots C_{12}$) чије стране представљају видљиви део великог икосаедра. На Сл.25. представљена је половина тетраедара тј. само они који су над видљивим странама додекаедра, гледано у смеру пројектовања. Љубичастом бојом представљени су видљиви делови пресека страна, а плавом ивице. На тај начин се стиче утисак дубине.

На основу претходних резултата угао C_4MA_5 је оштар угао који раван стране великог икосаедра заклапа са равни стране додекаедра и, према положају тачака M,

B_1, E_1, исти са углом E_1MB_1; нека је у овом разматрању означен са φ_0. (Упоредити Сл. 25$_А$. и Сл. 25$_Б$.). Синусном теоремом из троугла C_4MA_5 следи;

$$|C_4A_5| : \sin\varphi_0 = |MA_5| : \sin\left(180^0 - \alpha\right) \Rightarrow \sin\varphi_0 = \frac{\dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)b_1}{2}\cdot\sqrt{1-\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}}{\dfrac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}}$$

$$\sin\varphi_0 = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}}{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{5}\right)} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}, \quad \cos\varphi_0 = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}, \quad \varphi_0 \approx 37{,}37736814^0 .$$



Сл. 25$_Б$.

Да бисмо лакше одредили елементе тетраедра $A_1C_1C_2B_1$ претпоставимо да је ивица додекаедра $|C_1C_2| = b_1 = 1$. Угао φ_1 је оштар угао који заклапају равни страна правилног додекаедра, па је $\sin\varphi_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Нека је висина A_1M једнакокраког троугла $A_1C_1C_2$ означена са h, а висина E_1M једнакокраког троугла $C_1C_2E_1$ са h_1. Нека је, даље, дуж A_1E_1 означена са l_1, дуж E_1B_1 са l_2 и дуж $A_1B_1 = A_1E_1 + E_1B_1$ са l. Углови $E_1C_1C_2$ и $C_1C_2E_1$ су углови које страница петоугла заклапа са дијагоналом, па имају меру 36^0. Ивице A_1C_1 и A_1C_2, према претходним резултатима су једнаке дијагонали стране додекаедра,па имају меру $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Тада се добијају следећи резултати.

$$h=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\ ,\ h_1=\frac{1}{2}\cdot tg36^0=\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\ .$$

Из троугла A_1ME_1 косинусном теоремом следи:

$$l_1=\sqrt{h^2+h_1^2-2hh_1\cos\varphi_1}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{4}+\frac{5-2\sqrt{5}}{4}-2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\left(5+2\sqrt{5}\right)\left(5-2\sqrt{5}\right)}}$$

тј.

$$l_1=\sqrt{\frac{10}{4}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}}=\sqrt{2}\ .$$

Из истог троугла, такође, следи:

$$\cos\alpha_0=\frac{l_1^2+h_1^2-h^2}{2l_1h_1}=\frac{2+\frac{5-2\sqrt{5}}{4}-\frac{5+2\sqrt{5}}{4}}{2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}=\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}}=-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}{10-4\sqrt{5}}}=\ -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{10}}\ ,$$

$$\sin\alpha_0=\sqrt{1-\frac{5-2\sqrt{5}}{10}}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}\ ,\ \alpha_0\approx 103{,}2825256^0$$

тј. угао α_0 је туп. Тада је $\beta_1=180^0-\left(\alpha_0+\varphi_1\right)$ тј.

$$\sin\beta_1=\sin\left(180^0-\left(\alpha_0+\varphi_1\right)\right)=\sin\left(\alpha_0+\varphi_1\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}+\left(-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}-2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{10}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}-2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{10}}\right)^2}\ =$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}+\frac{5-2\sqrt{5}}{10}-2\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{\left(5+2\sqrt{5}\right)\left(5-2\sqrt{5}\right)}{100}}}\ =$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{10}}\ ,\ \ \cos\beta_1=\sqrt{1-\frac{5-2\sqrt{5}}{10}}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}\ ,$$

$\beta_1 \approx 13{,}2825256^0$.

$$\cos(\varphi_0+\varphi_1)=\cos\varphi_0\cos\varphi_1-\sin\varphi_0\sin\varphi_1=$$

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}-\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}-2\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{\left(2\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2}=$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{\left(\frac{4\left(10-2\sqrt{5}\right)}{15}+\frac{5+2\sqrt{5}}{15}-2\cdot 2\sqrt{\frac{2\left(5-\sqrt{5}\right)}{15}\cdot\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)}=$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{\frac{25-10\sqrt{5}}{15}}=-\sqrt{\frac{5\cdot 5\left(5-2\sqrt{5}\right)}{25\cdot 15}}=-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}},$$

$$\sin(\varphi_0+\varphi_1)=\sqrt{1-\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{15}},\ \varphi_0+\varphi_1\approx 100{,}812317^0.$$

Угао α_0 је спољашњи угао троугла ME_1B_1, а φ_0 и β_0 унутрашњи, несуседни углу α_0 истог троугла, па важи $\alpha_0=\varphi_0+\beta_0 \Rightarrow \beta_0=\alpha_0-\varphi_0$.

$$\sin\beta_0=\sin(\alpha_0-\varphi_0)=\sin\alpha_0\cos\varphi_0-\cos\alpha_0\sin\varphi_0=$$

$$=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}\cdot\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}-\left(-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{10}}\right)\cdot\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}=$$

$$=\frac{5+2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}-20\sqrt{5}+20}}{5\sqrt{6}}=\frac{5+2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{5\left(14-6\sqrt{5}\right)}}{5\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{5+2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{5}\left(3-\sqrt{5}\right)}{5\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{5}{6}},\ \cos\beta_0=\sqrt{\frac{1}{6}},\ \beta_0\approx 65{,}90515745.$$

Из троугла A_1MB_1 синусном теоремом следи:

$$l:\sin(\varphi_0+\varphi_1)=h:\sin\beta_0 \Rightarrow l=\frac{h\cdot\sin(\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\beta_0}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{15}}}{\sqrt{\frac{5}{6}}}.$$

Одавде, после срeђивања, следи:

$$l=\frac{\left(5+3\sqrt{5}\right)\sqrt{2}}{10}\approx 1{,}655790079.$$

Тада је и

$$l_2=l-l_1=\frac{\left(5+3\sqrt{5}\right)\sqrt{2}}{10}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{5}-5\right)}{10}\approx 0.241576516.$$

Нека је дуж MB_1 означена са h_2. Из троугла ME_1B_1 следи:

$$h_2:\sin\left(180^0-\alpha_0\right)=h_1:\sin\beta_0\Rightarrow h_2=\frac{h_1\sin\left(180-\alpha_0\right)}{\sin\beta_0}$$

$$h_2=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}}{\sqrt{\frac{5}{6}}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{5}{6}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\approx 0{,}387298334.$$

Троугао $C_1C_2B_1$ је једнакокраки, а троугао C_1MB_1 правоугли, јер се тачка B_1 и права MB_1 налазе у симетралној равни Σ дужи C_1C_2. Тада је:

$$\left|C_1B_1\right|=\left|C_2B_1\right|=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3+5}{20}}=\sqrt{\frac{2}{5}}\approx 0{,}632455532.$$

Нека је β_2 угао $A_1C_1B_1$. Тада из троугла $A_1C_1B_1$ следи:

$$\cos\beta_2=\frac{\left|C_1B_1\right|^2+\left|A_1C_1\right|^2-\left|A_1B_1\right|^2}{2\cdot\left|C_1B_1\right|\cdot\left|A_1C_1\right|}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2-\left(\frac{\left(5+3\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{2}}{10}\right)^2}{2\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}+\frac{2}{5}-\frac{70+30\sqrt{5}}{50}}{\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{2}}{5}}$$

$$=\frac{25-5\sqrt{5}}{10\sqrt{2}\left(5+\sqrt{5}\right)}=\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}\left(25-5\right)}=\frac{30-10\sqrt{5}}{2\sqrt{2}\cdot 20}=\frac{3-\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8}.$$

$$\sin\beta_2=\sqrt{1-\frac{14-6\sqrt{5}}{32}}=\sqrt{\frac{18+6\sqrt{5}}{16\cdot 2}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\left(6+2\sqrt{5}\right)}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{6}}{8}=\frac{\sqrt{30}+\sqrt{6}}{8},\ \beta_2\approx 82{,}23875609^0.$$

Тада је површина троугла $A_1B_1C_1$:

$$P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}|A_1C_1|\cdot|C_1B_1|\cdot\sin\beta_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8} =$$

$$= \frac{\left(6+2\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{12}}{32\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}{32\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{5}+5\right)}{40}.$$

Површина троугла $C_1C_2B_1$ је:

$$P_{\Delta C_1C_2B_1} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{20}.$$

Површина „удубљења“ тј. површина тетраедра без површине стране $A_1C_1C_2$ је:

$$P_{\Delta C_1C_2B_1} + 2\cdot P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{\sqrt{15}}{20} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{5}+5\right)}{40} = \frac{\sqrt{15}+3\sqrt{10}+5\sqrt{2}}{20}.$$

Тетраедар $A_1C_1C_2B_1$ је са равни Σ разложен на два двострано правоугла међусобно подударна тетраедра $A_1C_1MB_1$ и $A_1C_2MB_2$, па је његова запремина два пута већа од запремине једног од њих. Тада је:

$$V_{A_1C_1C_2B_1} = 2\cdot V_{A_1C_1MB_1} = 2\cdot\frac{1}{3}P_{\Delta A_1MB_1}\cdot|MC_1| = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot|A_1M|\cdot|MB_1|\cdot\sin\left(\varphi_0+\varphi_1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$$

$$= \frac{1}{6}\cdot h\cdot h_2\cdot\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{15}} = \frac{1}{6}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{15}}$$

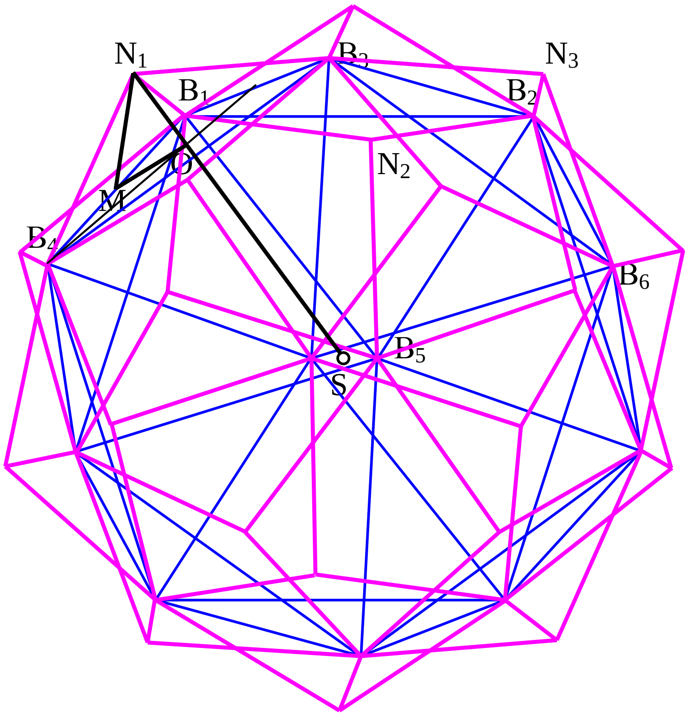
$$= \frac{1}{12}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{3\left(10+2\sqrt{5}\right)}{5\cdot 15}} = \frac{1}{12\cdot 5}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{1}{60}\cdot\sqrt{2\left(25+10\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10\right)} = \frac{1}{60}\sqrt{5\left(14+6\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{60}\sqrt{5}\left(3+\sqrt{5}\right) = \frac{3\sqrt{5}+5}{60}.$$

Покажимо још да протезање страна великог икосаедра по правилима звездичања правилних полиедарских површи није могуће.

Оштар угао који заклапају равни две суседне стране великог икосаедра једнак је оштром углу који заклапају стране правилног икосаедра од кога је велики икосаедар настао звездичањем по теореми 14. Јер, по Теореми 14., једна страна правилног икосаедра се протеже до пресека њене равни са равнима оних страна правилног икосаедра које су суседне са страном која је паралелна посматраној страни, а паралелне равни са равни која их сече заклапају једнаке углове. Равни страна великог икосаедра су равни страна правилног икосаедра које окружују страну правилног икосаедра која је паралелна посматраној страни и великог и правилног икосаедра. Како је узет оштар угао који заклапају суседне стране, то се онда ове три равни секу у једној тачки N која се налази у спољашњој области правилног икосаедра, а такође и на нормали из центра описаних сфера свих ових површи на раван посматране стране. С обзиром да је угао који заклапају стране правилног икосаедра мањи од угла који заклапају стране великог звездастог додекаедра према страни икосаедра, то онда тачка N припада унутрашњости великог звездастог додекаедра. Тачка N је теме тетраедра чија је основа страна великог икосаедра и рогља одређеног том страном. Како ивице стране великог икосаедра леже у странама овог рогља, то онда није могуће протезање ове стране до пресека њене равни са странама овог рогља. Према томе, даље звездичање великог икосаедра није могуће. Са овим закључком и закључком на крају 6.3. завршава се образлагање постојања само ове четири правилне звездасте полиедарске површи. Ова образложења се не могу назвати критеријумом, јер не обухватају и случајеве добијања правилних звездастих полиедарских површи поступком страничења. О потпунијим поступцима тј. критеријумима (методама) видети [4] и [8] поглавље VI.

6.6. Бреговити икосаедар.



Сл. 26.

Постоји још један начин звездичања правилног икосаедра који доводи до звездасте полиедарске површи која није правилна, али је врло карактеристична, илустративна и упућује на даља уопштавања.

Нека је троугао $B_1B_2B_3$ једна страна правилног икосаедра ивице *b* (Сл.26). Ради упоређивања мера елемената бреговитог икосаедра са мерама правилних звездастих полиедарских површи узећемо да је правилни икосаедар кућиште великог додекаедра тј. $b=\frac{3+\sqrt{5}}{2}a$, где је *a* ивица полазног правилног додекаедра. Нека су, даље, троуглови $B_1B_3B_4$, $B_1B_2B_5$ и $B_2B_3B_6$ суседне стране страни $B_1B_2B_3$. Суседне стране овим странама секу се у тачкама N_1, N_2, N_3. Према закључку из претходног пододељка ове тачке се налазе у спољашњој области правилног икосаедра и на нормалама из центра сфере описане око икосаедра на равни одговарајућих страна. Ове нормале пролазе кроз центар описаног круга око одговарајуће стране. Нека је S центар описане сфере, O центар описаног (уписног) круга око стране $B_1B_3B_4$, M средиште ивице B_1B_4. Тада је троугао OMN_1 правоугли са правим углом код темена O, угао OMN_1 оштар угао (γ) који заклапају равни страна правилног икосаедра, $OM=r_u$ полупречник уписаног круга стране $B_1B_3B_4$, $N_1M=h$ висина бочне стране правилне пирамиде $N_1B_1B_3B_4$, $ON_1=H$ висина ове пирамиде. Тада је

$$h=\frac{r_u}{\cos\gamma}=\frac{\frac{b\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{b\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{b\sqrt{15}}{10},\ H=r_u\cdot tg\gamma=\frac{b\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{b\sqrt{15}}{15}.$$

Бочна ивица $N_1B_4=l$ је тада

$$l=\sqrt{h^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{15b^2}{100}+\frac{b^2}{4}}=b\sqrt{\frac{3}{20}+\frac{1}{4}}=b\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{b\sqrt{10}}{5}.$$

За угао $\varphi=\angle N_1B_4B_1$ бочне стране важи $\sin\varphi=\frac{h}{l}=\frac{\frac{b\sqrt{15}}{10}}{\frac{b\sqrt{10}}{5}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Лако се утврђује да је $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{6}}{4}<\frac{\sqrt{3}}{2}$, па је $30^0<\varphi<60^0$. Иначе, приближна вредност овог угла је $\varphi\approx 37{,}76124391^{\ 0}$.

Ако се у формули за l замени b са $\frac{3+\sqrt{5}}{2}a$, добије се:

$$l=\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}a=\frac{\left(3\sqrt{5}+5\right)\sqrt{2}}{10}a\approx 1{,}655790079a.$$

Занимљиво је напоменути да је ова вредност добијена за једну ивицу тетраедра „удубљења“ великог икосаедра (видети пододељак 6.5 после Сл. $25_Б$).

Како је страна $B_1B_2B_3$ суседна странама $B_1B_3B_4$, $B_1B_2B_5$ и $B_2B_3B_6$, то се онда тачке N_1, N_2 и N_3 налазе у равни стране $B_1B_2B_3$. Већ је речено да се тачке $N_1, N_2, \cdots$ налазе у спољашњој области правилног икосаедра, то се онда и тачке N_1, N_2 и N_3 налазе у спољашњој области троугла $B_1B_2B_3$. Тада је угао $N_1B_1N_2$ једнак $\varphi+60^0+\varphi=2\varphi+60^0$. На основу претходних резултата важи $120^0<2\varphi+60^0<180^0$. Из овог следи да се тачке N_1, B_1, N_2 не налазе на истој прави. На исти начин се закључује да никоје три тачке од тачака N_1, B_1, N_2, B_2, N_3, B_3 не леже на истој прави. Дакле, ове тачке су темена једног шестоугла. Странице овог шестоугла су ивице изведених правилних пирамаида, па су једнаке. Један од углова овог шестоугла је већ изведени $2\varphi + 60^0 > 120^0$. Њему су једнака још два угла који су у истом положају у односу на троугао $B_1B_2B_3$. Угао троугла $B_1N_1B_3$ једнак је $180^0 - 2\varphi < 120^0$. Њему су једнаки углови код темена N_2 и N_3 шестоугла $N_1B_1N_2B_2N_3B_3$. Из овога следи да углови овог шестоугла нису сви међусобно једнаки, па овај шестоугао није правилан. Протезањем стране $B_1B_2B_3$ за троуглове $B_1N_1B_3$, $B_1N_2B_2$ и $B_2N_3B_3$ добија се протезање стране правилног икосаедра на шестоугао $N_1B_1N_2B_2N_3B_3$. Протезањем сваке стране правилног икосаедра на овај начин добија се површ сачињена од 20 подударних шестоуглова. Свака страница ових шестоуглова је према претходном бочна ивица правилне пирамиде, па је према томе заједничка за тачно две бочне стране пирамиде. Свака бочна страна пирамиде лежи у тачно једном шестоуглу, па је онда свака страница шестоугла заједничка за тачно два шестоугла. Како сваки шестоугао лежи у равни једне стране правилног икосаедра, то онда било која два шестоугла не леже у истој равни. Како се свако теме шестоугла које није теме икосаедра може повезати са неким теменом икосаедра и свака два суседна темена икосаедра двема страницама шестоуглова и како је правилни икосаедар повезан, то се онда свака два темена ових шестоуглова могу повезати ивицама шестоуглова. Дакле, добијена површ од ових 20 шестоуглова је полиедарска површ. Свака два шестоугла који леже у равнима суседних страна икосаедра секу се по ивици икосаедра. Према томе, добијена полиедарска површ је звездаста полиедарска површ.

7. Полиедри одређени звездоликим полиедарским површима. Важење карактеристичних особина за полигоне и полиедре.

Изучавању правилних звездастих полигона и правилних звездастих полиедара може се приступити, у принципу, на два начина. Један би био да се звездасте полигоналне линије и звездасте полиедарске површи и даље политопи схвате као Риманове многострукости, пошто се претходно пројектују на сферу (круг). Други начин је да се звездасте полигоналне линије редукују на просте полигоналне линије као у дефиницији 7. и да се звездастасте полиедарске површи на сличан начин редукују на просте полиедарске површи.

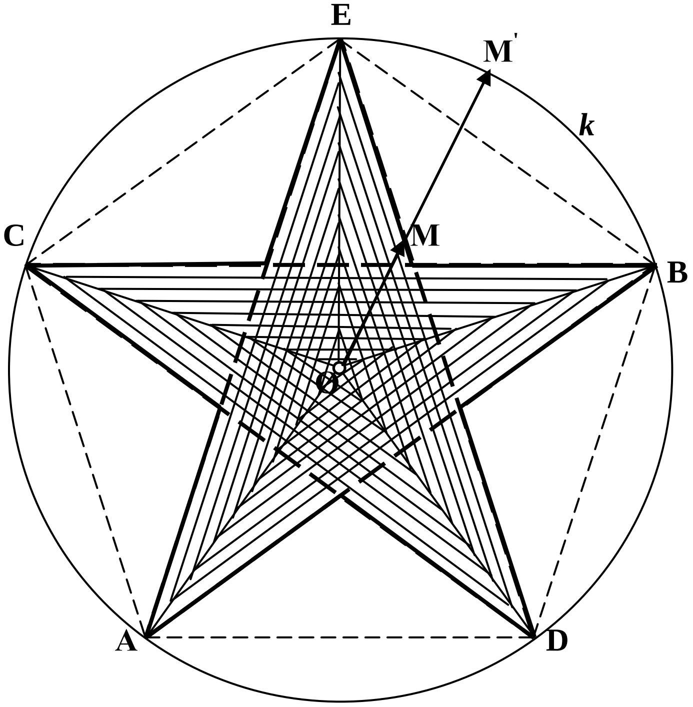
Дефиниција 19. Скуп свих тачака звездасте полигоналне линије за које постоји полуправа чија је то почетна тачка при чему ова полуправа нема других заједничких тачака са овом полигоналном линијом зваћемо *руб* звездасте полигоналне линије.

Јасно је да је руб звездасте полигоналне линије звездолика полигонална линија.

Дефиниција 20. Скуп свих тачака равни звездасте полигоналне линије које не припадају рубу и за које постоји полуправа чија је таква тачка почетна и која сече звездасту полигоналну линију бар једном зове се *унутрашњост звездолике полигоналне линије*. Ако се свака од ових тачака узима t пута, при чему t узима вредности $1,2, \cdots, d_n$, у зависности од положаја тачке у односу на делове унутрашњости добијених разбијањем звездастом полигоналном линијом, онда се такав скуп зове *унутрашњост звездасте полигоналне линије*. Унија звездолике полигоналне линије и њене унутрашњости зове се *звездолики полигон*. Унија звездасте полигоналне линије и њене унутрашњости зове се *звездасти полигон.*

7.1. Први начин. Размотримо најпре правилне звездасте полигоне. На основу доказа теореме 7. k-угао је (k је густина) једнак $\frac{k\cdot 360^0}{n}$ и суплементан унутрашњем углу правилног звездастог полигона. Према томе, унутрашњи угао је једнак $180^0-\frac{k\cdot 360^0}{n}=\left(1-\frac{2k}{n}\right)\cdot 180^0$, $(k=d_n)$. Збир спољашњих углова је тада $d_n\cdot 360^0$ или $2d_n\pi$. Збир унутрашњих углова је $(n-2d_n)\cdot 180^0$ или $(n-2d_n)\pi$. Ове су вредности сагласне теореми 1., јер се за $d_n=1$ добија $(n-2)\cdot 180^0$ и 360^0.

Површина правилног звездастог полигона се дефинише као вредност



Сл. 27.

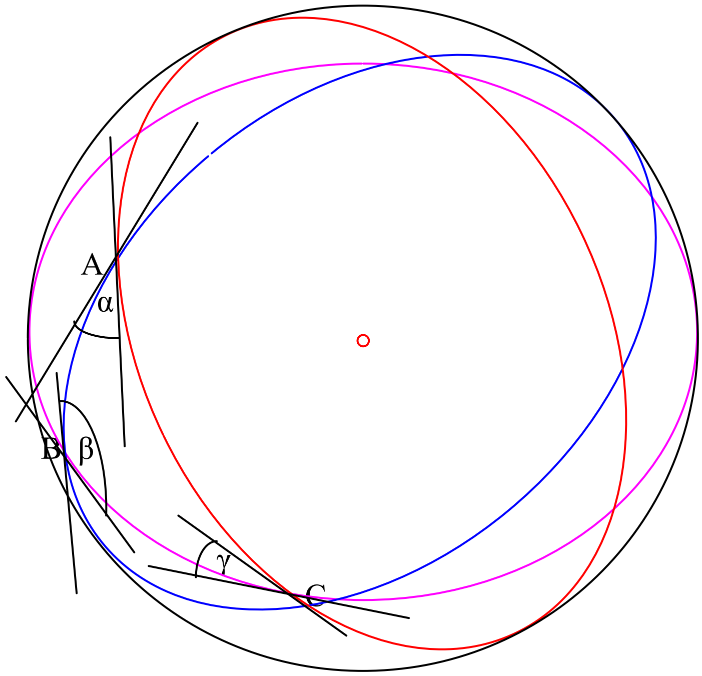
$P=\frac{1}{2}nar_u$, где је a страница овог полигона, а r_u полупречник уписаног круга у језгро. Површине делова, јасно је, узете су у складу са дефиницијом 20. То је представљено на Сл. 27. Двоструко шрафирани део је језгро пентаграма чија је површина двоструко урачуната у укупну површину.

У разматрању правилних звездастих полиедара потребно је правилне звездасте полиедарске површи схватити у смислу коментара након дефиниције 14.

Дефиниција 21. Скуп свих тачака звездасте полиедарске површи за које постоји полуправа којој је таква тачка почетна, при чему ова полуправа нема других заједничких тачака са овом полиедарском површи, зваћемо *покривач* звездасте полиедарске површи.

На основу претходних разматрања следи да су стране покривача правилне звездасте полиедарске површи троуглови и да је овај покривач проста полиедарска површ.

Дефиниција 22. Скуп свих тачака простора које не припадају звездастој полиедарској површи и за које постоји полуправа којој је таква тачка почетна, при чему се свака од ових тачака узима t пута, док t узима вредности $1,2,\cdots,d_{zpp}$ (d_{zpp}- густина звездасте полиедарске површи), у зависности од положаја тачке у односу на делове унутрашњости добијених разбијањем овом звездастом полиедарском површи, и да ова полуправа сече звездасту полиедарску површ бар једном, зове се *унутрашњост* звездасте полиедарске површи. Унија звездасте полиедарске површи и њене унутрашњости зове се *звездасти полиедар*.



Сл.28.

Дефиниција 23. Унија покривача звездасте полиедарске површи и његове унутрашње области зове се *звездолики полиедар*. Звездолики полиедар добијен од правилне звездасте површи зваћемо *звездоид*.

Пре разматрања правилних звездастих полиедара биће потребно подсетити на неке појмове из сферне геометрије.

Угао који заклапају тангенте два велика круга сфере у њиховој пресечној тачки зове *сферни угао.* (Сл.28.) Део сферне површи ограничен луковима трију великих кругова сфере зове се *сферни троугао*. Ови лукови се зову *странице*, углови одређени тангентама њихових великих кругова *углови* сферног троугла. На сличан начин се дефинише и *сферни полигон*.

Сваки сферни полигон се може разложити на сферне троуглове. Збир углова сферног троугла већи је од 180^0, а мањи од 540^0. Разлика збира углова сферног троугла и 180^0 зове се сферни ексцес и обележава се са ε тј. $\varepsilon=\alpha+\beta+\gamma-180^0$ ако се углови мере у степенима, а ако се мере у радијанима, онда је $\varepsilon=\alpha+\beta+\gamma-2\pi$. Површина сферног троугла је $P=\frac{r^2\pi\cdot\varepsilon}{180}$ ако се углови мере у степенима, а ако се мере у радијанима, онда је $P=r^2\cdot\varepsilon$. r је полупречник сфере. Ако је у питању јединична сфера тј. r =1, онда је површина сферног троугла једнака његовом ексцесу тј. $P=\varepsilon$. Овој неколико резултата биће довољни за даље разматрање.

Одредимо најпре густину d_{zpp} правилног звездастог полиедра коју ћемо надаље обележавати са $d_{p,q}$, с обзиром да ћемо густину одредити само за правилне звездасте полиедре. У складу са тим бројеви p и q могу бити $\frac{5}{2}$, 5, 3. Да бисмо одредили вредности за $d_{p,q}$, морамо одредити колико је пута јединична сфера, чији се центар поклапа са центром полиедра, покривена радијалном пројекцијом страна правилне звездасте полиедарске површи. Свака страна се пројектује у сферни $\{p\}$ ($p=\frac{n}{k}$) чији је сферни угао $\frac{2\pi}{q}$. Овај се сферни полигон може разложити на n сферних троуглова луковима који спајају центар полигона (центар сферног полигона се налази на сфери) са његовим теменима. За сваку пројекцију ивице од $\{p,q\}$ постоје два таква троугла, јер је свака ивица заједничка за тачно две стране. Сваки од ових сферних троуглова има ексцес тј. површину $\varepsilon=\frac{2\pi}{p}+\frac{\pi}{q}+\frac{\pi}{q}-2\pi$, јер је угао у центру $\frac{2\pi}{p}$, а углови код остала два темена су половина од $\frac{2\pi}{q}$. Дакле, $\varepsilon=\left(\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1\right)\pi$. Оваквих троуглова има два пута више него ивица, па је укупна површина сферних троуглова $2N_1\varepsilon$. Сфера је на овај начин покривена онолико пута колика је густина $d_{p,q}$ тј. покривање сфере има површину $4d_{p,q}\pi$. Изједначавајући ова два израза добија се:

$$4d_{p,q}\pi=2N_1\left(\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1\right)\pi\Rightarrow d_{p,q}=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)N_1.$$

Збир свих сферних углова код сваког темена од $\{p,q\}$ је $2d_q\pi$, а у центру сваког сферног $\{p\}$ $2d_p\pi$.Укупан збир свих ових углова је $2N_2d_p\pi+2N_0d_q\pi$.Ако се за сваки троугао одузме π тј. укупно $2N_1\pi$, добије се $2\pi(N_2d_p+N_0d_q-N_1)$. Изједначавајући овај израз са $4d_{p,q}\pi$ и скраћивањем са 2π, добија се једнакост $N_0d_q-N_1+d_pN_2=2d_{p,q}$ која представља модификовану Ојлерову формулу. Ове две формуле за $d_{p,q}$ повезане су формулама $n_qN_0=2N_1=n_pN_2$, $\left(p=\frac{n_p}{d_p}, q=\frac{n_q}{d_q}\right)$ које се изводе помоћу графова и мапа; ово извођење у овом раду неће бити наведено.

За све правилне звездасте полиедре је $N_1=30$, јер се на основу претходних закључака њихове ивице добијају протезањем ивица додекаедра или икосаедра, а ови имају по 30 ивица. Према томе, за мали звездасти додекаедар је $p=\frac{5}{2},\ q=5$, па је $d_{\frac{5}{2},5}=\frac{30}{\frac{5}{2}}+\frac{30}{5}-15=3$. За велики додекаедар је $d_{5,\frac{5}{2}}=\frac{30}{5}+\frac{30}{\frac{5}{2}}-15=3$. За велики звездасти додекаедар је $p=\frac{5}{2},\ \ q=3$, па је $d_{\frac{5}{2},3}=\frac{30}{\frac{5}{2}}+\frac{30}{3}-15=7$. За велики икосаедар је $p=3$, $q=\frac{5}{2}$, па је $d_{3,\frac{5}{2}}=\frac{30}{3}+\frac{30}{\frac{5}{2}}-15=7$.

Запремина звездастих полиедара рачуна се на сличан начин као површина њихових страна тј. запрамина звездастог полиедра једнака је збиру запремина свих пирамида које повезују центар полиедра са странама. Висине тих пирамида једнаке су полупречнику сфере уписане у језгро. Према томе,

$$V=\frac{1}{3}\cdot N_2\cdot\frac{1}{2}\cdot n_par_u\cdot R_u=\frac{1}{6}N_2n_par_uR_u,$$

где је N_2 број страна, n_p број страница стране, a дужина ивице, r_u полупречник круга уписаног у језгро стране и R_u полупречник сфере уписане у језгро полиедра. Јасно је, да су тада запремине делова узете у складу са дефиницијом 22.

Питање ивичних углова звездастих полиедара није јасно одређено у литератури (бар не у оној која је била доступна аутору овог текста). Код неких од ова четири правилна звездаста полиедра су то ивични углови рогљева који су и углови страна, док код других углови страна нису ивични углови рогљева. Ми ћемо у овом тексту под ивичним угловима подразумевати углове страна којих код сваког темена има колико и страна којима је то заједничко теме. За мали звездасти додекаедар стране су пентаграми којима је угао 36^0 и ти углови су ивични углови рогљева којих има 12, а сваки рогаљ има пет страна, па је збир ивичних углова $12 \cdot 5 \cdot 36^0 = 2160^0$. Међутим овај резултат није сагласан са теоремом 9., јер би према теореми 9. требало да важи (12 - 2) · 360^0 = 3600^0. Стране великог звездастог додекаедра су, такође, пентаграми чији су углови ивични углови 20 тространих рогљева, па је збир ивичних углова 20 · 3 · 36^0 = 2160^0. И овај се резултат не слаже са теоремом 9., јер би требало да је тај збир (20 - 2) · 360^0 = 6480. Стране великог додекаедра су петоуглови и углови тих страна које имају заједничко теме не чине рогаљ, али према нашем схватању њихов збир прихватамо као збир ивичних углова. Тај збир је 20 · 3 · 108^0 = 6480^0. Овај се збир слаже са формулом теореме 9. Стране великог икосаедра су једнакостранични троуглови и углови страна које имају заједничко теме не чине рогаљ, али према нашем схватању њихов збир прихватамо као збир ивичних углова. Тај збир је 12 · 5 · 60^0 = 3600^0. И овај се збир слаже са формулом теореме 9.

Бреговити икосаедар, према првом начину, има 20 страна, 20 темена која одговарају странама правилног икосаедра и 12 темена која су уједно и темена правилног икосаедра, свака страна има 6 ивица, а свака ивица је заједничка за тачно две стране, па је укупан број ивица 6 · 20/2 = 60. Ојлерова теорема не важи, јер је $20 + 12 - 60 + 20 \neq 2$. Ако густину звездастог полиедра схватимо као максималан број тачака продора полуправе, чија је почетна тачка у језгру, кроз стране, онда је густина бреговитог икосаедра 2.

За 12 темена (која су и темена правилног икосаедра) темена фигура је пентагон па им је густина 2, за 20 темена темена фигура је троугао, па је густина 1. Тада важи: 2 · 12 + 20 · 1 – 60 + 20 = 2 · 2. Ова формула је тачна и подсећа на модификовану Ојлерову формулу. Да би се овај резултат код звездастих полиедарских површи прихватио, потребно је густину ваљано дефинисати и модификовану Ојлерову формулу још једном модификовати. Ови захтеви излазе из оквира овог текста, па се даље неће разматрати.

На основу схватања површина и запремина на први начин у овом одељку и на основу резултата из пододељка 6.6. следи да је површина површи бреговитог икосаедра једнака збиру површина 20 шестоуглова који се могу разложити на по један једнакостраничан троугао (страна правилног икосаедра) и три једнакокрака троугла основице једнаке ивици правилног икосаедра и висине $h = \frac{b\sqrt{15}}{10}$. Тада је:

$$P_{BI} = 20\left(\frac{b^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b\sqrt{15}}{10}\right) = 20 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}\right) = 5b^2\sqrt{3} \cdot \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5} = b^2\sqrt{3}\left(5 + 3\sqrt{5}\right).$$

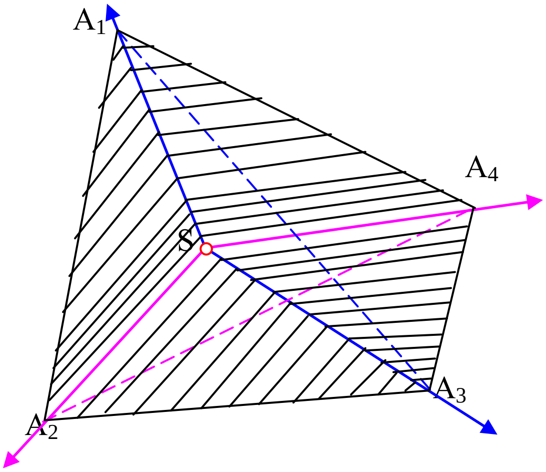
Поступајући на сличан начин за запремину добија се:

$$V_{BI} = \frac{1}{3} P_{BI} \cdot R_u = \frac{1}{3} \cdot b^2\sqrt{3}\left(5 + 3\sqrt{5}\right) \cdot \frac{b\sqrt{3}\left(3 + \sqrt{5}\right)}{12} =$$

$$=\frac{3b^3\left(15+5\sqrt{5}+9\sqrt{5}+15\right)}{3\cdot 12}=\frac{b^3\left(30+14\sqrt{5}\right)}{12}=\frac{b^3\left(15+7\sqrt{5}\right)}{6}.$$

Овим првим начином збир ивичних углова биће једнак збиру свих унутрашњих шестоугаоних страна бреговитог икосаедра тј 20 · 720 = 14400, јер је збир унутрашњих углова шестоугла једнак 720. Овај резултат није у складу са формулом теореме 9., јер би по тој формули требало да је овај збир (32 - 2) · 360^0 = 10800^0.

7.2. Други начин.



Сл. 29.

Дефиниција 24. Нека је $A_1, A_2, \cdots, A_n$ просторна полигонална линија и S тачка за коју свака полуправа чија је то почетна тачка продире највише један од троуглова одређених суседним страницама ове полигоналне линије. Унија свих полуправих којима је S почетна тачка и које садрже по једну тачку полигоналне линије зове се *уопштени рогаљ*. Полуправе SA_1, SA_2, $\cdots$, SA_n су ивице, а угао одређен ивицама које садрже суседна темена полигоналне линије је *страна рогља* или *ивични угао рогља*.

У неким случајевима се оваква (па и крива) површ зове *седло*, а тачка S *седласта тачка*. У овом тексту се ови називи неће употребљавати.

7.2.1. Звездоид малог звездастог додекаедра. Према доказу теореме 11. суседне стране једној страни додекаедра се протежу за троуглове који имају заједничку тачку тј. ти троуглови представљају омотач пирамиде чија је основа изабрана страна додекаедра, а бочна ивица протегнута ивица додекаедра за дужину дијагонале стране. Дакле, омотач ове пирамиде покрива унутрашњост изабране стране додекаедра. Како се свака страна додекаедра може покрити оваквим пирамидама, то је онда покривач малог звездастог додекаедра унија омотача ових 12 пирамида. Темена покривача су темена ових пирамида тј. 20 темена додекаедра и 12 врхова пирамида. Укупно N_0 = 32. Ивице покривача су све ивице ових пирамида тј. ивице основе које су ивице додекаедра (има их 30) и бочне ивице ових петостраних пирамида којих има $5 \cdot 12 = 60$. Дакле, укупно $N_1 = 90$ ивица. Стране покривача су бочне стране пирамида којих има $5 \cdot 12 = N_2 = 60$. Лако се проверава да важи Ојлерова формула: $N_0 - N_1 + N_2 = 32 - 90 + 60 = 2$. Покривач је повезана површ, јер је додекаедар повезан, а сваки врх пирамиде је бочном ивицом повезан са неким теменом додекаедра. Покривач је површ која има две класе рогљева. Једна класа су рогљеви одређени омотачима пирамида и о њима је било говора у 7.1. Друга класа рогљева су уопштени рогљеви. (Видети на Сл. 21. теме S и ивичне углове означене зеленом бојом.) Сваки од њих одређен је са три полуправе којима је почетна тачка једно теме додекаедра које су одређене ивицама којима је то заједничко теме и са три полуправе које имају то теме за почетну тачку, а одређене су протезањима ових ивица преко тог темена. Јасно је да једна ивица из прве групе и једна из друге леже на истој прави. Према томе, не постоји раван која сече све ове полуправе, па је то по дефиницији 24. уопштени рогаљ. Суседне ивице овог рогља су једна ивица из прве и једна ивица из друге групе и оне одређују угао бочне стране пирамиде на основици, а који је суплементан углу петоугаоне стране додекаедра, па је једнак 72^0. Како је ово шестострани рогаљ, то је онда збир његових ивичних углова $6 \cdot 72^0 = 432^0$. Како рогљева друге класе има колико и темена додекаедра тј. 20, а рогљева прве класе колико и страна додекаедра тј. 12, то је онда збир ивичних углова покривача једнак $20 \cdot 432^0 + 12 \cdot 5 \cdot 36^0 = 10800^0$. Овај је резултат сагласан формули из Теореме 9., јер је по тој формули збир ивичних углова $(32 - 2) \cdot 360^0 = 10800^0$. Овај збир се могао израчунати као збир унутрашњих углова свих бочних страна пирамида покривача тј. $12 \cdot 5 \cdot 180^0 = 10800^0$. Према томе, покривач малог звездастог додекаедра је проста полиедарска површ која одређује полиедар у смислу дефиниције 12. и зваћемо га *звездоид малог звездастог додекаедра*. Површина овог полиедра једнака је збиру површина омотача правилних петостраних пирамида покривача тј.

$$P = 12 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 3a^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \ .$$

Запремина овог полиедра једнака је збиру запремина свих ових пирамида и запремине додекаедра:

$$V = \frac{a^3\left(15 + 7\sqrt{5}\right)}{4} + 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \cdot a\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} =$$

$$= \frac{a^3\left(15 + 7\sqrt{5}\right)}{4} + 5a^3 \cdot \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} = \frac{a^3\left(15 + 7\sqrt{5}\right)}{4} + a^3\left(5 + 2\sqrt{5}\right) = \frac{a^3\left(35 + 15\sqrt{5}\right)}{4}.$$

7.2.2. Звездоид великог додекаедра. Према доказу Теореме 12. свака пентаграмска страна малог звездастог додекаедра протеже се за пет троуглова од темена правилног додекаедра према теменима пентаграма, која одређују ивицу правилног икосаедра, у петоугаону страну великог додекаедра. Три таква троугла протезања трију пентаграма којима је заједничко теме, теме правилног додекаедра представљају део покривача великог додекаедра, јер ови троуглови представљају бочне стране правилне пирамиде чија је основа страна правилног икосаедра који према теореми 12. представља кућиште великог додекаедра, па за сваку тачку било ког од ових троуглова постоји полуправа којој је та тачка почетна и једна тачка стране икосаедра која је одређује и притом та полуправа нема тачака у унутрашњости великог додекаедра. Унија свих тако добијених троуглова за свако теме правилног додекаедра представља покривач великог додекаедра. На основу претходних закључака ова површ има 12 темена која су и темена великог додекаедра и правилног икосаедра и 20 темена која су и темена полазног правилног додекаедра. Дакле, укупан број темена је 12 + 20 = 32. Свака страна ове површи лежи у тачно једној петоугаоној страни великог додекаедра, а како је свака ивица великог додекаедра (правилног икосаедра) заједничка за тачно две стране, то је онда таква ивица ове површи заједничка за два њена троугла. Свака од осталих страница ових троуглова је бочна ивица правилне пирамиде, па је и она заједничка за тачно два троугла. Како свака два од ових троуглова леже у различитим странама великог додекаедра, то онда и ови троуглови леже у ратличитим равнима. Свако теме правилног додекаедра је неком страницом ових троуглова повезано са неким теменом икосаедра, то онда постоји низ ивица ове површи који повезује било која два њена темена. Дакле, добијена површ је полиедарска и према претходном проста, па одређује полиедар у смислу дефиниције 12. који ћемо звати *звездоид великог додекаедра*. Број ивица овог полиедра представља збир броја ивица правилног икосаедра и броја бочних ивица правилних пирамида чија је основа страна правилног икосаедра, а врх одговарајуће теме полазног додекаедра. Укупан број ивица је $30+3\cdot 20=90$. Број страна звездоида великог додекаедра је укупан број бочних страна свих ових пирамида тј $3\cdot 20 = 60$. Сада се лако проверава да за овај полиедар важи Ојлерова формула $N_0 - N_1 + N_2 = 32 - 90 + 60 = 2$. Према Теореми 12., углови на основици страна звездоида великог додекаедра су по 36^0, а углови при врху пирамида по 108^0. Звездоид великог додекаедра има две класе рогљева. Једна класа су неконвексни десетострани рогљеви прве врсте којима су врхови темена икосаедра (јер је темена фигура великог додекаедра пентаграм), а ивични угао 36^0. Укупан збир ивичних углова ових рогљева је $12\cdot 10\cdot 36^0 = 4320^0$. Друга класа су рогљеви друге врсте којима су врхови врхови пирамида, а ивични угао 108^0. Укупан збир ивичних углова ових рогљева је $20\cdot 3\cdot 108^0 = 6480^0$. Укупан збир ивичних углова звездоида великог додекаедра је $4320^0 + 6480^0 = 10800^0$. Овај резултат је сагласан са формулом теореме 9. Овај се збир могао добити као збир унутрашњих углова свих троугаоних страна тј. $60\cdot 180^0 = 10800^0$. Површина звездоида великог додекаедра је збир површина свих његових страна, па се на основу резултата теореме 12. добија:

$$P = 60\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)a}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}a\right)^2} = 15\left(3+\sqrt{5}\right)a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{15}{2}a^2\sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2\left(5+\sqrt{5}\right)}{2}}=\frac{15}{2}a^2\sqrt{50+22\sqrt{5}}\ .$$

a је ивица полазног правилног додекаедра, а $b=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)a}{2}$ ивица правилног икосаедра.

Да бисмо одредили запремену зведоида великог додекаедра потребно је одредити висину пирамиде:

$$H=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot a\right)^2}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}a^2-\frac{3\left(14+6\sqrt{5}\right)}{36}\cdot a^2}$$

$$=a\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}=a\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}-7-3\sqrt{5}}{6}}=a\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Запремина звездоида великог додекаедра једнака је разлици запремине правилног икосаедра ивице b и 20 пирамида чија је основа страна овог икосаедра, а висина H, јер ове пирамиде представљају „удубљења“ у икосаедар.

$$V=\frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)b^3}{12}-20\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a=\frac{5b^2}{3}\left(\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)b}{4}-a\right)$$

$$=\frac{5b^2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}a-a\right)=\frac{5ab^2}{3}\cdot\frac{14+6\sqrt{5}-8}{8}=\frac{5ab^2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$$

$$=\frac{5\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2a^2\cdot a\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}=\frac{5\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)a^3}{8}=\frac{5\left(7\sqrt{5}+7+15+3\sqrt{5}\right)a^3}{8}$$

$$=\frac{5\left(5\sqrt{5}+11\right)a^3}{4}\approx 27{,}72542486a^3.$$

7.2.3. Звездоид великог звездастог додекаедра. На основу теореме 13. велики звездасти додекаедар настаје протезањем страна великог додекаедра преко његових ивица, које су и ивице икосаедра који је његово кућиште, за једнакокраке троуглове којима је основица ивица икосаедра, а крак дијагонала стране великог икосаедра. Стране великог додекаедра које садрже ивице једне стране икосаедра протежу се за троуглове који имају једно заједничко теме тј. ови троуглови чине омотач правилне пирамиде који покрива страну икосаедра (основу пирамиде). Како је правилни икосаедар кућиште великог додекаедра, то онда икосаедар покрива велики додекаедар. Омотачи свих правилних пирамида добијени на овај начин покривају икосаедар, а самим тим и велики додекаедар који је део површи великог звездастог додекаедра. Према томе, унија омотача свих ових пирамида је покривач великог звездастог додекаедра. Врхови ових пирамида (има их 20, колико и страна икосаедра) и темена основа (која су и темена икосаедра, има их 12) су темена покривача. Дакле, број темена покривача је 20 + 12 = 32. На исти начин као у 7.2.2. се закључује да је овај покривач проста полиедарска површ. Број ивица представља збир свих бочних ивица пирамида и свих ивица икосаедра тј. 20 · 3 + 30 = 90. Број страна је број бочних страна пирамида тј. 20 · 3 = 60. Лако се проверава да и у овом случају важи Ојлерова формула $N_0 - N_1 + N_2 = 32 - 90 + 60 = 2$.

На сличан начин као у 7.2.2. се закључује да и ова полиедарска површ има две класе рогљева. Једна класа су уопштени рогљеви који у овом случају имају по 10 страна, а ивични углови су им по 72^0 (суплементни угловима петоугла). Друга класа су тространи рогљеви поменути у 7.1. којима су ивични углови по 36^0. Укупан збир ивичних углова је $12 \cdot 10 \cdot 72^0 + 20 \cdot 3 \cdot 36^0 = 10800^0$. Овај се резултат слаже са формулом теореме 9. Овај збир се може одредити и као збир унутрашњих углова троугаоних страна свих омотача пирамида тј. $20 \cdot 3 \cdot 180^0 = 10800^0$. Ова површ одређује прост полиедар који ћемо звати *звездоид великог звездастог додекаедра*. Површина звездоида великог звездастог додекаедра је једнака збиру површина свих његових страна тј. збиру омотача свих правилних тространих пирамида основне ивице b (ивица икосаедра) и бочне ивице $\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)b}{2}$. Према томе, површина је:

$$P = 20\cdot 3\cdot \frac{1}{2}\cdot b\cdot b\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 30b^2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$=15\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{15a^2}{2}\sqrt{\left(7+3\sqrt{5}\right)^2\left(5+2\sqrt{5}\right)}$$

$$=\frac{15a^2}{2}\sqrt{\left(94+42\sqrt{5}\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)} = \frac{15a^2}{2}\sqrt{890+398\sqrt{5}} \approx 316{,}4213518a^2 .$$

При чему је a ивица полазног правилног додекаедра.

Висина пирамида је:

$$H = b\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{12}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{3}}{6}.$$

Запремина звездоида великог звездастог додекаедра је једнака збиру запремина правилног икосаедра ивице b и двадесет наведених тространих пирамида:

$$V = \frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)b^3}{12} + 20\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)b^3}{12} + \frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)b^3}{6}$$

$$=\frac{15\left(3+\sqrt{5}\right)b^3}{12}=\frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3a^3=\frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)^4a^3}{4\cdot 8}=\frac{5\left(14+6\sqrt{5}\right)^2a^3}{4\cdot 8}$$

$$=\frac{5\cdot 4\left(7+3\sqrt{5}\right)^2a^3}{4\cdot 8}=\frac{5\left(49+42\sqrt{5}+45\right)a^3}{8}=\frac{5\left(47+21\sqrt{5}\right)a^3}{4}\approx 117{,}4467844a^3 .$$

7.2.4. Звездоид великог икосаедра. На основу доказа теореме 14. велики икосаедар настао од правилног икосаедра који је кућиште малог звездастог додекаедра и великог додекаедра насталих од полазног додекаедра и мали звездасти додекаедар настао од правилног додекаедра који је кућиште великог звездастог додекаедра имају иста темена и исте ивице. На основу пододељка 6.5. три несуседне стране великог икосаедра код којих по једна ивица одређују троугао који представља протезање малог звездастог додекаедра од кућишта великог звездастог додекаедра, а који је по пододељку 7.2.1. страна звездоида малог звездастог додекаедра, секу се у једној тачки. Та тачка је четврто теме тетраедра чија је основа наведена страна звездоида малог звездастог додекаедра и налази се у унутрашњости овог звездоида. На основу 7.2.1., такође, следи да таквих тачака и таквих тетраедара има 60 и да они представљају удубљења у странама звездоида малог звездастог додекаедра тј. стране звездоида покривају омотаче ових тетраедара.

На сличан начин као код звездоида великог икосаедра се показује да је ова површ проста полиедарска површ и да је покривач великог икосаедра. Према томе, она одређује прост полиедар који ћемо звати *звездоид великог икосаедра*. Темена овог звездоида су темена звездоида малог звездастог додекаедра којих има 32 и поменутих 60 темена тетраедара. Укупно $N_0 = 32 + 60 = 92$. Ивице овог звездоида су ивице звездоида малог звездастог додекаедра којих има 90 и бочне ивице тетраедара којих има $60 \cdot 3 = 180$. Укупно $N_1 = 90 + 180 = 270$. Број страна је број свих бочних страна тетраедара, а има их $N_2 = 60 \cdot 3 = 180$. Лако се проверава да важи Ојлерова формула: $N_0 - N_1 + N_2 = 92 - 270 + 180 = 2$. Број ивичних углова се може одредити као збир унутрашњих углова свих његових троугаоних страна тј. $180 \cdot 180^0 = 32400^0$. Овај се резултат слсже са формулом теореме 9. тј. $(92 - 2) \cdot 360^0 = 32400^0$. Површина звездоида великог икосаедра је једнака збиру 60 омотача тетраедара. На основу формула из 6.5. ова површина је:

$$P=60\cdot\frac{\sqrt{15}+3\sqrt{10}+5\sqrt{2}}{20}\cdot b_1^2=3\left(\sqrt{15}+3\sqrt{10}+5\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)^2a^2$$

$$=3\left(\sqrt{15}+3\sqrt{10}+5\sqrt{2}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)a^2=3\left(9\sqrt{15}+47\sqrt{10}+20\sqrt{3}+105\sqrt{2}\right)a^2\approx 1099{,}852021a^2 .$$

b_1 је ивица додекаедра који је кућиште великог звездастог додекаедра, а a ивица полазног правилног додекаедра.

Запремина је, на основу резултата из 6.5. и 7.2.1., једнака разлици запремина звездоида малог звездастог додекаедра изражене ивицом b_1 и запремина свих 60 тетраедара (удубљења у стране наведеног звездоида) тј.

$$V=\frac{35+15\sqrt{5}}{4}\cdot b_1^3-60\cdot\frac{3\sqrt{5}+5}{60}\cdot b_1^3=\frac{35+15\sqrt{5}-12\sqrt{5}-20}{4}\cdot b_1^3$$
$$=\frac{\left(15+3\sqrt{5}\right)b_1^3}{4}=\frac{3\left(5+\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)^3a^3}{4}=\frac{3\left(5+\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)a^3}{4}$$
$$=\frac{3\left(5+\sqrt{5}\right)\left(18+9\sqrt{5}+8\sqrt{5}+20\right)a^3}{4}=\frac{3\left(5+\sqrt{5}\right)\left(38+17\sqrt{5}\right)a^3}{4}$$

$$=\frac{3\left(190+85\sqrt{5}+38\sqrt{5}+85\right)a^3}{4}=\frac{3\left(275+123\sqrt{5}\right)a^3}{4}\approx 412{,}5272709a^3\,.$$

7.2.5. Звездолико бреговити икосаедар. Према пододељку 6.6. свака ивица бреговитог икосаедра је једна од три бочне ивице правилне пирамиде чија је основа страна правилног икосаедра од кога је добијен бреговити икосаедар, па је самим тим свако његово теме врх такве пирамиде. Омотач сваке од ових пирамида покрива њену основу која је део једне шестоугаоне стране бреговитог икосаедра, остали делови овог шестоугла су неке од троугаоних бочних страна ових пирамида. Према томе, унија омотача свих ових пирамида је покривач бреговитог икосаедра. Како је над сваком страном правилног икосаедра конструисана по једна таква пирамида, то је онда укупан број троугаоних страна покривача једнак 20 ˙ 3 = 60. Јасно је да је свака бочна ивица ових пирамида заједничка за тачно две стране. Основне ивице ових пирамида су ивице правилног икосаедра, па је свака од њих заједничка за тачно две основе које, свакако, нису у истој равни. Према томе, свака од ових ивица је заједничка за тачно две пирамиде, а како свакој основној ивици одговара тачно једна бочна страна, то је онда свака основна ивица заједничка за једну бочну страну једне и за једну бочну страну друге пирамиде тј. заједничка је за тачно две стране покривача. Свака два суседна троугла покривача леже у различитм шестоугаоним странама бреговитог икосаедра, па према томе и у различитим равнима. У 6.6. је показано да се свака два темена бреговитог икосаедра могу повезати ивицама шестоугаоних страна, а како су то и темена покривача, то се онда и свака два темена покривача могу повезати ивицама (у овом случају се могу користити и ивице правилног икосаедра). Дакле, покривач бреговитог икосаедра је проста полиедарска површ, па према томе одређује прост полиедар који ћемо звати *звездолико бреговити икосаедар*. Према 6.6. укупан број темена је 32. Укупан број ивица је према 6.6. и према претходном раматрању једнак збиру свих бочних ивица пирамида и броја ивица правилног икосаедра тј. 60 + 30 = 90. Лако се проверава да важи Ојлерова формула N_0 - N_1 + N_2 = 32 – 90 + 60 = 2. Збир ивичних углова звездолико бреговитог икосаедра се може одредити као збир унутрашњих углова свих његових троугаоних страна тј. 60 $180^{0н}$ = 10800^0. Овај се резултат слаже са формулом теореме 9. Површина зведолико бреговитог икосаедра је једнака збиру површина бочних страна пирамида , па користећи резултате из 6.6. следи:

$$P=20\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{b\sqrt{15}}{10}=3b^2\sqrt{15}=3\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\sqrt{15}=\frac{3\left(14+6\sqrt{5}\right)\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{3\left(7+3\sqrt{5}\right)\sqrt{15}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}\left(7\sqrt{5}+15\right)a^2}{2} \approx 79{,}63746831a^2 .$$

Запремина звездолико бреговитог икосаедра једнака је збиру запремине правилног икосаедра и 20 поменутих правилних пирамида тј.

$$V = \frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)b^3}{12} + 20\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{b\sqrt{15}}{15} = \frac{5\left(3+\sqrt{5}\right)b^3}{12} + \frac{b^3\sqrt{5}}{3} = \frac{\left(5+3\sqrt{5}\right)b^3}{4} .$$

Упоређујући овај резултат са одговарајућим резултатом у 6.6. лако се уочава да се ове вредности разликују за запремину правилног икосаедра.

Замењујући b са $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ добија се:

$$V = \frac{5+3\sqrt{5}}{4}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 a^3 = \frac{\left(5+3\sqrt{5}\right)\left(14+6\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)a^3}{4\cdot 8}$$

$$= \frac{\left(30+14\sqrt{5}\right)\left(7+3\sqrt{5}\right)a^3}{4\cdot 4} = \frac{\left(15+7\sqrt{5}\right)\left(7+3\sqrt{5}\right)a^3}{4\cdot 2} = \frac{\left(210+94\sqrt{5}\right)a^3}{4\cdot 2}$$

$$= \frac{\left(105+47\sqrt{5}\right)a^3}{4} \approx 52{,}52379874a^3 .$$

И у овом случају је a ивица полазног правилног додекаедра од кога се одређеним редоследом добијају сви поменути правилни полиедри као и бреговити звездасти икосаедар. Овакав начин изражавања мера дужина елемената, површина и запремина поменутих полиедара омогућава поређење њихових одговарајућих величина.

Занимљиво је напоменути да на први поглед изгледа да су звездоид великог додекаедра и звездолико бреговити икосаедар инвертовани (обрнути) један другом у односу на правилни икосаедар са којим имају један број заједничких темена. Међутим, ово запажање није тачно јер је висина пирамиде удубљења звездоида великог додекаедра једнака $\frac{\sqrt{3}}{3}a \approx 0.577350269a$, док је висина пирамиде узвишења звездолико бреговитог икосаедра

$$\frac{b\sqrt{15}}{15} = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{15}}{30}a = \frac{\sqrt{3}\left(3\sqrt{5}+5\right)a}{30} \approx 0.675973469a .$$

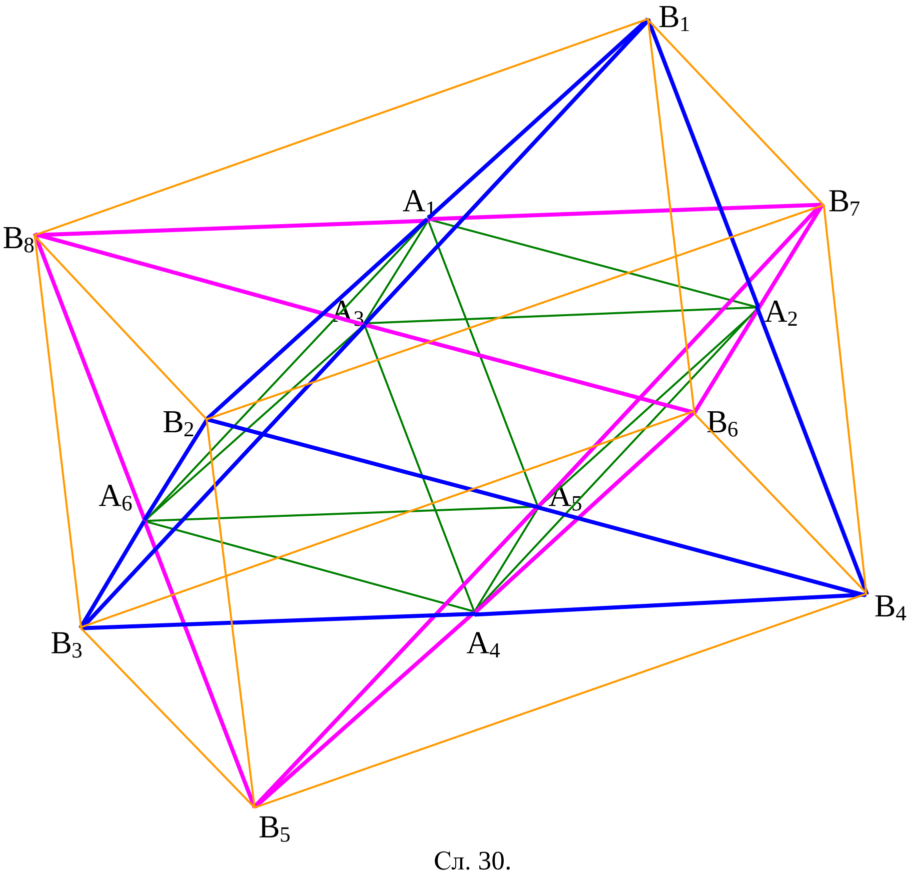
8. О склоповима правилних полиедара

Пресеци и уније геометријских фигура (скупова тачака) се користе у разним проблемима. Нови појмови се често дефинишу као пресеци или уније познатих појмова, помоћу пресека и унија се успостављају односи међу фигурама. У тим проблемима се често помињу пресеци и уније произвољног броја (чак и бесконачно много) фигура. Успешност одређивања пресека или уније две или више фигура зависи од броја фигура и њихове сложености. За три или више фигура пресеци или уније могу да представљају врло сложене фигуре иако су појединачне фигуре релативно једноставне. За две сложеније фигуре пресек и унија могу бити изузетно сложене фигуре. За равне геометријске фигуре су ови проблеми нешто једноставнији од оних у вишедимензионим просторима. У простору од три димензије се ови проблеми решавају методама нацртне геометрије за потребе разних грана технике. У овом случају за два тела се пресеци деле на продоре и задоре. Под продором једног тела кроз друго подразумева се случај кад друго тело разлаже прво на три дела: један део је пресек ових тела, а друга два немају заједничких тачака; у супротном је у питању задор. И поред оваквог поједностављења продор или задор, чак и за два једноставана полиедра, а посебно за обла тела, може бити врло компликован. Нешто једноставнији случајеви настају ако се узимају правилни полиедри и ако су у посебном положају, чак и ако их има више од два. На тај начин се долази до појма склопа који се, такође, користи у разним гранама технике.

Дефиниција 25. Под *склопом полиедара* (кратко *склоп*) подразумева се унија међусобно подударних правилних полиедара (конвексних или звездастих) који имају заједнички центар. Под *центром полиедра* се подразумева центар описане односно уписане сфере тих полиедара.

Пресек полиедара склопа је конвексан полиедеар, јер је пресек правилних полиедара конвексан; за правилне конвексне полиедре је јасно, а за звездасте је тај пресек пресек њихових језгара која су конвексни скупови. Пресек полиедра склопа се зове *језгро склопа*. На основу претходних разматрања темена било којег правилног полиедра припадају правилном конвексном полиедру. На основу дефиниције 25. темена склопа леже на описаној сфери, па одређују конвексан полиедар који се зове *кућиште склопа*. Ако је језгро склопа правилан полиедар, онда се каже да је склоп *странама правилан*, а ако је кућиште правилан полиедар, онда се каже да је склоп *теменима правилан*. Склоп може бити и странама и теменима правилан; тада се може рећи да је *правилан склоп.* Обележавење склопова полиедара слично је обележавању склопова полигона. Наиме, ако сваки од d $\{p,q\}-$ова има нека темена од $\{m,n\}$, при чему је свако теме од $\{m,n\}$ узето c пута, онда се пише $c\{m,n\}[d\{p,q\}]$, а ако сваки од d $\{p,q\}-$ова има стране које леже у равнима страна од $\{s,t\}$, при чему је свака раван стране од $\{s,t\}$ узета *e* пута, онда се пише $[d\{p,q\}]e\{s,t\}$. Ако је испуњено и једно и друго, онда се пише $c\{m,n\}[d\{p,q\}]e\{s,t\}$. Овај начин обележавања биће објашњен на примерима који буду наведени.

8.1. Стела октангула ($\{4,3\}[2\{3,3\}]\{3,4\}$). Познато је из геометрије да су углови диедара правилног тетраедра и правилног октаедра суплементни, при чему је угао правилног тетраедра оштар. Према томе, равни страна правилног тетраедра и правилног октаедра заклапају једнаке оштре углове. На основу овог резултата равни страна $A_1A_6A_3$, $A_3A_4A_2$ и $A_2A_5A_1$, које су суседне страни $A_1A_3A_2$, секу се у једној тачки (Сл.30.). Нека је то тачка B_1. Тада су тачке B_1, A_1, A_2, A_3 темена правилног тетраедра. Како су равни страна $A_1A_2A_3$ и $A_4A_5A_6$ октаедра паралелне, то онда равни страна $A_1A_6A_3$, $A_3A_4A_2$ и $A_2A_5A_1$ секу раван стране $A_4A_5A_6$ по правама које су паралелне ивицама A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1. Пресечне праве ових равни секу се у тачкама B_2, B_3, B_4 које су темена троугла сличног троуглу $A_1A_2A_2$. Према томе, троугао $B_2B_3B_4$ је једнакостранични. Како се сваке две од равни страна $A_1A_6A_3$, $A_3A_4A_2$ и $A_2A_5A_1$ секу по правама A_1B_1, A_2B_4, A_3B_3 које садрже

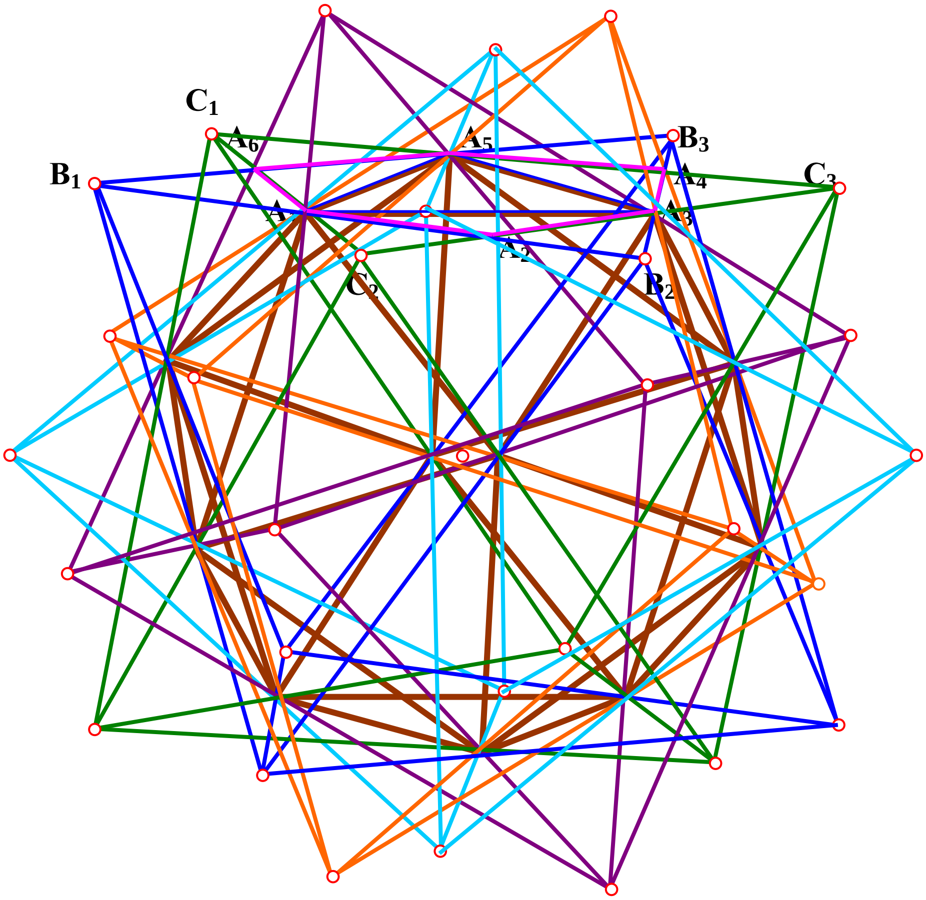


Сл. 30.

тачку B_1 и по једну од тачака B_2, B_3, B_4, то су онда тачке B_1, B_2, B_3, B_4 темена правилног тетраедра. Како су праве A_2A_3 и B_3B_4 паралелне, а права одређена ивицом октаедра A_2A_4 их сече, то је онда угао $A_3A_2A_4$ једнак углу $A_2A_4B_4$. Како је угао $A_3A_2A_4$ од 60^0, то је онда троугао $A_2A_4B_4$ једнакостранични и страница ну је једнака ивици октаедра. На основу овог и претходних закључака следи $A_2B_1 = A_2B_4$, односно да је ивица тетраедра $B_1B_2B_3B_4$ два пута већа од ивице тетраедра $B_1A_1A_2A_3$ тј. од ивице октаедра. Полазећи од суседних страна страни $A_4A_5A_6$ октаедра, на исти начин, добија се тетраедар $B_5B_6B_7B_8$ подударан тетраедру $B_1B_2B_3B_4$. Према начину добијања ова два тераедра раван сваке стране октаедра је и раван једне стране једног од тетраедара и како се у октаедар може уписати сфера, то онда уписана сфера у октаедар додирује и стране тетраедара, па је центар те сфере и центар тетраедара. Како су ови тетраедри подударни, то онда постоји сфера са истим центром која садржи темена оба тетраедра. Како унија два или више различитих полиедара није полиедар у смислу дефиниције 11., јер ако ти полиедри немају заједничких ивица, онда нису повезани у смислу дефиниције 10., а ако имају заједничку ивицу, онда је та ивица заједничка за више од две стране, што је супротно дефиницији 11. и на крају ако имају заједничку страну, онда је, опет, свака ивица те стране заједничка за више од две стране. Дакле, према дефиницији 25. унија ова два тетреаедра чини склоп. На основу поступка добијања ова два тетраедра је јасно да је овај склоп настао звездичањем правилног октаедра, па је правилни октаедар језгро склопа. На основу добијања склопа од ова два тетраедра свако теме октаедра је заједничко за једну ивицу једног и за једну ивицу другог и да то теме полови ове ивице тетраедара. Нека је, на пример, то теме A_1. На основу особина октаедра ово теме је заједничко за четири стране и остала темена ових страна тј. суседна темена темену A_1, а то су A_2, A_3, A_6 и A_5, одређују квадрат. На основу претходног равни страна $A_1A_5A_2$ и $A_1A_6A_3$ секу се по правој која садржи ивицу B_1B_2 једног од тетраедара. На основу познатог става из геометрије о двема равнима кроз две паралелне праве следи да је ивица B_1B_2 паралелна ивицама октаедра A_2A_5 и A_3A_6. На исти начин се показује да је ивица другог тетраедра, која садржи тачку A_1, B_7B_8 паралелна ивицама A_2A_3 и A_5A_6 октаедра. Како су суседне ивице A_2A_5 и A_5A_6 нормалне, то су и ивице B_1B_2 и B_7B_8 тетраедара склопа нормалне. Дакле, ивице B_1B_2 и B_7B_8 се полове и нормалне су, па су дијагонале квадрата. Према томе, четвороугао $B_1B_8B_2B_7$ је квадрат који одговара темену A_1 икосаедра. Дијагонала A_1A_4 октаедра је нормална на раван квадрата $A_2A_3A_6A_5$ и садржи центар октаедра, па је према томе нормална на раван квадрата $B_1B_8B_2B_7$ у пресеку његових дијагонала. Из овога следи да је раван квадрата тангентна раван сфере описане око октаедра. На сличан начин се могу за свако теме октаедра одредити још пет квадрата који у својим пресецима дијагонала додирују сферу описану око октаедра. Познато је, такође, из геометрије да тангентне равни сфере описане око октаедра у теменима октаедра одређују коцку. Према томе, сви овако добијени квадрати представљају темена једне коцке. Ова коцка је на основу ових закључака кућиште склопа од добијена два тетраедра. Добијени склоп се зове *стела октангула* и има ознаку $\{4,3\}[2\{3,3\}]\{3,4\}$. Свако теме коцке је теме само једног од два тетраедра, а раван сваке стране октаедра садржи само једну страну једног од два тетраедра. Дакле, $c = e = 1$. Остало у овој ознаци је јасно. На крају, стела октангула је и теменима и странама правилан склоп.

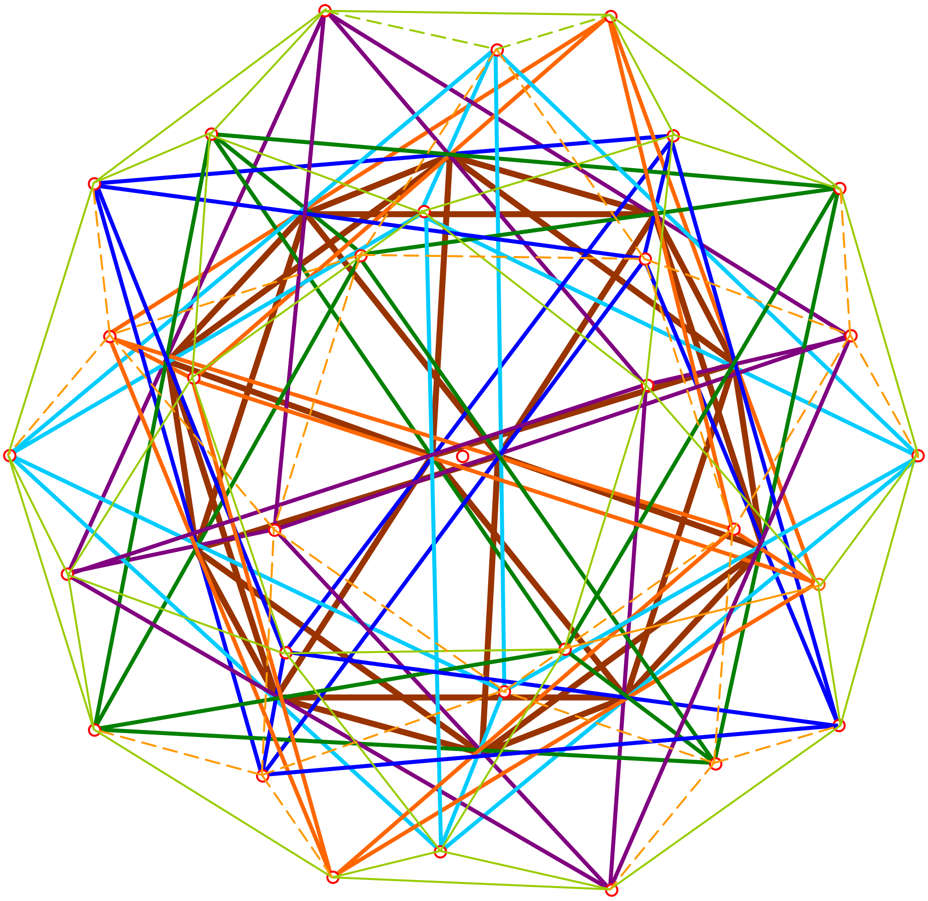
Пошто у овом тексту склопови не представљају централно место, објаснићемо добијање још само једног склопа.

8.2. Склоп $[5\{3,4\}]2\{3,5\}$. Овај склоп може да се добије звездичањем правилног икосаедра посредством звездичања бреговитог икосаедра. Уочимо страну $A_1A_3A_5$ правилног икосаедра и њој одговарајућу страну $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ бреговитог икосаедра (Сл. 30.). Продужавањем (протезањем) несуседних страница A_1A_2, A_3A_4 и A_5A_6 до пресека правих одређених овим ивицама добија се троугао $B_1B_2B_3$ (означен плавом бојом на Сл. 30.). На основу резултата у пододељку 6.6. угао $A_6A_1A_2$ има меру $60^0 + 2\varphi$, а угао $A_1A_6A_5$ $180^0 - 2\varphi$. Њима суплементни углови $120^0 - 2\varphi$ и 2φ су углови троугла $A_1B_1A_6$. Угао код темена B_1 овог троугла, који је и угао троугла $B_1B_2B_3$, је тада од 60^0. На исти начин се закључује да су и остали углови троугла $B_1B_2B_3$ од 60^0. Према томе, троугао $B_1B_2B_3$ је једнакостранични, а добијен је протезањем једног дела шестоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ за троуглове $A_1A_6B_1$, $A_2A_3B_2$ и $A_5A_4B_3$. На основу добијања бреговитог икосаедра се закључује



Сл. 31.

да је на овај начин троугао $A_1A_3A_5$ за троуглове $A_1A_5B_1$, $A_1A_3B_2$ и $A_3A_5B_3$ протегнут на троугао $B_1B_2B_3$. Протезањем осталих трију страница шестоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, на исти начин, добија се још један једнакостранични троугао $C_1C_2C_3$ који чини још једно протезање стране $A_1A_3A_5$ правилног икосаедра. Примењујући овај поступак на све стране правилног икосаедра добија се 40 троуглова који чине склоп од пет правилних октаедара. Од сваке стране правилног икосаедра добија се по једна страна два октаедра од пет октаедара склопа, због чега се може рећи да су стране правилног икосаедра убројане (употребљене) два пута. Отуд у означи овог склопа $2\{3,5\}$ тј. $e = 2$. Дакле, језгро овог склопа је правилни икосаедар, па је склоп странама правилан. Овај склоп није теменима правилан. Може се показати да његова темена представљају темена полуправилног 32-страног 30-теменог полиедра (икосидодекаедра). (Видети Сл.31.). Из наведених разлога ова конструкција није у потпуности доказана. На основу ових објашњења је јасно зашто је ознака овог склопа $[5\{3,4\}]2\{3,5\}$. Од великог броја склопова склоп $[5\{3,4\}]2\{3,5\}$ је изабран због своје нешто мање сложености, али и да укаже на значај бреговитог икосаедра и полуправилних конвексних полиедара.



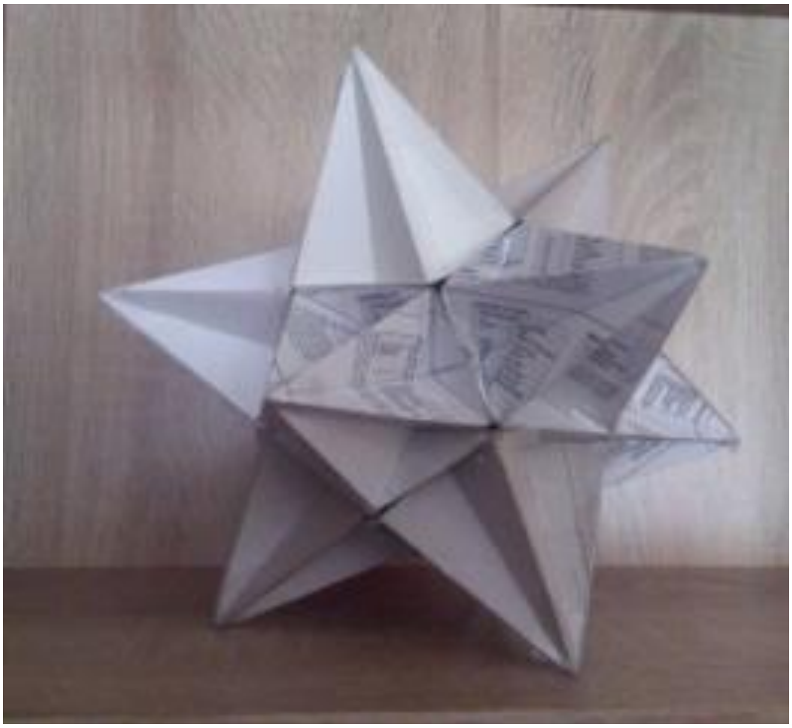
Сл. 32.

9. Фотографије модела звездастих полиедара

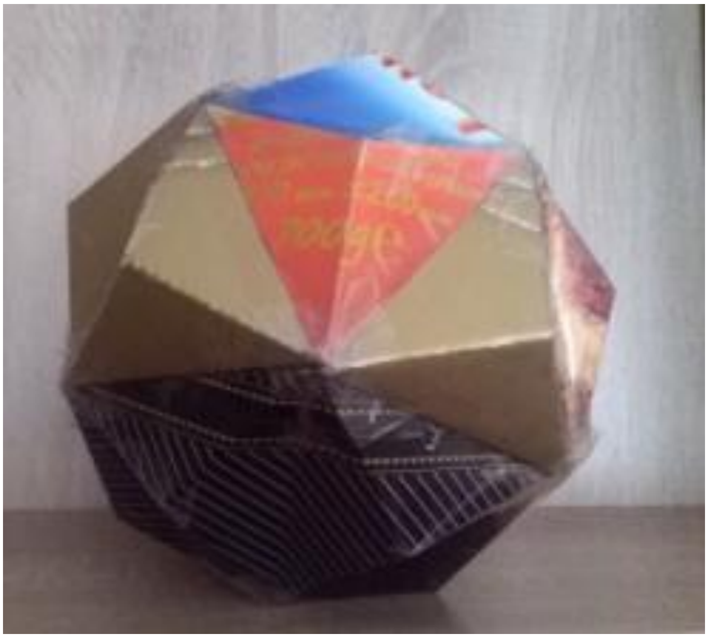
Мали звездасти додекаедар

Велики додекаедар

Велики звездасти додекаедар



Велики икосаедар



Бреговити икосаедар

ЛИТЕРАТУРА

[1] Динић, Р.: *Правилни и полуправилни полиедри*, Народна библиотека „Данило Киш“, Теслић, 2008

[2] Живковић, Р. и Клашња, С.: *Математика за III разред средњих школа*, „Свјетлост“, Сарајево, 1977

[3] Кечкић, Ј.: *Математика за III разред средњих школа*, „Научна књига“, Београд, 1992

[4] Коксетер, Х.С. М.: *Правилни политопи* (превод: Р. Динић), МАТ-КОЛ, посебна издања, (Бања Лука), Broj 16, 2017

[5] Лопандић, Д.: *Математика за III разред усмереног Образовања*, „Научна књига“, Београд, 1980

[6] Прешић, С. и Алимпић, Б.: *Математика за I разред средњег усмереног образовања*, „Свјетлост“, Сарајево, 1980

[7] Хилбер, Д.: *Основе геометрије* (превод: Ж. Гарашанин), Математички институт, Београд, 1957

[8] H. S. M. Coxeter: *Regular Polytopes*. The MacMillan Com., New York, 1963

[9] Шкреблин, Стјепан: *Тригонометрија*, Комисионална наклада књижаре С. Кугли, Загреб, 1937