MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIV (1)(2018), 29-40 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1801029L

КАРАКТЕРИСТИКЕ ПРИПРЕМАЊА УЧЕНИКА ЗА ПОЛАГАЊЕ МАТУРСКИХ И ПРИЈЕМНИХ ИСПИТА ЗА УПИС НА ДАЉЕ ШКОЛОВАЊЕ

Проф Др **Илија Лазаревић**,
ЕТФ Београд, Србија

Сажетак. Реч је о организованим припремама основаца и средњошколаца за завршне испите, као и о припремама за полагање пријемних испита ради уписа на даље школовање.

Abstract. This text is about organized preparations of primary and secondary school students for final examinations, as well as preparation for taking entrance exams for enrollment for further education.

Неке школе, као и неки факултети, организују поменуте припреме. Народни универзитети, приватне агенције па и појединци баве се такође овим пословима.

На примеру учења Математике за пријемни испит за упис на факултет, илустроваћемо карактеристике поменутих припрема. Карактер тог испита је свуда исти - где год се Математика полаже. Стога је и карактер припрема тог испита свуда исти. Но и припремање испита из других предмета (нпр. матерњег језика, физике, хемије, биологије итд.) имају исте карактеристике. Настава на припремним курсевима изводи се на интензиван начин и у кратком трајању. Стога би та настава морала бити другачија од оне која се изводи у току редовног школовања. На жалост, многи извођачи поменуте наставе иду "утабаним стазама" - онако како су радили у редовној настави. Зато поједини курсеви не постижу жељени циљ.

Природно намеће се питање да ли су ти припремни курсеви потребни. С обзиром на то колико наши ученици уче, колико стварно знају, а колико су само информисани у току редовног школовања, припреме су неопходне. Погрешно је мишљење да су припремни курсеви потребни само ђацима који слабије стоје са математиком. Јер и ученици који су имали добре оцене из математике током школовања треба да буду увежбани за пријемни испит. На том испиту треба владати целокупним градивом у истом тренутку. Увежбавањем и решавањем задатака понавља се и утврђује градиво, стиче се ефикасност и сигурност у раду. Замислите да два шаховска првака света одиграју по једну партију шаха, па један од њих победи а други изгуби. Не бисмо могли рећи да онај који је изгубио не зна да игра; пре бисмо рекли да је негде погрешио. Тако и одличан математичар када подбаци на пријемном испиту - најчешће значи да је негде погрешио или превидео. Та појава се лечи увежбавањем и припремањем као што се то чини у сваком послу, спорту или занату.

У наставку ћемо покушати да, на примеру припреме за пријемни испит из Математике за упис на факултет, укажемо на главне карактеристике тог посла.

1. Време одржавања наставе

Предавања на курсевима одржавају се у викендним данима (када су полазници слободни од редовне школе). Курсеви се одржавају од јесени до пролећа наредне календарске године. Циклус предавања састоји се од педесетак наставних часова. Стога су предавања интезивна и не могу бити по лекцијама као што се то чини код редовног четворогодишњег школовања.

2. Дидактика наставе

Да би се прешло целокупно градиво (које се изучава у току редовног школовања), предавања морају бити по блоковима и тематским целинама. То се најбоље постиже ослањањем на принципе по којима се долази до правила, закона и формула. Тако на пример, *дељењем полинома* могу се решавати задаци факторизације алгебарских израза, задаци снижавања степена једначина (уз коришћење Безуове теореме), скраћивање рационалних израза (тј. разломака), налажења NZS и NZD (уз коришћење Еуклидовог алгоритма) и др.

Пример. Упростити израз

$$P(a,b)=\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2},\ (a\neq b).$$

Бројилац и именилац израза $P(a,b)$ посматраћемо као полиноме по слову "a" док ћемо слово "b" третирати параметром. Дељењем тих полинома лако налазимо

$$P(a,b)=1+\frac{4ba-6b^2}{2a^2-5ab+3b^2}=1+\frac{2b(2a-3b)}{2a^2-5ab+3b^2}.$$

Примећујемо да последњи разломак није скратив са $2b$. Стога покушајмо да поделимо $2a^2-5ab+3b^2$ са $2a-3b$. Ако то учинимо добићемо количник $a-b$. Према томе сада следи

$$P(a,b)=1+\frac{2b}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}.$$

На овај задатак наставници обично потегну растављање на чиниоце бројиоца и имениоца јер им то омогућује скраћивање разломка. Но та метода је најгоре могућа. Наиме растављање на чиниоце је хеуристичка радња погодног груписања чланова, допуњавања додавањем и одузимањем истих израза, итд. То је тежак посао код компликованијих примера и може да не успе цео дан. У једној збирци задатака која је намењена припремању испита, ([1]), видео сам један пример оваквог задатка али са полиномима знатно већег степена. Аутор је применио методу растављања на чиниоце те му је била потребна цела једна страница књиге за то решење. За разлику од тога, метода дељења је увек могућа и увек је иста процедура.

3. Мимимизација улупног броја формула које се памте

Једна од највећих ученичких тешкоћа је и огромна количина готових формула које се траже да их ученик напамет зна. Може се показати како се може значајно смањити број готових формула које се памте а да то не буде на уштрб разумевања целокупног градива и успешног решавања задатака.

Идеја се састоји у томе да се многе формуле репродукују у моменту када су оне кориснику потребне.

Пример. Претпоставимо да је на испиту некоме потребна формула за растављање на чиниоце неког од бинома $a^n \pm b^n$, рецимо бинома a^2-b^2, $a^3 \pm b^3$ и сл. Кандидат није сигуран у то како гласи готова формула. Природно је и да потражи фактор облика $a \pm b$ (осим кад a^2+b^2). Дељењем бинома $a^n \pm b^n$ са $a \pm b$ (кад је то могуће), добиће се одмах готова формула.

Пример. Један нарочито леп пример *минимизације броја готових формула* срећемо у вези примене Талесове теореме (у равни и у простору). Наиме, коришћењем појма тзв. *допуне трапеза до троугла*, или *допуне зарубљене пирамиде (зарубљене купе)*, и применом Талесових теорема могу се израчунати висине поменутих допуна. А онда се формула за површину трапеза, односно запремину зарубљене пирамиде (зарубљене купе), лако добива као разлика поменутих величина двеју незарубљених фигура.

Пример. У оквиру Школског програма на телевизији "Ја волим математику", спикерка каже: "Површина кружног прстена израчунава се по формули $P=\pi(R+r)(R-r)$. Не образлажући настанак ове формуле, уноси у њу бројне податке за R и r, итд. Слично у истој емисији се наводи формула за дужину кружног лука и у њу уносе задати нумерички подаци. А зар није било боље да се знају само формуле за површину кружне области и обима кружне линије. Јер ће се тада поменута површина и поменути лук лако израчунати и без готових формула. Површина прстена као разлика два круга а дужина лука као пропорционални део обима кружнице.

Сличне примере кондензације градива срећемо у свакој области. Тригонометрија је нарочито одбојна ученицима због обиља формула. У књизи, о којој ћемо касније више говорити, показано је како се задаци из Тригонометрије могу успешно решавати и са напола мањим бројем готових формула. У Аналитичкој геометрији не мора се *подела дужи у датој размери* радити по готовој формули. Јер ако деона тачка дели дату дуж по датој размери, онда и пројекције те тачке на координатне осе деле пројекције те дужи у истој размери. А за овај посао довољно је умети решити одговарајуће пропорције.

Неколико деценија учествовао сам као, наставник, на пријемним испитима на Електротехничком факултету у Београду. Небројено пута сам чуо следећу изјаву од кандидата: "Знао сам како се решава тај и тај задатак али се нисам сетио одговарајуће формуле". Зар то није трагично? Уз мали умни креативни напор могао се наћи пут до успешног завршетка посла.

4. Разумевање формула и правила

Главна препрека запамћивању формула лежи најчешће у чињеници што ученици уче напамет и без разумевања извођења (генезе) истих. Вербално учење, које је карактеристично за друге наставне предмете, многи примењују и у Математици. И тако раде "од малих ногу" па кроз цело потоње школовање. Ја сам мојој унуци, која је ђак шестог разреда основне школе, задао да реши једначину $x+3=8$. Она је написала $x=8-3=5$. Она (унука) наводно зна да кад неки члан једначине прелази са једне на другу страну знака једнакости тај члан мења свој знак. Али на питање зашто је то тако, унука каже "тако је рекла наставница". Зато једначину $8-x=5$ не уме да реши. Према томе унука не зна две ствари: Прво, да се једначина (самим тим и знак једнакости) може читати и здесна на лево; и друго, да се решавање једначине састоји у томе да се тражена непозната x (тј. $+x$), маневром пребацивања чланова преко знака једнакости, издвоји сам x на једну (било коју) страну знака једнакости. У збирци задатака за шести разред пише: Решење једначине $x+a=b$ је $x=b-a$, а решење једначине $a-x=b$ је $x=a-b$. Дакле, дају се две формуле, а не би требало ни једна. Тим формулама се игнорише већ стечено знање о пребацивању преко знака једнакости. Јасно је да се на том основном нивоу учења не може све доказивати (нпр. Питагорина теорема) али не би ваљало ни "пунити деци главу" силним формулама које треба памтити а не разумевати. Ако горе поменута упутства за решавање једначина служе само да се преко њих увежбава техника рачунања, онда није јасно зашто се на контролним испитима тражи од ђака да те формуле знају напамет. Уколико је стадијум учења виши (нпр. средња школа) утолико треба да је мањи број готових формула које се памте без разумевања.

5. Креативност. Супервизија градива.

Пријемни испити из Математике за упис на факултете, на којима се они траже, долазе после завршене средње школе. Пријемни за тај испит треба да је *супервизија* свега што је до тада научено из Математике. Синтеза целокупног знања, како у истој области, тако и између појединих математичких области, је од есенцијалне важности. Ово је једна од најважнијих карактеристика припрема за испит. То се није могло радити у току учења појединих разреда средње школе. На том нивоу долази до изражаја и *креативност*.

Пример. Дат је правоугли троугао чије су катете 3 и 4. Двема полуправима које полазе из темена правог угла, а које прав угао деле на три једнака дела, деле хипотенузу троугла на три дела. Израчунати дужину тих делова.

Овај се задатак може решавати планиметријски или тригонометријски или аналитички. Ученикова довитљивост или креативност ће одлучити коју ће методу искористити.

Пример. Решити неједначину

$$\frac{x^2-6x-7}{x^2+2x-8}>0.$$

Многи ће овде одмах потегнути анализу знака квадратног тринома, правити упоредне табеле, итд. А домишљати ће на брзину скицирати графике (параболе) бројиоца и имениоца горњег разломка па на *x*-оси прочитати интервале над којима се обе параболе налазе "изнад", односно обе параболе налазе "испод" *x*-осе.

Пример. Наћи једначине заједничких тангената елипсе $\mathrm{E}: gx^2+12y^2=108$ и хиперболе $\mathrm{H}: 9x^2-20y^2=180$.

Они кандидати који не памте тзв. *услове додира* неће ни покушати да реше овај задатак. А креативнији ће, и без поменутих услова, поступити на следећи начин: Нека је $P(x_e, y_e)$ једна додирна тачка на елипси и нека је $Q(x_h, y_h)$ једна додирна тачка на хиперболи. Тада имамо једначине

(*) $9x_e^2+12y_e^2=108$ и

(**) $9x_h^2-20y_h^2=180$.

Једначина тангенте на E у додирној тачки P гласи $t_e: 9x_e x+12y_e y=108$ а једначина тангенте у тачки Q на H је $t_h: 9x_h x-20y_h y=180$. Да би последње две једначине представљале исту праву (заједничку тангенту, $t_e \equiv t_h$), треба да важи продужена пропорција $\frac{9x_h}{9x_e}=\frac{-20y_h}{12y_e}=\frac{-180}{-108}\left(\frac{8}{3}\right)$. На основу овога и једначина из (*) и (**) лако се добијају додирне тачке P и Q. Тражене тангенте су праве које су одређене тачкама P и Q. Приметимо да је довољно израчунати једну заједничку тангенту јер се због симетрије могу (без рачунања) написати и једначине преосталих три. (Резултат $\pm 3x-2y\pm 12=0$).

6. Кориштење понуђених одговора на тесту

Некада су се на пријемном испиту писмени радови (тј. решења задатака) комисијски оцењивали. Сваки се задатак, зависно од тежине бодовао и на основу укупног збира правиле ранг-листе. Данас се примењује *тест-систем* испита. У сваком се задатку нуди известан број одговора од којих је један и само један тачан. Решења задатака се не гледају већ се само заокружени одговори узимају у обзир. Често има, чак и више задатака таквих за које се тачни одговори могу заокружити и без исцрпног решавања. То је веома важно, јер на испиту остаје више времена за решавање тежих задатака.

Пример. (ЕТФ, 2013. година). Ако је $f(x)=2x+|x|$ и $g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$, тада је $f(g(x))$ једнако:

$$(A)\frac{2}{3}x,\ (B)|x|,\ (C)-x,\ (D)x,\ (E)3x,\ (N)\ \text{Не знам.}$$

Ставимо $x=-2$ у g. Имаћемо $g(-2)=-2$ и

$$f\left(g(-2)\right)=2\cdot g(-2)+\left|g(-2)\right|=2\cdot(-2)+\left|-2\right|=-4+2=-2.$$

С друге стране ако у све одговоре ставимо $x=-2$ имаћемо

$$(A)-\frac{4}{3},\ (B)2,\ (C)2,\ (D)-2,\ (E)-6.$$

Очигледно треба заокружити одговор под D.

Пример. (ЕТФ, 2011. година). Ако је $x\in(-\infty,-2)$, онда је израз

$$\frac{\sqrt{x^2+4x+4}+5}{x^2-2x-3}$$

идентички једнак изразу:

$$(A)\frac{x^2+x}{x^3+1};\ (B)\frac{x^3+6x^2-7x+10}{(x-3)\left(x^3+1\right)};\ (C)-\frac{x^2+x}{x^3+1};\ (D)\frac{x^3+6x^2-5x+4}{(x-3)\left(x^3+1\right)};\ (E)-\frac{x^2-x}{x^3+1};$$

(N) Не знам.

Можемо ставити $x=-3$. Задати израз у овој тачки износи $\frac{6}{13}$. Уврштавањем $x=-3$ у понуђене одговоре увидећемо да само одговор (E) има вредност $\frac{6}{13}$. Према томе одговор E треба заокружити.

Пример. Израз

$$M=\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right),$$

$$(a,b,c>0),$$

еквивалентан је са:

$$(A)a^2+b^2+c^2;\ (B)\frac{a+b+c}{abc};\ (C);\ (D)\frac{3}{abc}.$$

Заокружити тачан одговор.

Узмимо да су a,b,c дужи. Дакле, узмимо да су димензије ових величина $\partial im a=\partial im b=\partial im c=1$. Тада можемо лако видети да су димензије задатог израза M и подељених одговора следеће:

$$\partial im M=0,\ \partial im A=2,\ \partial im B=-2,\ \partial im C=0,\ \partial im D=-3.$$

Закључујемо да је тачан одговор C.

Пример. Израз $P=\left[\frac{(a-b)^2}{ab}+3\right]\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\frac{a^3-b^3}{ab}$, $(ab\neq 0,\ a\neq b)$, једнак је једном и само једном од израза:

$$(A)a^2b-ab^2;\ (B)a-b;\ (C)b-a;\ (D)\frac{1}{a}-\frac{1}{b};\ (E)\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Заокружити тачан одговор.

Овде можемо тестирати све изразе, рецимо, у тачки $(a,b)=(1,2)$. Имаћемо

$$P(1,2)=\frac{3}{2};\ (A)-2;\ (B)-1;\ (C)1;\ (D)\frac{1}{2};\ (E)\frac{3}{2}.$$

Према томе, треба заокружити одговор E. Но, посматрајући задати израз P може нам пасти напамет да разменимо слова a и b. (То одговара упоређивања израза $P(a,b)$ и $P(b,a)$). Разменимо ли слова a и b израз у угластој загради остаје неизмењен (тј. инваријантан). Фактор пак $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$ промениће само свој знак. Делилац израза P такође мења само свој знак. Према томе цео израз P је инваријантан на размену слова a и b. Лако је видети да од свих понуђених одговора само је одговор E инваријантан на поменуту размену слова a и b. Следује опет закључак о заокруживању одговара под E.

Пример. (ЕТФ, 2014. године). Ако реални бројеви x и y задовољавају једнакост

$$\frac{2x+i}{y+i}=\frac{1+i\sin\alpha}{1-i\sin 3\alpha},\ \left(\alpha\neq k\pi,\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in \mathrm{Z},\ \mathrm{i}^2=-1,$$

тада је количник $\frac{z}{x}$ једнак:

$$(A)-4+2\cos 2\alpha;\ (B)4+2\cos 2\alpha;\ (C)2-4\cos 2\alpha;\ (D)-2-4\cos 2\alpha;$$
$$(E)2-2\sin 2\alpha;\ (N)\ \text{Не знам.}$$

Ставимо $\alpha=\frac{\pi}{6}$ у задату једнакост. Имаћемо

$$\frac{2x+i}{y+i}=\frac{1+\frac{1}{2}i}{1-i}\Rightarrow\frac{2x+i}{y+i}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}i\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\Rightarrow\frac{2x+i}{y+i}=\frac{1+3i}{4}\Rightarrow .$$
$$\Rightarrow 8x-y+3=i(3y-3).$$

Будући да су x и y реални, одавде следује $8x-y+3=0\wedge 3y-3=0$. Према томе је $y=1,\ x=-\frac{1}{4},$ одакле следује $\frac{y}{x}=-4$. С друге стране, уврштавањем $\alpha=\frac{\pi}{6}$ у све понуђене одговоре имаћемо:

$$(A)-3;\ (B)5;\ (C)0;\ (D)-4;\ (E)2-\sqrt{3}.$$

Дакле одговор D треба заокружити.

Поступци који се појављују у горњим примерима омогућавају нам да заокружимо тачан одговор *ако и само ако* се у задатку тврди да је један и само један од понуђениих одговора тачан. Тај тачан одговор ми налазимо на индиректан начин тако што одбацујемо све понуђене одговоре осим једног. Јер ако релација $P(x)=A(x)$, где је P задати израз а A понуђени одговор, треба да буде идентитет на скупу D, ако ми за неки $x_0 \in D$ имамо $P(x_0) \neq A(x_0)$, онда одговор A не ваља. Треба бити опрезан са применом заокруживања одговора на основу горе описаног начина "решавања" задатака. Овакви поступци су могући само на испитима где се примењују тест-методе и нигде више.

Предлагачи испитних задатака настоје да својим колекцијама задатака обухвате што већи део градива - како би кандидати показали да познају целокупну материју. Горњи поступци показују да то не мора бити случај. Компјутеризација је довела до примене тест методе. Тиме се омогућује формирање ранг листе кандидата за најкраће могуће време. Али да ли се тако најкомплетније оцењују кандидати велико је питање. Уосталом, о томе се некада много полемисало али о томе нећемо овде говорити.

У овом чланку говоримо о пријемним испитима из Математике. Но, карактеристике које смо изнели могу се односити и на све остале наставне предмете (осим уметности). Горњи примери узети су из тротомне монографије под насловом „Креативни преглед елементарне математике“ ([4]), коју је аутор овог чланка објавио. Ова монографија бави се на исцрпан начин проблематиком припрема за пријемни испит из математике за упис на факултет. Монографија је настала на основу ауторових предавања које је држао у агенцији "Дезире" у Београду.

Са 26 викендних двочаса требало је обновити градиво које су ученици изучавали током чеверогодишњег редовног школовања. То градиво требало је синтетизовати и операционализовати да би се оно могло искористити у датом тренутку на пријемном испиту. Излагања је требало прилагодити како онима који више знају тако и оним слабијима. Анализирање и решавање тестова са ранијих пријемних испита је такође важан део посла. Ни један од тих циљева није био остварљив на класичан начин који се практикује у редовној настави. У горе поменутој монографији смо стога разрадили једну нову методологију припремања пријемних испита. Из карактеристика о којима смо говорили у почетку овог чланка као и примера које смо тамо навели, већ се делимично види о каквој је методологији реч. Суштину те методологије изложили смо у горе поменутој монографији. Пошли смо од чињенице да су читаоци већ завршили средњу школу и да су одговарајуће градиво већ учили. Но, будући да су та њихова знања често непотпуна, неуједначена па и вербална, то је наша монографија сачињена тако да може послужити и као уџбеник и као репетиторијум. Монографију чине три књиге (три тома): 1. *Елементи математичке логике и Алгебра*; 2. *Планиметрија и Тригонометрија*; 3. *Стереометрија и Аналитичка геометрија*.

У Алгебри смо показали како се алгоритам дељења полинома могу надоместити многе готове формуле (при сређивању алгебарских израза). Надаље, осветлили смо улогу двеју међусобно супростављених трансформација:

1. сажимање вишечалних израза у једночлани (или израза са више чланова у израз са мање чланова);

2. разлагање једночланог израза у вишечлани (или развијање израза са мање у израз са више чланова). На пример, формула $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ако се ова формула чита са лева удесно, онда се једночлани израз трансформише у вишечлани. Обрнуто, ако се формула чита зесна на лево, онда се вишечлани израз трансформише у једночлани. Код сређивања алгебарских израза скоро увек се ради о ова два супротна процеса.

За анализу знака квадратног тринома, или положаја корена квадратне једначине или решавање квадратне неједначине - свуда у тим пословима препоручујемо да при формулацији правила за рад користимо, график квадратне параболе.

Слично, код решавања експоненцијалних или логаритамских неједначина, графици тих функција дају најјаснију инспирацију за формулацију правила за рад.

Тригонометрија обилује највећим мноштвом нових појмова, дефиниција, формула и релација. Та област је ученицима и најзамршенија. Таквој ситуацији у многоме доприносе и наставници који се не труде да градиво систематизују. Један је ученик у својој књизи ("Логасритамске таблице", у којој је одштампана и збирка формула из средњошколске математике) написао оловком на последњој страници 32 формуле *за редукцију на први квадрант*. То су наиме формуле за функције $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ углова $90^\circ \pm \alpha^\circ$, $180^\circ \pm \alpha^\circ$, $270^\circ \pm \alpha^\circ$, $360^\circ \pm \alpha^\circ$ (одн. $0^\circ \pm \alpha^\circ$). Катастрофа! У нашој монографији (Том 2, страница 185.) дато је једно једино практично упутство које замењује све ове формуле.

Слична је ситуација и са формулама *за изражавање (и израчунавање) тригонометријских функција преко једне од њих*. Традиционално радимо са четири основне функције: $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$. Да се изразе било које три преко четврте, и то зависно од квадранта, имамо укупно 48 формула. Виђали смо да и ове формуле исписују ученици по својим свескама и књигама. Штавише, сретали смо их и у неким уџбеницима где се штампају као готове формуле. За све ове формуле ми смо у нашој монографији (Том 2. страница 171.) дали једно практично упутство како се било која од тих формула добија. Стога не би требало да се оптерећујемо издвајањем или праћењем истих.

У колекцији тзв. *адиционих формула* (има их укупно 8), довољно је памтити само две. Наиме ако знамо готове формуле за $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$, стављањем $-\beta$ уместо β у тим формулама добићемо одмах готове формуле и за $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$.

Користећи пак ове формуле можемо лако елаборирати готове формуле за $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)$ и $\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)$.

Готове формуле за *двоструке углове* добијамо на једноставан начин изједначавањем $\beta=\alpha$ у адиционим формулама.

Такозване формуле за *полууглове* изводимо применом формула за двоструке углове - кад ове применимо на угао $2\cdot\frac{\alpha}{2}$.

Настављајући тако, ми у нашој монографији настојимо да се "снађемо" како да стигнемо до формула које су нам у датом тренутку потребне. Нагласимо овде да ми нисмо против готових формула (ако се оне знају напамет). Али сматрамо да решаватељ задатка не треба да бежи од задатка за чије решавање не зна, или није сигуран у потребне готове формуле.

Репродуковање генезе формула утврђује познавање истих. Оне се онда лакше и упамте. Али се на тај начин зна смисао готове формуле. У том случају ученик је креативан. А ако ученик само користи готову формулу, за коју не зна смисао, онда је он пасивни актер. Формуле се најлакше запамћују кад се служимо са њима и кад им знамо смисао. Узимање готових формула из каталога је крајња пасивност у учењу.

И у нашем даљем излагању Тригонометрије настојали смо да нам поред готових формула буде блиско и њихово извођење а да нам рачунања буду креативна.

И у Аналитичкој геометрији налазили смо практична решења задатака. Та решења се разликују од традиционалних начина. Али су наши поступци природнији и мање захтевни у погледу познавања готових формула. Два примера смо већ навели раније. Сада ћемо указати на још неке.

Када је реч о правој линији, традиционално је уобичајено да се користи њена једначина у *експлицитном облику* $y=kx+n$. Обично су по књигама и готове формуле за *додир прве линије и криве другог реда* написане у односу на ту једначину. Но, знамо да има правих линија које немају једначину овог облика (то су вертикалне праве). Према томе и поменути услови додира на обухватају случајеве вертикалних прави. У нашој књизи, [4] (Том 3, Страница 130, 149, 164.) указали смо и на такву појаву у задацима. Указали смо и на могућност коришћења једначине праве у *експлицитном облику по* x: $x=k'y+m$ (Том 3, Странице 128, 149.). Једначине овог облика немају хоризонталне праве.

Коришћење једначине праве у *општем облику* је често захвалније од коришћења у експлицитном облику. Ово се заснива на чињеници да се односи двеју правих, као што су *паралелност, поклапање, нормалност*, изражавају на једноставан начин у виду пропорција одговарајућих коефицијената у једначинама општег облика. Такав смо један пример већ навели раније у овом чланку. Сада ћемо навести један пример у коме ћемо илустровати како се може избећи мањкавост експлицитног облика једначине праве.

Пример. Одредити једначине тангената повучених из тачке $P(5,2)$ на кружницу $\mathcal{K}: x^2+y^2=25$.

Ако права $p: Ax+By+C=0,\ \left(A^2+B^2\neq 0\right)$, пролази кроз тачку $P(5,2)$, онда је $A\cdot 5+B\cdot 2+C=0$, те одузимањем ових једнакости имамо $A(x-5)+B(y-2)=0$. Написаћемо стога праву p у облику

$$p: Ax+By-(5A+2B)=0.$$

С друге стране једначина тангенте круга $\mathcal{K}$ у додирној тачки $T(x_0,y_0)$ гласи $t: x_0x+y_0y-25=0$. Да би се праве p и t поклопиле треба да важи пропорција

$$\frac{A}{x_0}=\frac{B}{y_0}=\frac{5A+2B}{25}.$$

Одавде следује $x_0=\dfrac{25A}{5A+2B},\ y_0=\dfrac{25B}{5A+2B}$. Уврштавањем ових вредности у једначину круга $\mathcal{K}$ и сређивањем добијамо

$$B(21B-20A)=0.$$

Решење ове једначине (по B) су: $B=0\vee B=\dfrac{20}{21}A$. Уврштавањем ових вредности у p добићемо једначине тражених тангената: $t_1:\ x=5,\ t_2: 21x+20y-145=0$.

Коришћењем пропорција које изражавају односе правих линија могу се елегантно решавати разноврсни задаци о правама.

Једначине тангенте кривих линија другог реда (у тачки криве) исписују се на једноставан начин испирушући се једначинама тих кривих ([4]). Колосално је да се један и само један алгоритам примењује за тангенте свих врста кривих другог реда.

На бази ова два феномена може се формирати једна метода за решавање најразличитијих задатака о тангентама (и нормалама) кривих линија другог реда. Метода је карактеристична по томе што не захтева познавање тзв. *услова за додир* праве и криве. Ово је значајно и због тога што поменути услови нису јединствени већ се разликују за сваку врсту криве другог реда. Овој смо методи посветили значајну пажњу у нашој монографији.

Напоменимо још да смо у нашој књизи *аналитику елипсе и хиперболе* изложили паралелно на упоредни начин. С обзиром да се то градиво у редовном школовању учи кад су умне способности ученика већ довољно развијене, такав компаративан приступ је могућ. На тај начин се најбоље уочавају геометријске особине тих кривих и запамћују импликације тих особина на једначине кривих.

Генерално говорећи, кроз све три књиге наше монографије провејава настојање да се градиво систематизује, да се добро повеже и разуме. На тај начин се операционализује рад са мањим бројем готових формула. Градиво се савлађује са мањим бројем задатака. У нашим школама круже Збирке задатака које садрже хиљаде задатака. Једна Збирка задатака за шести разред основне школе ([2]) има тачно 890 задатака (који личе као "јаје на јаје"). Томе треба још додати и задатке из уџбеника, те задатке из "Радне свеске", из "Збирке+" из збирке "Тежи задаци", итд. Пише се по пет-шест књига и збирки задатака - све за исти разред. Збирке задатака за све разреде средње школе (рецимо аутора Венеа Богославова, [3]) садрже укупно 5854 задатка као и 140 задатака са пријемних испита из прошлости. *Ученике не уче да мисле већ да колосалним бројем задатака буду дресирани*. Зато касније у животу врло мало остаје као трајно знање.

У нашој монографији посебну смо пажњу посвећивали тзв. *приступу задатка*. Та анализа открива како природу тако и методологију за решавање. Често смо указивали и на занимљивости, досетке и *мнемотехнике* како би се лакше досетили поступака или формула. У том смислу, карактеристично је прављење скице за решавање конструктивних задатака. Са импровизоване скице увиђа се стратегија за извођење конструкције. Ни у једној збирци задатака нисмо видели такву методологију. Стога, решења конструктивних задатака, која су у тим књигама дата, скоро да су неупотребљива јер се решаватељима не указује на идеју.

Више деценија учествовао сам, као наставник у организовању пријемних испита. Истраживао сам у резултатима кандидата њихова знања и незнања. Као изазов на то дошла је инспирација за писање поменуте монографије. Више од 20 година држао сам припремне курсеве у агенцији „Десире“. Касније ми се придружио колега проф. Милорад Бељић и наставио да предаје. У овој агенцији смо проверавали и усавршавали нашу методу. Повратне информације које агенција практикује сваке године после одржаних испита на факултетима, показују да је већина наших курсиста успела да упише жељени факултет. То је показатељ да је наша метода врло успешна. Позитивно мишљење о монографији дали су еминентни стручњаци - добри познаваоци Математике и проблематике нашег школства.

Литература

[1] М. С. Јовановић и Д. Ђ. Тошић: *Збирка решених задатака и проблема из математике*, Завод за уџбенике, Београд 2010.

[2] В. Стојановић: *Математика, Збирка задатака за шести разред основне школе*, Математископ, Београд 2014.

[3] В. Т. Богославов: *Збирка решених задатака из математике* (том 1, 2, 3, 4), Завод за уџбенике, Београд (више издања 1989-2009).

[4] И. Б. Лазаревић: *Креативни преглед елементарне математике*, Глас Србије, Краљево 2017.