MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIII (4)(2017), 237-240 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

DOI: 10.7251/MK1704237M

O JEDNOJ ALGEBARSKOJ NEJEDNAKOSTI

Dragoljub Milošević

Sažetak: U ovom radu su data još tri dokaza jedne nejednakosti iz [1].

Ključne riječi: nejednakost, ekvivalentno, aritmetičko-geometrijska nejednakost, uopštenje.

ABOUT ONE ALGEBRAIC INEQUALITY

Abstract: In this paper yet three proofs are given for an inequality in [1].

Key words: inequality, equivalent, arithmetic-geometric inequality, generalization.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 50
ZDM Subject Classification (2010): F 50, N 50

U [1] je dat jedan dokaz nejednakosti za pozitivne brojeve a, b, c:

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3} \geq \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}. \qquad (1)$$

Dajemo još tri dokaza ove nejednakosti, a zatim i jedno njeno uopštenje (generalizaciju).

Dokaz 1. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za pozitivne brojeve možemo pisati

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{a}{b}}=2\frac{a^2}{b^2}.$$

Na sličan način dobijamo

$$\frac{b^3}{c^3}+\frac{b}{c} \geq 2\frac{b^2}{c^2} \text{ i } \frac{c^3}{a^3}+\frac{c}{a} \geq 2\frac{c^2}{a^2}.$$

Sabiranjem prethodne tri nejednakosti imamo

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right). \qquad (2)$$

Ako stavimo $\frac{a}{b}=x, \frac{b}{c}=y$ i $\frac{c}{a}=z$, dobijamo jednakost

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)= x^2+y^2+z^2-(x+y+z).$$

Kako je tačna nejednakost

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$$

ekvivalentna sa

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 ,$$

imamo

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)\cdot 3\sqrt[3]{xyz} .$$

Odavde, zbog $xyz=1$, proizlazi $x^2+y^2+z^2 \geq x+y+z$, tj.

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}. \qquad (3)$$

Sada, iz nejednakosti (2) i (3) sledi tražena nejednakost (1).

Dokaz 2. S obzirom da je tačna nejednakost $(x-y)^2(x+y)\geq 0$, za $x,y>0$, ekvivalentna sa $x^3+y^3-xy(x+y)\geq 0$, imamo

$$\frac{a^3+b^3-ab(a+b)}{b^3} \geq 0 .$$

Ova nejednakost je ekvivalentna sa

$$\frac{a^3}{b^3} \geq \frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}-1.$$

Slično dobijamo

$$\frac{b^3}{c^3} \geq \frac{b^2}{c^2}+\frac{b}{c}-1 \text{ i } \frac{c^3}{a^3} \geq \frac{c^2}{a^2}+\frac{c}{a}-1.$$

Posle sabiranja poslednje tri nejednakosti imamo

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3} \geq \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3 . \qquad (4)$$

Kako je

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} = 3,$$

iz (4) proizlazi (1).

Dokaz 3. U [2], na str. 100, je dokazana sledeća nejednakost za pozitivne brojeve x, y, z:

$$3(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^3. \tag{5}$$

Nejednakost (5) je ekvivalentna sa

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq (x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)}\,. \tag{6}$$

Ako u (6) stavimo $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ i $= \frac{c}{a}$, imamo

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq (\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2})\sqrt{\frac{1}{3}(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2})}\,.$$

Otuda, zbog

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}}$$
$$= 3,$$

sledi

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq (\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}) \cdot 1,$$

tj. (1).

Sada dajemo dokaz uopštenja nejednakosti (1):

$$\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} + \frac{b^{n+1}}{c^{n+1}} + \frac{c^{n+1}}{a^{n+1}} \geq \frac{a^n}{b^n} + \frac{b^n}{c^n} + \frac{c^n}{a^n}\,, \tag{7}$$

gde su a, b, c pozitivni brojevi i n prirodan broj.

Dokaz. Na osnovu aritmetičko-geometrijske nejednakosti za $n + 1$ članova, imamo

$$\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} + \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} + \cdots + \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} + 1 \geq (n+1)\sqrt[n+1]{(\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}})^n \cdot 1} = (n+1)\,\frac{a^n}{b^n}\,,$$

$$\frac{b^{n+1}}{c^{n+1}} + \frac{b^{n+1}}{c^{n+1}} + \cdots + \frac{b^{n+1}}{c^{n+1}} + 1 \geq (n+1)\,\frac{b^n}{c^n} \text{ i } \frac{c^{n+1}}{a^{n+1}} + \frac{c^{n+1}}{a^{n+1}} + \cdots + \frac{c^{n+1}}{a^{n+1}} + 1 \geq (n+1)\,\frac{c^n}{a^n}\,.$$

Saberemo li ove tri nejednakosti dobijamo

$$n\left(\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} + \frac{b^{n+1}}{c^{n+1}} + \frac{c^{n+1}n+1}{a^{n+1}}\right) + 3 \geq (n+1)(\frac{a^n}{b^n} + \frac{b^n}{c^n} + \frac{c^n}{a^n})$$
$$= n\left(\frac{a^n}{b^n} + \frac{b^n}{c^n} + \frac{c^n}{a^n}\right) + (\frac{a^n}{b^n} + \frac{b^n}{c^n} + \frac{c^n}{a^n})$$

$$\geq n\left(\frac{a^n}{b^n}+\frac{b^n}{c^n}+\frac{c^n}{a^n}\right)+3\sqrt[3]{\frac{a^n}{b^n}\cdot\frac{b^n}{c^n}\cdot\frac{c^n}{a^n}}$$
$$=n\left(\frac{a^n}{b^n}+\frac{b^n}{c^n}+\frac{c^n}{a^n}\right)+3,$$

a odavde sledi tražena nejednakost (7).

Napomena 1. a) Specijalno, za $n=2$, iz (7) proizlazi nejednakost (1).
b) Za $n=1$ dobijamo nejednakost (3).

Napomena 2. Na sličan način možemo dokazati uopštenja nejednakosti (4) i (6) iz [1]:

$$\frac{a^{2n+1}}{b^{2n}}+\frac{b^{2n+1}}{c^{2n}}+\frac{c^{2n+1}}{a^{2n}}\geq\frac{a^{n+1}}{b^{n}}+\frac{b^{n+1}}{c^{n}}+\frac{c^{n+1}}{a^{n}}$$

i

$$\frac{a^{n+1}}{b^{n-1}}+\frac{b^{n+1}}{c^{n-1}}+\frac{c^{n+1}}{a^{n-1}}\geq ab+bc+ca\,.$$

Takođe, mogu se lako dokazati i uopštenja nejednakosti iz zadataka 104 i 107 u [2]:

$$\frac{a^{2n+1}}{b^{2n}}+\frac{b^{2n+1}}{c^{2n}}+\frac{c^{2n+1}}{a^{2n}}\geq a+b+c$$

i

$$\frac{a^{2n+1}}{b^{2n-1}}+\frac{b^{2n+1}}{c^{2n-1}}+\frac{c^{2n+1}}{a^{2n-1}}\geq a^2+b^2+c^2\,.$$

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić: Zanimljive primjene nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja, *MAT-KOL (Banja Luka)*; XXIII (4) (2017), 217 – 227.

[2] Z. Cvetkovski: *Inequalities – Theorems, Techniques and Selected Problems,* Springer – Verlag, Heidelberg/Dordrecht/London/New York, 2012.