MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIII (3)(2017), 149-164 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1703149S

Konačne sume s binomnim koeficijentima

Petar Svirčević

Zagreb, Hrvatska
e-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr

Sažetak. *U ovome članku polazimo od binomnog poučka, i izvodimo različite konačne sume, i dvije beskonačne, koje sadrže binomne koeficijente. Izveli smo kako se nalazi kardinalni broj od partitivnog skupa, i dali smo jednu primjenu. Nadalje smo napomenuli, da se neke jednakosti mogu elegantno dokazati i matematičkom indukcijom. U nekim zadacima smo upotrijebili i elementarno gradivo o derivacijama i neodređenim integralima, koje se obrađuje u matematičkoj analizi, i za očekivati je, da to gradivo može pratiti širi krug čitalaca. Našli smo npr. ove sume:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2,\ \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j},\ \sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^j\binom{2k-1}{j}^r,\ \sum_{j=0}^{n}\binom{k+j}{k},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)\dots(k+m)}\binom{n}{k},\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(2k-1)^2\binom{2n-1}{2k-1},\ \sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}\cos k\varphi,\dots$$

Ključne riječi. *Konačne sume, binomni koeficijenti.*

The Final Sums of the Binomial Coefficients

Abstract. *In this article we start from the binomial theorem, and perform a variety of finite sums, and two endless, containing binomial coefficients. We performed as is the cardinal number of partitiv set, and we gave one application. Furthermore, we note that some equality can prove sleek and mathematical induction. In some tasks we used the elementary material on derivatives and indefinite integral, which is treated in mathematical analysis, and it is expected that this material can read a wider range of readers. We found eg. this amount sums:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2,\ \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j},\ \sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^j\binom{2k-1}{j}^r,\ \sum_{j=0}^{n}\binom{k+j}{k},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)...(k+m)}\binom{n}{k},\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(2k-1)^2\binom{2n-1}{2k-1},\ \sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}\cos k\varphi,...$$

Keywords. *The final sum, binomial coefficients.*

Osnovna formula od koje polazimo je binomni poučak

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n}a^0b^n, \tag{1}$$

odnosno

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0-\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}a^0b^n, \tag{2}$$

koji se može dokazati i matematičkom indukcijom.

Ako u (1) uvrstimo $a=b=1$ slijedi

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n, \tag{3}$$

a iz (2) slijedi

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}=0. \tag{4}$$

Sada ćemo dati jednu primjenu formule (3).

Zadatak 1. Neka je zadan konačni skup $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Dakle broj njegovih elemenata, tj. njegov kardinalni broj, je $kA=n.$ Skupu A pripada partitivni skup $\mathscr{P}(A)$, koji se sastoji od elemenata koji su svi mogući podskupovi zadanog skupa uključujući prazan skup i sam zadani skup. Treba dokazati, da tako definirani skup ima kardinalni broj 2^n, tj. $k\mathscr{P}(A)=2^n$.

Rješenje Z1. Neka je ϕ prazan skup, pa je $\phi\subset A$ i $\phi\in\mathscr{P}(A)$. Dakle skup $\mathscr{P}(A)$ sadrži prazan skup, tj. njemu pripada broj $1=\binom{n}{0}$; broj jednočlanih skupova je $\binom{n}{1}$, broj dvočlanih skupova je $\binom{n}{2}, \ldots,$ broj (n-1)-članih je $\binom{n}{n-1}$, i jedan je sam skup A, tj. $1=\binom{n}{n}$. Ako sve te brojeve zbrojimo dobivamo (3), što je i trebalo dokazati.

□

Napomena 1. Uzmimo npr., da je jedna peteročlana obitelj pozvana na neku svečanost, s time da su moguće sve opcije s obzirom na to koliko će se članova obitelji odazvati pozivu. Dakle moguće je, da ne ide nitko ili čak svi članovi obitelji. Pita se na koliko načina može biti realiziran ovaj poziv? Svakako da je „en passant“ odgovor $2^5=32$, jer smo uvažili Z1. Jasno je da, kada bi se poziv odnosio na razred koji ima 20 učenika, tada bi broj mogućih odziva iznosio $2^{20}=1\,048\,576$.

Nadalje ćemo probleme iskazivati samo pomoću formula, i onda iste dokazivati ili dati uputu za dokaz, a svrha toga je racionalizacija zapisa.

Zadatak 2.

$$a)\ \binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\ldots+\binom{2n}{2n}=2^{2n-1}. \tag{5}$$

$$b)\ \binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}=2^{2n-1}. \tag{6}$$

Rješenje Z2. Ako u (3) i (4) n zamijenimo s $2n$, onda te identitete zbrojimo, odnosno od prvog oduzmemo drugi, tada dobivamo (5) i (6).

□

Zadatak 3.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\right)=3^n.$$

Uputa za rješenje Z3. Polazimo od

$$3^n=\left(1+\left(1+1\right)\right)^n=\binom{n}{0}(1+1)^0+\binom{n}{1}(1+1)^1+\ldots+\binom{n}{n}(1+1)^n=\ldots$$

□

Zadatak 4. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\right)=(-1)^n.$

Uputa za rješenje Z4. Polazimo od

$$(-1)^n=\left(1-(1+1)\right)^n=\binom{n}{0}(1+1)^0-\binom{n}{1}(1+1)^1+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}(1+1)^n=\ldots$$

□

Zadatak 5.

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}=2^{n+1}-1,$$

gdje je po definiciji

$$\binom{m}{0}=1,\ za\ m=0,1,2,\ldots \tag{7}$$

Rješenje Z5. Ako jednakosti

$$\binom{0}{0}=1=2^0,\ \binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2^1,$$

$$\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=2^2,\ldots,$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

zbrojimo, tada je zbroj ovih lijevih strana upravo lijeva strana od (7), a zbroj desnih strana je geometrijski red $2^0+2^1+2^2+...+2^n=1\cdot\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=2^{n+1}-1,$ dakle suma (9) je točna.

□

Zadatak 6.

$$\sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^j\binom{2k-1}{j}^r=0, \tag{8}$$

gdje $n=2k-1\in\mathbb{N}$ i $r\in\mathbb{R}$.

Rješenje Z6. Iz relacije (4) slijedi, da je broj sumanada paran ako je *n* neparan, dakle $n=2k-1.$ Sada su sumandi antisimetrični od krajeva prema sredini, tj. prvi član je suprotnog predznaka od zadnjeg člana, drugi je suprotnog predznaka od predzadnjeg člana,...; a to znači, ako i svaki član potenciramo realnim brojem *r* ne dirajući predznak, slijedi (8).

□

Zadatak 7.

$$\binom{n}{0}3^{2n-1}+\binom{n}{1}3^{2n-3}+\binom{n}{2}3^{2n-5}+...+\binom{n}{n-1}3=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9}-1\right);\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Uputa za dokaz Z7. Najprije dokažimo, da je

$$\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9=\left(\frac{2\cdot10^n+1}{3}\right)^2;\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Odatle slijedi, da je

$$\sqrt{\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9}=2\left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}3^{2(n-k)-1}\right]+1;\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Dakle (9) je točno. Iz te relacije slijedi algoritam

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9}-1\right)=\underbrace{33...\,3}_{n}.$$

Npr.

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\underbrace{44444}_{5}\underbrace{8888}_{4}9}-1\right)=\underbrace{33333}_{5}.$$

Za očekivati je, da npr. do rezultata

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\underbrace{444\ \ldots\ 44}_{10^{10^{1\,000\,000}}}\underbrace{888\ \ldots\ 88}_{10^{10^{1\,000\,000}}-1}9}-1\right)=\underbrace{333\ldots\,33}_{10^{10^{1\,000\,000}}}$$

nijedno računalo ne može direktno doći, dakle mora se primijeniti teorijski dokaz.

□

Zadatak 8. $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$ (10)

Rješenje Z8. Jasno je

$$(x+1)^{2n}=\binom{2n}{0}x^{2n}+\binom{2n}{1}x^{2n-1}+\binom{2n}{2}x^{2n-2}+\ldots+\left[\binom{2n}{n}\right]x^n+\ldots+\binom{2n}{2n}x^0.$$

Uzmimo, da je

$$(x+1)^{2n}=(x+1)^n(x+1)^n=$$

$$=\left[\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}x^0\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\binom{n}{0}x^0+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n\right]=$$

(sada pomnožimo članove koji su na „istoj vertikali“, i izlučimo potenciju x^n)

$$=\ldots+[\ldots]x^{n+1}+\left[\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2\right]x^n+[\ldots]x^{n-1}+\ldots$$

Ako primjenimo teorem, da su dva polinoma međusobno identična onda i samo onda, ako su međusobno jednaki koeficijenti uz iste potencije, tada dobivamo (10).

□

Zadatak 9.

a) $$\sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}=2^{2n-1}-\frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

b) $$\sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n}(-1)^{i+j+1}\binom{n}{i}\binom{n}{j}=\frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

Uputa za rješenje Z9. *a*),*b*). Kvadriramo (3), odnosno (4), i uvažimo (10).

□

Zadatak 10.

$$\binom{2n}{0}^2-\binom{2n}{1}^2+\binom{2n}{2}^2-\ldots+\binom{2n}{2n}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}. \tag{11}$$

Rješenje Z10. Da dokažemo (11) polazimo od identiteta

$$(a^2-b^2)^{2n}=(a-b)^{2n}(b+a)^{2n}. \tag{12}$$

Desnu stranu od (12) može se pisati u obliku

$$\left[\binom{2n}{0}a^{2n}b^0-\binom{2n}{1}a^{2n-1}b^1+\binom{2n}{2}a^{2n-2}b^2-\ldots+\binom{2n}{2n}a^0b^{2n}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\binom{2n}{0}b^{2n}a^0+\binom{2n}{1}b^{2n-1}a^1+\binom{2n}{2}b^{2n-2}a^2+\ldots+\binom{2n}{2n}b^0a^{2n}\right]. \tag{13}$$

Jasno je, da se članovi oblika $a^{2n}b^{2n}$ dobivaju ako u (13) izmnožimo međusobno članove jedne ispod drugih, dakle članove „po stupcima“, tada dobijemo alternirani zbroj. Dakle, koeficijent od $a^{2n}b^{2n}$ je lijeva strana od (11). Nadalje, ako razvijemo lijevu stranu od (12) pojavljuje se član

$$(-1)^n\binom{2n}{n}(a^2)^n(b^2)^n=(-1)^n\binom{2n}{n}a^{2n}b^{2n}.$$

Vidimo, da je koeficijent od člana $a^{2n}b^{2n}$ ustvari desna strana od (11), pa je time ta formula dokazana.

□

Zadatak 11.

$$a)\quad \binom{2n}{0}^2+\binom{2n}{2}^2+\binom{2n}{4}^2+\ldots+\binom{2n}{2n}^2=\frac{1}{2}\left[\binom{4n}{2n}+(-1)^n\binom{2n}{n}\right]. \tag{14}$$

$$b)\quad \binom{2n}{1}^2+\binom{2n}{3}^2+\binom{2n}{5}^2+\ldots+\binom{2n}{2n-1}^2=\frac{1}{2}\left[\binom{4n}{2n}-(-1)^n\binom{2n}{n}\right]. \tag{15}$$

Uputa za rješenje Z11. *a*), *b*). Ako u (10) n zamjenimo s $2n$, i ako sada toj jednakosti dodamo (11), tada nakon sređivanja slijedi (14). Analogno dobivamo (15), samo sada od (11) oduzmemo (14).

□

Zadatak 12.

$$\binom{2n}{0}^3-\binom{2n}{1}^3+\binom{2n}{2}^3-\ldots+\binom{2n}{2n}^3=(-1)^n\frac{(3n)!}{(n!)^3}. \tag{16}$$

Komentar Z12. Provjerimo (16) za $n=1,2,\ldots;$

$$\binom{2}{0}^3-\binom{2}{1}^3+\binom{2}{2}^3=(-1)^1\frac{3!}{(1!)^3}=-6,$$

$$\binom{4}{0}^3-\binom{4}{1}^3+\binom{4}{2}^3-\binom{4}{3}^3+\binom{4}{4}^3=(-1)^2\frac{6!}{(2!)^3}=90,\ldots;$$

što je točno ...

Opći dokaz ove formule je dao engleski matematičar *Dixon* (A.C. Dixon, 1865-1936). Taj dokaz je dosta kompliciran, iako je rezultat jednostavan ([1], strana 79).

□

Napomena 2. Svi ostali slučajevi sume potencija binomnih koeficijenata, kao i alternirajuće sume istih, su dosta velikog zapisa, osim (16).

Zadatak 13.

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{k+j}{k}=\binom{n+k+1}{k+1}. \tag{17}$$

Rješenje Z13. Služeći se svojstvima o sumi binomnih koeficijenata imamo:

$$\binom{k}{k}+\binom{k}{k+1}=\binom{k+1}{k+1},$$

$$\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}=\binom{k+2}{k+1},$$

$$\binom{k+2}{k}+\binom{k+2}{k+1}=\binom{k+3}{k+1},$$

$$\vdots$$

$$\binom{k+n}{k}+\binom{k+n}{k+1}=\binom{k+n+1}{k+1}.$$

Ako te jednakosti zbrojimo, tada vidimo, da se dokidaju drugi članovi lijevih strana s članovima desnih strana, osim zadnjega člana, tj. desnog člana u zadnjoj jednakosti, s time da smo uvažili da je drugi član lijeve strane prve jednakosti jednak nuli. Na osnovi iznesenog slijedi da je (17) točno.

□

Zadatak 14.

a) $$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{4n}{2k}=4^n\cos n\pi. \tag{18}$$

b) $$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\binom{4n}{2k-1}=4^n\sin n\pi. \tag{19}$$

Rješenje Z14. Polazimo od kompleksnog broja u *Gaussovom obliku*

$$z=1+i, \tag{20}$$

odnosno u *Cauchyevom obliku*

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right). \tag{21}$$

Iz (20) i (21), nakon potenciranja s $4n$ slijedi

$$\binom{4n}{0}i^0+\binom{4n}{1}i^1+\binom{4n}{2}i^2+\ldots+\binom{4n}{4n-1}i^{4n-1}+\binom{4n}{4n}i^{4n}=$$

$$=\left[\binom{4n}{0}-\binom{4n}{2}+\binom{4n}{4}-\ldots+\binom{4n}{4n}\right]+i\left[\binom{4n}{1}-\binom{4n}{3}+\binom{4n}{5}-\ldots-\binom{4n}{4n-1}\right]=$$

$$=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{4n}=4^n\left(\cos n\pi+i\sin n\pi\right).$$

Ako primjenimo teorem o jednakosti dvaju kompleksnih brojeva, tada dobivamo (18) i (19).

□

Napomena 3. Iz (18) i (19) slijedi

$$\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{4n}{2k}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\binom{4n}{2k-1}\right)^2=2^{4n}.$$

Zadatak 15.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{n-j}{k-j}\right]n^{n-k}=(n+2)^n. \tag{22}$$

Rješenje Z15.

$$(n+2)^n=\left[(n+1)+1\right]^n=$$

$$=\binom{n}{0}(n+1)^n+\binom{n}{1}(n+1)^{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}(n+1)^0=\binom{n}{0}\left[\binom{n}{0}n^n+\binom{n}{1}n^{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}n^0\right]+$$

$$=\binom{n}{1}\left[\binom{n-1}{0}n^{n-1}+\binom{n-1}{1}n^{n-2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}n^0\right]+$$

$$+\binom{n}{2}\left[\binom{n-2}{0}n^{n-2}+\binom{n-2}{1}n^{n-3}+\ldots+\binom{n-2}{n-2}n^0\right]+\ldots+$$

$$=\binom{n}{n-1}\left[\binom{n-(n-1)}{0}n^{n-(n-1)}+\binom{n-(n-1)}{1}n^{n-(n-1)}\right]+\binom{n}{n}\binom{n-n}{0}n^0=$$

$$=\binom{n}{0}\binom{n}{0}n^n+\binom{n}{1}\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n}{1}\right]n^{n-1}+\binom{n}{2}\left[\binom{n-2}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n}{2}\right]n^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\left[\binom{n-n}{0}\right]n^0,$$

a to je lijeva strana od (22).

□

Napomena 4. U sljedećim problemima koristit ćemo elementarno gradivo o derivacijama i integralima, koje se obrađuje u četvrtom razredu srednje škole, a iz mnemotehničkih razloga dajemo D1 i D2.

Definicija 1. Neka je

$$B_k(n)=\binom{n}{1}1^k+\binom{n}{2}2^k+\binom{n}{3}3^k+\ldots+\binom{n}{n}n^k.$$

Definicija 2. Neka je

$$\overline{B}_k(n)=\binom{n}{1}1^k-\binom{n}{2}2^k+\binom{n}{3}3^k-\ldots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}n^k.$$

Zadatak 16.

$$B_1(n)=\binom{n}{1}1+\binom{n}{2}2+\binom{n}{3}3+\ldots+\binom{n}{n}n=n\,2^{n-1}. \tag{23}$$

Rješenje Z16. Ako identitet

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

deriviramo po *x*, tada slijedi

$$\binom{n}{1}1 + \binom{n}{2}2x + \binom{n}{3}3x^2 + \ldots + \binom{n}{n}nx^{n-1} = n(1+x)^{n-1}, \qquad (24)$$

pa ako sada izvršimo specijalizaciju za $x=1$ slijedi (23).

□

Napomena 5. Iz (23) dobijemo

$$\binom{n}{0}n + \binom{n}{1}(n-1) + \binom{n}{2}(n-2) + \ldots + \binom{n}{n-1}1 = n2^{n-1}, \qquad (25)$$

ako koristimo svojstvo binomnih koeficijenata $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Zadatak 17.

$$B_2(n) = \binom{n}{1}1^2 + \binom{n}{2}2^2 + \binom{n}{3}3^2 + \ldots + \binom{n}{n}n^2 = n(n+1)2^{n-2}. \qquad (26)$$

Uputa za rješenje Z17. Ako obje strane (24) pomnožimo sa *x* i deriviramo, tada dobijemo (26) nakon specijalizacije za $x=1$.

□

Zadatak 18.

a) $B_3(n) = \binom{n}{1}1^3 + \binom{n}{2}2^3 + \binom{n}{3}3^3 + \ldots + \binom{n}{n}n^3 = n^2(n+3)2^{n-3}.$

b) $B_4(n) = \binom{n}{1}1^4 + \binom{n}{2}2^4 + \binom{n}{3}3^4 + \ldots + \binom{n}{n}n^4 = n(n+1)(n^2+5n-2)2^{n-4}.$

c) $B_5(n) = \binom{n}{1}1^5 + \binom{n}{2}2^5 + \binom{n}{3}3^5 + \ldots + \binom{n}{n}n^5 = n^2(n^3+10n^2+15n-10)2^{n-5}.$

Uputa za rješenje Z18. Postupak je sličan kao u prethodnom zadatku.
Provjerimo npr. $B_5(n)$ za $n=2$. Dakle

$$B_5(2) = \binom{2}{1}1^5 + \binom{2}{2}2^5 = 2 + 32 = 34$$

i

$$B_5(2) = 2^2\,(2^3 + 10\cdot 2^2 + 15\cdot 2 - 10)\,2^{2-5}. = 34,$$

a to smo i očekivali.

□

Zadatak 19.

$$\overline{B}_1(n) = \binom{n}{1}1 - \binom{n}{2}2 + \binom{n}{3}3 - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}n = 0;\ \ n > 1. \tag{27}$$

Rješenje Z19. Iz

$$(1-x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}x^n$$

nakon deriviranja slijedi

$$\binom{n}{1}1 - \binom{n}{2}2x + \binom{n}{3}3x^2 - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}nx^n = n\,(1-x)^{n-1}. \tag{28}$$

Nakon specijalizacije $n = x = 1$ iz (28) slijedi da je $1 = 0^0$, a posljedica toga neodređenog oblika je, da (27) ne vrijedi za $n = 1$.

□

Zadatak 20.

$$\overline{B}_k(n) = \binom{n}{1}1^k - \binom{n}{2}2^k + \binom{n}{3}3^k - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}n^k = 0;\ \ n > k. \tag{29}$$

Rješenje Z20. Ako promotrimo (28), tada zaključujemo da taj identitet moramo pomnožiti sa x i onda ga derivirati. Taj postupak počevši s (28) moramo napraviti još $(k-1)$ puta, da bi dobili oblik

$$\binom{n}{1}1^k - \binom{n}{2}2^k\,x + \binom{n}{3}3^k\,x^2 - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}n^k\,x^n. \tag{30}$$

Jasno je, da suma (30) sigurno sadrži član $(1-x)^{n-k}$, koji će nam generirati neodređeni oblik 0^0 za posebne vrijednosti ako je $x = 1$ i $n = k$, odnosno ta suma neće biti definirana za $x = 1$ i $n \le k$. No, suma (30) je jednaka 0, ako je $n > k$ i $x = 1$, jer sumandi nakon k deriviranja i množenja sa x sadrže faktore $(1-x)$. Dakle, formula (29) je u potpunosti dokazana.

Provjerimo (29) za $k = 4$ i $n = 5$. Budući je $n > k$, onda mora biti

$$\overline{B}_4(5) = \binom{5}{1}1^4 - \binom{5}{2}2^4 + \binom{5}{3}3^4 - \binom{5}{4}4^4 + \binom{5}{5}5^4 = 5 - 160 + 810 - 1280 + 625 = 0.$$

Ako je npr. $n = k = 3$, tada je

$$\overline{B}_3(3) = \binom{3}{1}1^3 - \binom{3}{2}2^3 + \binom{3}{3}3^3 = 3 - 24 + 27 = 6 \ne 0.$$

□

Napomena 6. U formuli (22) možemo izbaciti uvjet $n > k,$ pa bi se ona mogla ovako prikazati u eksplicitnom obliku;

$$\overline{B}_k(n+k) = \binom{n+k}{1}1^k - \binom{n+k}{2}2^k + \binom{n+k}{3}3^k - ... + (-1)^{n+k+1}\binom{n+k}{n+k}(n+k)^k = 0.$$

Zadatak 21. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$ (31)

Rješenje Z21. Ako identitet

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

neodređeno integriramo, onda dobivamo vezu

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0}x^1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1}x^2 + \frac{1}{3}\binom{n}{2}x^3 + ... + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}x^{n+1} = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} + C,$$

iz koje se dobije konstanta $C = \dfrac{1}{n+1}$ za $x = 0,$ pa identitet prima oblik

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0}x^1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1}x^2 + \frac{1}{3}\binom{n}{2}x^3 + ... + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}x^{n+1} = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

I konačno ako u (25) uvrstimo $x = 1$ dobivamo (31).

□

Zadatak 22.

a) $$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{0!(n+1)}. \quad (32)$$

b) $$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+2} = \frac{1}{1!(n+2)}. \quad (33)$$

c) $$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)(k+3)}\binom{n}{k} = \frac{1}{2(n+3)} = \frac{1}{2!(n+3)}. \quad (34)$$

d) Generalizacija;

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)\cdot ... \cdot(k+m)}\binom{n}{k} = \frac{1}{(m-1)!(n+m)},$$

gdje je $m = 1,2,3,\ldots$

Uputa za rješenje Z22. Polazimo od identiteta

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n=(1-x)^n.$$

Analognim postupkom kao u Z21 dobivamo (32), (33), (34),... i matematičkom indukcijom bi mogli doći do općeg slučaja *d*).

Provjerimo (32) za $n=3$;

$$\frac{1}{1}\binom{3}{0}-\frac{1}{2}\binom{3}{1}+\frac{1}{3}\binom{3}{2}-\frac{1}{4}\binom{3}{3}=1-\frac{3}{2}+1-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}=\frac{1}{3+1}.$$

□

Zadatak 23.

$$a)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos k\varphi=2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\cos\frac{n\varphi}{2}.$$

$$b)\ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sin k\varphi=2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\sin\frac{n\varphi}{2}.$$

Uputa za rješenje Z23. *a*), *b*). Neka je $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ kompleksni broj. Dakle $|z|=1.$ Iz jednakosti

$$(1+z)^n=(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2}\right)$$

i iz jednakosti

$$(1+z)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)$$

slijede dani identiteti.

□

Zadatak 24.

$$a)\quad \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\sin k\varphi=n2^{n-1}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{n-1}\sin\frac{n+1}{2}\varphi.$$

$$b)\quad \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\cos k\varphi=n2^{n-1}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{n-1}\cos\frac{n+1}{2}\varphi. \qquad (35)$$

Uputa za rješenje Z24. *a*), *b*). Ako deriviramo identitete Z23 a), b) po varijabli φ, tada dobivamo formule Z24 a), b).

□

Napomena 7. Ako bi u Z35 b) uvrstili $\varphi=0$, tada bi dobili (23).

Zadatak 25.

$$a)\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} \cos k\varphi = n2^{n-2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{n-2}\left(n\cos\frac{n+2}{2}\varphi + \cos\frac{n}{2}\varphi\right).$$

$$b)\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} \sin k\varphi = n2^{n-2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{n-2}\left(n\sin\frac{n+2}{2}\varphi + \sin\frac{n}{2}\varphi\right). \qquad (36)$$

Uputa za rješenje Z25. *a*), *b*). Ako deriviramo identitete Z24 a), b) po varijabli φ, tada dobivamo formule Z25 a), b).

□

Napomena 8. Vidimo, ako u Z25 a) uvrstimo $\varphi = 0$, tada dobivamo (26).

Zadatak 26.

$$a)\quad \int (\cos x)^n \cos nx\,dx = \frac{1}{2^{n+1}}\left(2x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k}\sin 2kx\right) + C. \qquad (37)$$

$$b)\quad \int (\cos x)^n \sin nx\,dx = -\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k}\cos 2kx + C. \qquad (38)$$

Uputa za rješenje Z26 *a*),*b*). Ako u Z23 identitete neodređeno integriramo i izvršimo supstituciju $\varphi = 2x$, tada dobivamo (37) i (38).

□

Zadatak 27. $$a)\quad \int (\cos x)^{n-1}\sin(n+1)x\,dx = -\frac{1}{n2^{n-2}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cos 2kx + C.$$

$$b)\quad \int (\cos x)^{n-1}\cos(n+1)x\,dx = \frac{1}{n2^{n-2}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sin 2kx + C,$$

Uputa za rješenje Z27.*a*), *b*). Rezultat slijedi iz Z24 ako φ zamjenimo s $2x$ i izvršimo neodređeno integriranje.

□

Zadatak 28.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(2k-1)^2\binom{2n-1}{2k-1} = (2n-1)2^{n-2}\left((2n-1)\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{2n+1}{4}\pi\right) + \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{2n-1}{4}\pi\right)\right). \qquad (39)$$

Uputa za rješenje Z28. Ako u formuli (36) n zamijenimo s $2n-1$ i supstituiramo $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tada dobivamo (39).

□

Napomena 9. Provjerimo (35) za $n=4.$ Dakle

$$1^2\binom{7}{1}-3^2\binom{7}{3}+5^2\binom{7}{5}-7^2\binom{7}{7}=168,$$

a desna strana od (35) je $7\cdot 4(7\cdot 1-1)=168,$ što smo i očekivali.

Napomena 10. Na kraju ćemo dati dva problema s beskonačnim redovima, gdje se pojavljuju binomni koeficijenti, ali ćemo koristiti ove dvije dobro poznate relacije iz matematičke analize:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots, \tag{40}$$

$$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \tag{41}$$

Zadatak 29. $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}\right)=\ln 2. \tag{42}$$

Rješenje Z29. Ako uvažimo (40), tada iz (32) dobivamo (42).

□

Zadatak 30.

$$\sum_{m=0}^{\infty}(n+m)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+m)}\binom{n}{k}=e=2{,}71828182\ldots \tag{43}$$

Rješenje Z30. Vidljivo je, da:

$$(32)\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}(n+1)\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{0!},$$

$$(33)\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}(n+2)\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}=\frac{1}{1!},$$

$$(34)\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}(n+3)\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)(k+3)}\binom{n}{k}=\frac{1}{2!},\ldots;$$

i kada te jednakosti zbrojimo dobivamo (41), a to znači da je (43) točno. Dakle, i broj e se može „izgraditi“ pomoću binomnih koeficijenata. Svakako, da ovo nije jedini način.

□

Napomena 10. Postoje i druge mogućnosti za prikaz ovih matematičkih konstanti (ln2, e,π, ...) pomoću binomnih koeficijenata. No, svi prikazi nisu pogodni za izračun istih.

I na kraju navedimo tri reda i njihove sume, do kojih nije jednostavno doći:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\binom{2n}{n}^{-1} n^{-1}2^{-n}=\frac{1}{3}\ln 2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}^{-1} n^{-1}=\frac{1}{9}\pi\sqrt{3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{3n}{n}^{-1} 2^{-n}=\frac{1}{250}(20-12\,ln\,2+11\,\pi);$$

a one sadrže ln2 i π.

Literatura:

[1] D. Blanuša: *Viša matematika, I Dio, Prvi Svezak*, Tehnička knjiga, Zagreb 1970.

[2] T.W. Cusick: *Recurrences for Sums of Powers of Binomial Coefficients*, J. Combin. Theory. Ser. A, **52**(1)(1989), 77-83.

[3] http://mathworld.wolfram.com / *Bionomial Sums*.

Primljeno u redakciju Časopisa 24.04.2017; Dostupno na internetu 15.05.2017.