MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN: 0354-6969 (p), ISSN: 1986-5228 (o)
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
Vol. XXIII (2)(2017), 73-77
DOI: 10.7251/MK1702073V

JEDNA ZANIMLjIVA NEJEDNAKOST: Raznovrsnost u dokazivanju

Nenad O. Vasić

Sažetak. U ovom radu dokazana je jedna nejednakost korišćenjem osnovnih dobro poznatih nejednakosti i ispitivanja monotonosti realne funkcije. Nejednakost, u kojoj učestvuje $3n$ realnih promenljivih, svedena je na funkciju jedne promenljive na osnovu koje je nejednakost dokazana.

Ključne reči i fraze: nejednakost, monotonost funkcije, prvi izvod

An inequality is proved in this paper. Combinations of different well known inequalities and monotonicity of a function is applied in the proof of this inequality.

Key words and phrases: inequality, monotonicity, prime derivative

Math. Subj. Class (2010): 26D15, 26D10

ZDM Subj. Class (2010): F50, I40

1. Uvod

Poznate su različite matematičke nejednakosti, kao na primer nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine, Nesbitova nejednakost, Šapiroova nejednakost i mnoge druge [**1, 3**].

U radu [**4**], korišćenjem osobina monotonosti funkcije jedne promenljive [**2**], rešena je jednačina u skupu realnih brojeva. Ovaj članak se logično nadovezuje na metodu korišćenu u radu [**4**] i ima za cilj da dokaže tačnost jedne nejednakosti. Metodološki, ovaj rad će prikazati na primeru da, pri dokazivanju brojevnih nejednakosti, osobine funkcija jedne realne promenljive mogu odigrati značajnu ulogu.

2. Nejednakost i njen dokaz

Nejednakost, kojom ćemo se baviti u ovom članku, jeste ta da realni brojevi $x_i, y_i, z_i, i = 1, \dots, n$, koji zadovoljavaju jednakost

Podržavano od Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja u Vladi Republike Srbije (Projekat **174012**).

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2\right)=3n \tag{2.1}$$

zadovoljavaju nejednakost

$$\sum_{\substack{1\leqslant i,j,k\leqslant n\\ n\mid i+j+k}} x_i y_j z_k \leqslant n^2. \tag{2.2}$$

Dokaz nejednakosti. Uslov (2.1) moguće je zapisati i kao

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)+\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)+\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right)=X+Y+Z=3n, \tag{2.3}$$

gde je

$$X=x_1^2+\ldots+x_n^2,\quad Y=y_1^2+\ldots+y_n^2,\quad Z=z_1^2+\ldots+z_n^2.$$

Neka je još i

$$X\geqslant Y\geqslant Z.$$

Ukoliko važi neki drugi raspored, elemente x_i u narednom dokazu treba zameniti elementima odgovarajuće maksimalne sume iz zagrade u (2.3).

Navedimo najpre nejednakosti koje ćemo koristiti u daljem radu:

- *Pomoćna nejednakost*:

  Kako za proizvoljne realne brojeve a i b važi da je $(a-b)^2\geqslant 0$ to direktno sledi da je

$$ab\leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right). \tag{2.4}$$

  Jednakost važi ako i samo ako je $a=b$.

- *Uopštena nejednakost trougla*:

  Proizvoljni realni brojevi $\rho_1,\ldots,\rho_N$ zadovoljavaju nejednakost

$$|\rho_1+\ldots+\rho_N|\leqslant|\rho_1|+\ldots+|\rho_N|, \tag{2.5}$$

  pri čemu jednakost važi ako i samo ako su $\rho_1,\ldots,\rho_N$ nenegativni realni brojevi.

- *Nejednakosti između geometrijske, aritmetičke i kvadratne sredine*:

  Pozitivni realni brojevi $r_1,\ldots,r_N$ zadovoljavaju nejednakosti

$$\sqrt[n]{r_1\ldots r_n}\leqslant\frac{r_1+\ldots+r_n}{N}\leqslant\sqrt{\frac{r_1^2+\ldots+r_N^2}{N}}. \tag{2.6}$$

  Jednakosti važe ako i samo ako je $r_1=\ldots=r_N$.

S obzirom na to da u uslovu (2.1), ili ekvivalentno u (2.3), figurišu veličine oblika x_i^2, y_i^2, z_i^2 to sledi da, ako brojevi x_i, y_i, z_i ispunjavaju te uslove onda te uslove ispunjavaju svi brojevi oblika $(-1)^u x_i, (-1)^v y_i, (-1)^w z_i$, za proizvoljne cele brojeve u, v, w. Na osnovu nejednakosti (2.5), a zbog osobine apsolutne vrednosti $|\cdot|$ da važi $|xyz| = |x|\,|y|\,|z|$ sledi da je

$$\Big|\sum_{\substack{1\leqslant i,j,k\leqslant n\\ n|i+j+k}} x_i y_j z_k\Big| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant i,j,k\leqslant n\\ n|i+j+k}} |x_i y_j z_k| = \sum_{\substack{1\leqslant i,j,k\leqslant n\\ n|i+j+k}} |x_i|\,|y_j|\,|z_k|$$

što znači da izraz $\sum_{\substack{1\leqslant i,j,k\leqslant n\\ n|i+j+k}} x_i y_j z_k$ dostiže svoj maksimum u slučaju kada su svi sabirci $x_i y_j z_k$ nenegativni. To, zbog kvadriranja u uslovu (2.1), nije nužno jedini slučaj kada taj izraz dostiže maksimum.

Pre dokaza nejednakosti (2.2) uočimo jednu veoma bitnu osobinu indeksa i, j, k. Za dato $i_0, 1 \leqslant i_0 \leqslant n$, i proizvoljno $j', 1 \leqslant j' \leqslant n$, postoji jedinstveno $k', 1 \leqslant k' \leqslant n$, tako da važi $n|i_0+j'+k'$. Odredimo te indekse j' i k' za konkretno i_0 i promenljivo j'.

$$\tag{2.7} \begin{cases} 1 \leqslant i_0 \leqslant n-1: & \begin{cases} k' = k'_{i_0}(j') = n - i_0 - j', & i_0 + j' < n,\\ k' = k'_{i_0}(j') = n, & i_0 + j' = n,\\ k' = k'_{i_0}(j') = 2n - i_0 - j', & i_0 + j' > n; \end{cases}\\ \\ i_0 = n: & \begin{cases} k' = k'_{i_0}(j') = n - j', & 1 \leqslant j' \leqslant n-1,\\ k' = k'_{i_0}(j') = n, & j' = n. \end{cases} \end{cases}$$

Na ovaj način određene su sve trojke (i_0, j', k') koje, za fiksirano i_0, zadovoljavaju uslov $n|i_0 + j' + k'$. Zaista, pretpostavimo da postoji trojka (i_0, j'', k'') takva da je zadovoljeno $n|i_0 + j'' + k''$ koja nije određena na prethodni način.

- Ukoliko je $i_0 = n$ tada je $j'' + k'' = n$ ili $j'' + k'' = 2n$. U prvom od ova dva slučaja je $k'' = n - j''$ dok je, zbog $1 \leqslant j'', k'' \leqslant n$, $j'' = k'' = n$ u drugom slučaju. Oba ova slučaja obuhvaćena su drugim podslučajem u (2.7). Odatle sledi da je $(i_0, j'', k'') \neq (n, j'', k'')$.
- Neka je $1 \leqslant i_0 \leqslant n-1$. U tom slučaju, ukoliko je $i_0 + j'' < n$ onda je jedina mogućnost za k'' ta da je $k'' = n - i_0 - j$, ukoliko je $i_0 + j'' = n$ mora važiti $k'' = n$ i ukoliko je $i_0 + j'' > n$ onda je, zbog $1 \leqslant k'' \leqslant n$, $k'' = 2n - i_0 - j''$.
- Sve prethodno dobijene vrednosti za k'', kao funkcije od j'' i i_0, imaju vrednosti koje su već dobijene u (2.7) što je kontradikcija. Odatle sledi da su, sa (2.7), obuhvaćene sve neophodne trojke (i_0, j, k) za koje je $n|i_0 + j + k$.

Važi i to da je svaka funkcija $k'_{i_0} : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bijekcija. To je očito jer je funkcija evidentno bijektivna na zasebnim podintervalima kojima pripada j' kao linearna a nikoje dve vrednosti funkcije k'_{i_0} za j' iz različitih intervala ne mogu biti jednake.

U sumi (2.2) fiksirajmo sve sabirke koji sadrže činilac x_{i_0} za konkretno $i_0, 1 \leqslant i_0 \leqslant n$. Suma svih tih sabiraka je

$$s_{i_0}^x = x_{i_0} \cdot \sum_{j'=1}^{n} y_{j'} z_{k'_{i_0}(j')} \overset{(2.4)}{\leqslant} \frac{1}{2} x_{i_0} \cdot \big(Y+Z\big) \overset{(2.3)}{=} \frac{1}{2} x_{i_0} \big(3n - X\big). \tag{2.8}$$

Nejednakost u prethodnom nizu relacija postaje jednakost onda i samo onda kada je $y_1 = \ldots = y_n = z_1 = \ldots = z_n$. Saberimo sve nejednakosti (2.8) po $i_0 = 1, \ldots, n$. Tako dobijamo da je

$$s^x = s_1^x + \ldots + s_n^x \leqslant \frac{1}{2}(x_1 + \ldots + x_n)\big(3n - X\big). \tag{2.9}$$

Zbog bijektivnosti funkcija k'_{i_0}, zbir s^x upravo je jednak veličini $\sum_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant n \\ n \mid i+j+k}} x_i y_j z_k$

Neka je $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p} > 0$ i $x_{i_{p+1}} = \ldots = x_{i_n} = 0$. U tom slučaju, nejednakost (2.9) postaje

$$\begin{aligned} s^x &\leqslant \frac{1}{2}\big(x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}\big)\big(3n - X\big) = \frac{p}{2} \cdot \frac{x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}}{p} \cdot (3n - X) \\ &\overset{(2.6)}{\leqslant} \frac{p}{2}\sqrt{\frac{X}{p}}(3n - X) = \frac{1}{2}\sqrt{p}\sqrt{X}(3n - X). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Poslednja nejednakost, u prethodnom nizu relacija, postaje jednakost onda i samo onda kada je $x_{i_1} = \ldots = x_{i_p}$. Štaviše, zbog $p \leqslant n$, poslednje dobijeno ograničenje vrednosti s^x prerasta u

$$s^x \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{p}\sqrt{X}(3n - X) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}\sqrt{X}(3n - X). \tag{2.11}$$

Jednakosti, u ove dve nejednakosti, važe ako i samo ako je

$$p = n \quad \text{i} \quad x_1 = \ldots = x_n.$$

Odredimo maksimalnu vrednst ograničenja $\frac{1}{2}\sqrt{n}\sqrt{X}(3n - X)$. Posmatrajmo zato realnu funkciju

$$F(X) = \frac{1}{2}\sqrt{n}\sqrt{X}(3n - X). \tag{2.12}$$

Prvi izvod ove funkcije po X je

$$F'(X) = \frac{\sqrt{n}}{2}\Big(\frac{3n - X}{2\sqrt{X}} - \sqrt{X}\Big) = \frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{X}}(n - X). \tag{2.13}$$

Kako je, po pretpostavci, $X \geqslant Y \geqslant Z$ to direktno sledi da je $X \geqslant n$. Zaista, ukoliko bi bilo $X < n$ onda bi sledilo da je $Y < n$ i $Z < n$, pa je

$$X + Y + Z < 3n$$

što je kontradikcija sa uslovom (2.3), tj. (2.1). Sada je, zbog $X \geqslant n$, $F'(X) \leqslant 0$ pri čemu se prvi izvod F' anulira ako i samo ako je $X = n$. Funkcija F je, iz razloga $F' \leqslant 0$, opadajuća [**2**] pa je njen maksimum jednak $F(n) = n^2$, što direktno sledi, čime je nejednakost (2.2) dokazana. Za nenegativne realne brojeve x_i, y_i, z_i, jednakost važi ako i samo ako je

$$x_1 = \ldots = x_n = y_1 = \ldots = y_n = z_1 = \ldots = z_n = 1.$$

Literatura

[1] **Dr. Š. Arslanagić**, *Matematička čitanka 5*, Grafičar Promet D. O. O., Sarajevo, 2013.

[2] **G. V. Milovanović, R. Ž, Đorđević**, *Matematička analiza I*, dostupno na: *http://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/Teze/MatematickaAnalizaI.pdf.*

[3] **D. J. Simjanović, N. O. Vesić**, *Uopštenja nekih algebarskih nejednakosti*, MAT-KOL XIX (3)(2013), 23–29.

[4] **N. O. Vesić, D. J. Simjanović**, *Još jedan pristup rešavanju jednačina u skupu realnih brojeva*, Nastava Matematike, 2011, LVI (3-4), 18–22.

Prirodno-matematički fakultet, 18000 Niš, Višegradska 33, Srbija
E-mail address: vesic.specijalac@gmail.com