MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIII (1)(2017), 9-19 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/МК1701009М

Векторско дефинисање разних геометријских простора

Павле М. Миличић

Вероватно је највећа заслуга старогрчких математичара у томе што су они отворили проблем логичке изградње геометрије. Тај проблем су поставили старогрчки филозофи, пре свих, Платон (око 429-348) а после тога и оснивач формалне логике Аристотел (384-322). Иако се Аристотел није непосредно занимао за геометрију, њему се приписује идеја да се геометрија изгради помоћу низа тврђења која проистичу једна из других логичним закључивањем. Као што знамо, Еуклид, који потиче из Платонове школе, уз све недостатке, спровео је Аристотелове идеје у свом чувеном делу *Елементи*. Ту, први пут, имамо тзв. аксиоматику геометрије, тзв. *еуклидске геометрије* (*ЕГ*). Много касније, тај метод аксиоматизације, прихваћен је као образац у свим формалним математичким дисциплинама.

О значају аксиоматике еуклидске геометрије овде није потребно говорити. Сваки математичар о томе све зна. Хилберт је 1899. својом књигом ***Основе еометрије*** отклонио све недостатке Еуклидове аксиоматике геометрије. Поставио је стандарде: За валидну аксматику потребна су испуњења три критеријума: *потпуност, независност и непротивуречност*. Увео је тзв. Хилбертове аксиоме (*ХА*) еуклидске геометрије.

За разумевање онога што следи потребно је да се прво осврнемо, користећи [2], на садржину *ХА***.**

1. О Хилбертовој аксиоматици *ЕГ*

Без детаљисања, може се рећи да се Хилбертова аксиоматика ***ЕГ*** састоји из три врсте појмова: основних појмова, који се не дефинишу, основних релација,чија се егзистенција не доказује и аксиома, тврђења која се не доказују, а која се односе на основне појмове и основне релације.

Детаљније: Основни појмови су: *скуп тачака*, *скуп правих* и *скуп равни*.Основне релације су: *релација припадности*, *релација конгруентности* (подударности), релација „*лежи између*“.Двадесет аксиома су подељене у 5 група: *А. припадности*, 8 аксиома; *А. поретка*, 4 аксиоме; *А. конгруентности*, 5 аксиома; *А. непрекидности*, 2 аксиоме; *А. паралелности*, 1 аксиома.

Као што видимо основни појмови су три апстрактна скупа елемената. Треба напоменути да геометријски појмови *тачка, права, раван* у реалном свету не постоје. Математичари су их створили апстраховањем појмова реалног света.

Отуда постоје сумње неких савремених физичара да реалност основа геометрије не кореспондира са реалним светом. (Познато је Ајнштајново мишљење о томе).Али, сумња је потребна, уосталом, да није било сумње у оправданост петог постулата ***ЕГ***, не би настале друге, нееуклидске, геометрије. Са друге стране, наука (а посебно геометрија) је направила прве праве кораке у свом развитку оног тренутка када је *апстраховала* и *идеализовала* предмете реалног света, односно, реалног окружења.

Дакле, сумње у основне поставке у науци и апстраковања у науци су нужне!

Хилбертов ученик Херман Вајл (1885-1955), један од највећих математичара 20. века, дао је нову аксиоматику ***ЕГ*** користећи појам вектора и векторског простора.

Ради комплетности даљег излагања, а да би смо се потсетили на дефиницију векторског простора, и овде напоменимо неке добро познате чињенице дефиниција вектора и векторског простора ([6],[7]).

Користећи појам дужи, затим појам усмерене дужи, појмове који се прецизно дефинишу на основама Хилбертових аксиома ***ЕГ***, лако се дефинше појам *вектора* (тзв. *слободног вектора*) као класе еквиваленције у скупу свих усмерених дужи. Слободне векторе ћемо звати *геометријски вектори* (*г. вектори*).

Ако скуп свих г. вектора означимо са $V = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \cdots\}$ а скуп свих тачака еуклидског простора са $E = \{A, B, C, \cdots\}$ онда се лако доказује, користећи *ХА*, да постоји пресликавање $\sigma : E \times E \to \vec{V}$ тј. да сваки уређени пар тачака (A, B) дефинише један вектор, тзв.усмерену дуж $\overrightarrow{AB} \in \vec{V}$, са следећим особинама:

1) За сваку тачку $A \in E$ и сваки вектор $\vec{x} \in \vec{V}$ постоји јединствена тачка $B \in E$ за коју је $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$. (Ако је $\vec{x} = \vec{0}$ онда је $B = A$).

2) За сваке три тачке $A, B, C \in E$ важи једнакост $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Ове особине показују да је E *афини простор*.(Наиме, ставовима 1) и 2) дефинише се афини простор).Осим тога, за г. векторе, постоји операција *сабирања вектора* $+ : \vec{V} \times \vec{V} \to \vec{V}$ и операција *множења бројева и вектора* $\cdot : R \times \vec{V} \to \vec{V}$ за које важе следеће особине (за произвољне векторе $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \vec{V}$ и произвољне бројеве $\alpha, \beta \in R$):

3) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$,

4) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$,

5) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$,

6) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$,

7) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{x}$,

8) $(\alpha\,\beta)\vec{x} = \alpha\,(\beta\,\vec{x})$,

9) $\alpha\,(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\,\vec{x} + \alpha\,\vec{y}$,

10) $1\vec{x} = \vec{x}$.

Особине **3)**,**4)**,**5)** и **6)** говоре да је $(V,+)$ Абелова група за коју важе особине **7)**, **8)**, **9)**, **10.** Осим тога, у скупу г. вектора може се дефинисати тзв. *скаларни производ* $\langle .,. \rangle$ вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{V}$ са

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \frac{1}{4}(|\vec{x}+\vec{y}|^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2)$$

који има следеће ососбине:

11) $\langle \vec{x}, \vec{y}+\vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$,

12) $\alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle$,

13) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$,

14) $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow |\vec{x}|^2 := \langle x, x \rangle > 0$.

Напоменимо да је у V највећи број линеарно независних вектора 3,тј. да је димензија простора V три, што се исказује са

15) $\dim V = 3$.

Као што видимо, користећи ***ХА***, у стању смо да дефинишемо једну математичку структуру (E,V) за коју важе особине **1)-15).**

Иначе је скуп V са особинама **3)-10)** један пример тзв**.** *реалног тродимензионог векторског простора.*А апстрактни векторски простор први је дефинисао 1888. славни италијански математичар Ђузепе Пеано (1858-1932). Заправо, ососбине **3)-10**) Пеано је узео за аксиоме *реалног векторског простора*. Ту дефиницију, после навођења основних особина геометријских вектора, можемо сада прихватити. (видети [7], стр. 122-130)**.**

Иначе се сматра да је холандски инжињер и математичар Симон Стевин (1548-1620) први 1587. г. у својој књизи „*Почетак статике*“ употребио стрелицу за усмерену дуж, увео сабирање ортогоналних вектора. Знатно касније француски математичар Луи Пуансо (1777-1859) у књизи „*Елементи статике*“ 1803.г. развија теорију вектора.

Прелазимо сада на векторско дефинисање појединих геометријских простора.

2. Апстрактни реални векторски простор

Апстрактни скуп $V = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \cdots\}$ са особинама **3)-10)** зове се *апстрактни реалан векторски простор*. (Подрзумева се да у V постоји операција + таква да је $(V,+)$ Абелова група и да за множење броја и вектора важе особине **7), 8), 9)** и **10)**)**.** Особине **11)-14)** дефиницишу *скаларни производ* у простору V. Максимални број линеарно независних вектора зове се *димензија простора* V, означава се са $\dim V$. Елементи векторског простора зову се *вектори тог простора*.

Дакле, вектори нису само слободни геометријски вектори који се дефинишу преко усмерених дужи еуклидског простора.Они могу бити веома апстрактни објекти. На пример, скуп свих реалних функција на сегменту $[a,b]$,са уобичајеним операцијама сабирања и множења, је један векторски простор, поједине функције су вектори тог простора.

За касније ће нам бити потребан следећи пример скупа чији елементи нису усмерене дужи, а у коме се могу дефинисати одговарајуће операције које испуњавају особине **3)-10)**.

Пример 1. Нека је $R_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ скуп уређених четворки реалних бројева. Јасно је шта је збир уређених четворки и шта је производ реалног броја и уређене четворке. У односу на ове операције лако је проверити да су у односу на њих испуњени услови **3)-10)** па се у складу са Пеановом аксиоматиком ове уређене четворке могу звати векторима**.** Шта више, за уређене четворке $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ (за векторе x и y) функционал

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

испуњава услове **11)-14)** па је R_4 векторски простор са скаларним производом**.**

Као што видимо скаларни производ $\langle x, y \rangle$ је *билинеарна форма* коју можемо записати са

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} x_i y_j$$

где је

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одговарајућа *квадратна форма* ове билинеарне форме је

$$\|x\|^2 := \langle x, x \rangle = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}$$

или

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} x_i x_j$$

којом се дефинише тзв. *норма вектора* x у R_4. Дакле норма вектора x је ненегативан број

$$\|x\| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}}\ .$$

Поред тога, лако је показати да је овде максимални број линеарно независних вектора 4, те је $\dim R_4 = 4$. Дакле, са уведеним операцијама R_4

постаје четвородимензиони реални векторски простор са скаларним производом. Он се често назива *четвородимензиони еуклидски простор.*

Да бисмо дефинисали још један важан појам тзв. *псеудоскаларни производ* вектора наводимо следећи пример.

Пример 2. Посматрајмо скуп R_4 из Примера 1. са ранијим операцијама сабирања вектора и множења броја и вектора.На $R_4{}^2$ посматрајмо билинеарну форму (функционал)

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 ,$$

која се може записати са

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} x_i y_j$$

где је

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Лако се проверава да овај функционал испуњава особину:

$$\forall y (x, y) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Овај функционал $(\cdot,\cdot)$ је пример тзв. *псеудоскаларног производа индекса* 1 вектора x и y. Скуп R_4 са таквим псеудоскаларним производом се обично означава са R_3^1.

3. Псеудоскаларни производ.

Нека је $\boldsymbol{V} = \{\vec{x}, \vec{y}, \cdots\}$ ***n***-димензионални реални векторски простор. Билинеарна форма (функционал са два аргумента који је линеаран по оба аргумента) $g : V \times V \to R$ таква да је одговарајућа квадратна форма $\varphi(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{x})$ несингуларна и индекса $k > 0$, зове се *псеудо скаларни производ индекса* k. Векторски простор $\boldsymbol{V}$ у коме је дефинисан псеудо скаларни производ индекса k зове се *псеудоскслсрни векторски простор индекса* $\boldsymbol{k}$ (Видети Пример 2).

Ако означимо псеудоскаларни производ са $(\cdot\, , \cdot)$ онда се дужина (норма) вектора $\vec{x}$ дефинише са

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{\vec{x}^2} .$$

То значи да у псеудоеуклидском простору квадрат вектора $\vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0}$ може бити негативан или нула, односно да у овом простору дужина вектора $\vec{x} \neq \vec{0}$ може бити позитиван број, имагинаран број или нула.

Видели смо да се користећи *ХА*-е еуклидског простора E може дефинисати један векторски простор (простор геометријских вектора $\vec{V}$), односно да се може направити структура $\left(E,\vec{V}\right)$ за коју важе особине **1**)-**15**). Сада је природно поставити питање: Да ли се може изградити Хилбертова аксиоматика полазећи од структуре $\left(E,\vec{V}\right)$ (ако је дата аксиоматика **1)-15)** ове структуре)?

Одговор на ово питање дао је Херман Вајл (1885-1955). Он је дао векторску аксиоматику еуклидског простора и еуклидске геометрије (три и више димензија).

Иначе је још Рене Декарт 1637. својим делом *Геометрија* утро пут алгебраизацији геометрије.

Ево сада Вајлове аксиоматике, у терминологији горе реченог

4.Вајлова аксиоматика *(ВА)* еуклидског простора.

Нека је дата структура (E,V) за коју важе особине **1)-15)** **(**V је реалан векторски простор, $\dim V = n$**,** постоји скуп E чије елементе називамо тачкама и пресликавање $\sigma : E^2 \to V$ које испуњава услове 1)-2)) тада се скуп E назива *реални n-димензиони еуклидски простор.* Особине *1)-15)* структуре (E,V) зову се *векторске аксиоме еукидског простора* E.

Као што видимо Вајлова аксиоматика полази од *основних појмова* (два скупа):*скуп вектра* V и *скуп тачака* E, *основних релација* (четири релације): *сабирање вектора*, *множење броја и вектора*, *скаларни производ вектора* и *пресликавање које пару тачака додељује један вектор* и *аксиома* (петнаест аксиома): аксиоме 1)-15).

Практично код Вајлове аксиоматике основни појмови су *вектор* и *тачка*. Тако да, формално гледано, Вајлова аксиоматика има предности у односу на Хилбертову аксиоматику, јер

ХА има 3 основна појма а *ВА* има 2 основна појма;

ХА има 4 недефинисане релације а *ВА* има 4 ;

ХА има 20 аксиома а *ВА* има 15 уз услов да је $\left(V,+\right)$ група.

Суштинска предност *ВА*-е у односу на *ХА*-у је што је терминологија у *ВА*-ци савремена која се користи и у другим математичким и физичким дисциплинама и што се *ВА* аксиоматиком дефинише еуклидски простор произвољне димензије, док се *ХА*-ом дефинише само трдимензиони еуклидски простор.

На основу аксиома **1)-15)** лако се дефинишу основни појмови Хилбертове аксиоматике. На пример, релација „бити између“: Тачка C је *између* тачака A и B ако постоји број $t \in \left(0,1\right)$ такав да је $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$.

И остали основни појмови Хилбертове аксиоматике (*права, раван, конгруентност дужи, конгруентност углова*) , у структури (E,V) се лако дефинишу (видети брошуру([6])).У поменутој брошури су доказана сва тврђења свих Хилбертових аксиома ***ЕГ***-е користећи аксиоматику **1)-15).**

И пре *ХА* геометрије, на основу знања еуклидске геометрије, која нису била мала, поред поменуте Декартове *Геометрије,* јавили су се и први зачеци неких других геометрија. Од тих зачетака касније су настале тзв. нееуклидске геометрије: пројективна геометрија, афина геометрија, сферна геометрија, геометрија Лобачевског, Риманова геометрија и др. Све су оне настале полазећи од знања еуклидске геометрије.

Све ове геометрије данас имају своје засебне векторске аксиоматике.

Овде ћемо приказати јединствен приступ дефиницијама простора у којима се изучавају ове геометрије. Иначе то се може учинити на два начина: Клајнов *групни приступ* (немачки математичар Феликс Клајн (1849-1925)), или Вајлов *векторски приступ*.

Ми овде желимо да прикажемо јединствен Вајлов векторски приступ дефинисању простора у којима се изучавају одговарајуће геометрије.

Из дефиниција које следе видеће се да је *пројективни простор,* у извесном смислу, најопштији, од свих горе наведених простора којима придодајемо и еуклидски простор. Зато, прво, реч две о почецима *пројективне геометрије* (***ПГ***).

Особине *пројективног пресликавања* започињу француски математичари, много пре ***ХА***-е и ***ВА***-е еуклидске геометрије.

Француски математичар Ж. Дезарг (1593-1662) уводи тзв. *бесконачно далеке тачке* еуклидског простора и тако добија модел пројективног простора, као проширени еуклидски простор.

Француски математичар Понселе (1788-1867) је увео *пројективно пресликавање равни* и изучавао фигуре које су инваријантне приликом пројективног пресликавања. Али прецизне аксиоме пројективне геометрије *ПГ* могле су да се појаве тек после *ХА* и Клајновог *Ерлагенског програма* 1872.г. До тих аксиома ћемо касније доћи.

Сада смо у могућности да на јединствен начин, истим поступком, векторски, дамо дефиниције $n-$ димензионог пројективног простора, еуклидског $n-$ димензионог простора, простора Минковског, афиног $n-$ димензионог простора, $n-$ димензионог хиперболичког простора Лобачевског, $n-$ димензионог елиптичког Римановог простора.

5. Пројективни простор (*ПП*).

Нека је $V=\{\vec{x},\vec{y},\vec{z},\cdots\}$ реални векторски простор за који је $\dim V=n+1$. Непразан скуп $\widetilde{P}=\{X,Y,Z,\cdots\}$ је $n-$ *димензиони пројективни простор*, (произведен векторским простором V), ако постоји пресликавање

$$f:V\setminus\{\vec{0}\}\to\widetilde{P}\ ,$$

које испуњава следећа два услова (*аксиоме пројективног простора):*

1. Пресликавање f је *сирјективно*, тј. сваки елемент из $\tilde{P}$ је слика бар једног елемента из V.
2. Једнакост $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ је испуњена ако и само ако су вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ линеарно зависни, тј колинеарни вектори овим пресликавањем дефинишу једну слику, а неколинеарни вектори дефинишу различите слике.

Елементе скупа $\tilde{P}$ зовемо *тачкама простора* $\tilde{P}$.

Овде треба напоменути да ова дефиниција ***ПП*** не користи аксиоматику ***ЕГ***-е.

Ако је $f(\vec{x}) = X$ онда кажемо да вектор $\vec{x}$ *дефинише* тачку X .

Нека је V четвородимензиони простор и нека је L_k подпростор в. простора V($k = 2, 3$).Скуп тачака $\tilde{P}$ које дефинишу вектори L_2 зове се *права пројективног простора* $\tilde{P}$. Слично потпростор L_3 дефинише *раван простора* $\tilde{P}$.

Сада се лако доказују класичне аксиоме пројективне геометрије као што су: кроз две различите тачке пролази једна и само једна права; кроз три тачке које не припадају једној правој пролази јединствена раван; сваке две праве једне равни имају заједничку тачку; сваке две равни имају заједничку праву и тд.

Показаћемо сада како се могу дефинисати афини простори, еуклидски простори и простор Минковског у контексу дефиниције пројективних простора.

Пример 3. Све уређене четворке реалних бројева облика $(x_1, x_2, x_3, 0)$, у векторском простору из Примера 2 образују тродимензиони векторски подпростор кога ћемо означит са $\tilde{V}$. Означимо са $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, 0)$ вектор простора $\tilde{V}$. Дакле,

$$\tilde{V} = \{(x_1, x_2, x_3, 0) | \, x_i \in R\}.$$

Осим тога у $\tilde{V}$ можемо дефинисати скаларни производ $(.,.)$ вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \tilde{V}$ са

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

Дефинисаћемо сада реални тродимензиони афини простор и реални тродимензиони еуклидски простор. Наравно, ове дефиниције се једноставно преносе на одговарајуће $n-$ димензионе просторе.

6.Афини простор.

Нека је $V = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \cdots\}$ реални четвородимензиони векторски простор и нека је $\tilde{P}$ тродимензиони пројективни простор дефинисан векторским простором

V. Нека је скуп $Q=\widetilde{P}\cup\{O\}$ где је ***O*** посебна „тачка“ која није у $\widetilde{P}$. Дефинишимо пресликавање $\bar{f}:V\to Q$
са

$$\bar{f}(\vec{x})=\begin{cases} f(\vec{x}), \vec{x}\neq\vec{0} \\ O, \vec{x}=\vec{0} \end{cases},$$

где је f пресликавање помоћу кога се дефинише пројективни простор $\widetilde{P}$. Тада $\bar{f}$ испуњава услове **1.** и **2**. у односу на V и Q . Заиста, ако је $X\in\widetilde{P}$ онда постоји $\vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}$ такав да је $\bar{f}(\vec{x})=f(\vec{x})=X$. Осим тога је $\bar{f}(\vec{0})=O$. Значи да је испуњен услов **1**. Осим тога ако су $\vec{x}$ и $\vec{y}$ различити од $\vec{0}$ онда је

$$\bar{f}(\vec{x})=\bar{f}(\vec{y})\Leftrightarrow\vec{x}=\lambda\vec{y}, \lambda\neq 0,$$

јер то важи за f . А немогуће је да буде $\bar{f}(\vec{x})=\bar{f}(\vec{y})$ где је $\vec{x}$ или $\vec{y}$ једнак $\vec{0}$, осим у случају када је $\vec{x}=\vec{y}=\vec{0}$.

Нека је $\widetilde{V}$ тродимензиони подпростор од V и нека је $\widetilde{A}=\bar{f}(\widetilde{V})$. Тада је $\widetilde{A}$ *тродимензиони афини простор,* што ћемо сада доказати (видети [5]).

Довољно је доказати да постоји пресликавање

$$\sigma:\widetilde{A}\times\widetilde{A}\to\widetilde{V}$$

такво да, ако се означи, $\sigma(X,Y)$ са $\overrightarrow{XY}$, да важе већ поменуте особине **1)** и **2)** које дефинишу афини простор.

Нека је (X,Y) произвољан уређен пар тачака из $\widetilde{A}$ које су различите од тачке ***O***. Тада, према **1.** постоје вектори $\vec{x},\vec{y}\in\widetilde{V}$ такви да је

$$\bar{f}(\vec{x})=X,\ \bar{f}(\vec{y})=Y.$$

У случају да је $X=O$ онда је $\vec{x}=\vec{0}$. Тада дефинишемо $\sigma:\widetilde{A}\times\widetilde{A}\to\widetilde{V}$
са

$$\sigma(X,Y)=\overrightarrow{XY}=\vec{y}-\vec{x}.$$

Нека су дати тачка $X\in\widetilde{A}$ и вектор $\vec{p}\in\widetilde{V}$. Тада постоји јединствена тачка $Y\in\widetilde{A}$ таква да је $\bar{f}(\vec{x}+\vec{p})=Y$. У том случају је $\overrightarrow{XY}=\vec{p}+\vec{x}-\vec{x}=\vec{p}$ па је особина **1)** испуњена.

Ако имамо три тачке $X=\bar{f}(\vec{x}), Y=\bar{f}(\vec{y}), Z=\bar{f}(\vec{z})$ скупа $\widetilde{A}$**,** онда је према дефиницији пресликавања σ,

$$\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}=(\vec{y}-\vec{x})+(\vec{z}-\vec{y})=\vec{z}-\vec{x}=\overrightarrow{ZX},$$

па важи и особина **2).** Према томе $\widetilde{A}$ је афини тродимензиони простор.

7. Еуклидски простор.

Да се из горе дефинисаног афиног простора $\widetilde{A}$ добије еуклидски простор довољно је претпоставити да у потпростору $\widetilde{V}$ постоји скаларни производ (види наведени пример). Наиме у том случају за структуру $(\widetilde{A},\widetilde{V})$ важе особине 1)-15) па је према Вајловој дефиницији A тродимензиони еуклидски простор E_3.

8. Простор Минковског.

Пример 2 показује да постоје четвородимензиони векторски простори са псеудоскаларним производом индекса 1.

Афини четвородимензиони простор $\widetilde{M}$ у односу на четвородимензиони векторски простор V са псеудоскаларним производом индекса 1 зове се *Простор Минковског*.

$\widetilde{M}$ је дакле, простор кога Анштајн назива простор време.

Користећи афиност у односу на V простора $\widetilde{M}$, сваком пару тачака (X,Y) може се једнозначно кореспондирати један вектор $\vec{x}$ па се у $\widetilde{M}$ може дефинисати метрика са

$$d(X,Y)=\|\vec{x}\|.$$

Будући да је V векторски простор са псеудоскаларним производом, за растојање у $\widetilde{M}$, могући су случаји да растојање буде једнако нули или да растојање буде имагинаран број.Због овога не можемо рећи да је Простор Минковског метрички простор.

8. Хипрболички простор Лобачевског.

Нека је сада, у горњој дефиницији пројективног простора, V тродимензиони векторски простор са псеудоскаларним производом индекса 1 и нека је $\widetilde{V}$ скуп свих вектора имагинарних дужина. Непразан скуп $\widetilde{L}_2=\{X,Y,Z,\cdots\}$ је дводимензиони *хиперболички простор Лобачевског* ако постоји пресликавање

$$\pi:\widetilde{V}\to\widetilde{L}_2$$

које испуњава услове **1.** и **2.** из дефиниције пројективног простора.

И у овом простору се може увести појам растојања између тачака тог простора а самим тим појам кретања (видети [4]).

9. Риманов елиптички простор.

По истој шеми, као што се дефинише дводимензиони хиперболички простор Лобачевског, дефинише се и *дводимензиони елиптички Риманов простор* $\widetilde{R}_2$, с тим што се овог пута, уместо $\widetilde{V}$ узима тродимензиони векторски простор V_3 са скаларним производом. Дакле, скуп $\widetilde{R}_2\neq\phi$ је дводимензиони *елиптички Риманов простор* ако постоји пресликавање

$$\pi:V_3\setminus\{0\}\to\widetilde{R}_2$$

које испуњава одговарајуће услове **1.** и **2.** из дефиниције пројективног простора.

И у овом простору могу да се уведу појмови растојања и кретања (видети [4]).

Литература:

[1] И.М.Виноградов, *Математическая энциклопедия 1-5;* Советская энциклопедия, Москва 1984.

[2] Н.В.Ефимов *Высшая геометрия*, Наука, Москва 1978.

[3] И.П.Егоров, *Основания геометрии*, Просвещение, Москва 1984.

[4] Л.С.Атанасян, БТ.Базылев, *Геомтрия II,* Просвещение, Москва 1987.

[5] S.Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene,* Tehnička knjiga, Zagreb 1967.

[6] P.M.Miličić, *Vektorska aksiomatika euklidske geometrije*, Arhimedes, Beograd 2004.

[7] P.M.Miličić, *Deset tema iz matematike*, Zavod za uudžbenike, Beograd 2010.

Dostavljeno u rekakciju časopisa 31.12.2016; Dostupno na internetu 16.01.2017.