MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXIII (1)(2017), 35-44 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
DOI: 10.7251/MK1701035M

На Аполонијевом трагу

Павле М. Миличић

Сажетак. По утицају Аполинијевих дела на нововековну математику и астрономију Аполоније Пергамски спада у сами врх хеленске математике. Његови резултати о конусним пресецима су имали епохалне последице како у астрономији тако и у геометрији и алгебри. Његова теорема о једнакости паралелограма и данас заокупља интересовање разних математичара. Она је постала један од темеља на којем је изграђена теорија Хилбертових простора.

Abstract. After impact of Apollonius' work on new century mathematics and astronomy Apollonius of Perga belongs to the top of Hellenic mathematics. His results on conic sections had epochal consequences both in astronomy and geometry and algebra. His theorem on the equality of parallelogram today attracts the interest of various mathematicians. It became one of the foundations on which is built the theory of Hilbert spaces.

Опште је прихваћено мишљење у историји математике да су **Еуклид, Архимед** и **Аполоније** вероватно три најзначајнија математичара хеленске Грчке. Њихово стваралаштво је кулминација најбољег Грчког математичког стваралаштва.

По **Еуклидовим *Елементима*** из 3.века п.н.е. човечанство је изучавало математику читавих два миленијума. То је, без сумње, после **„Библије“,** најтиражнија књига свих времена. Постоји податак да је чак 1936. објављена више од 480 пута на разним светским језицима. А колико је пута објављена пре 1936? Дакле, до половине 20. века била је извор знања из математике у целом свету. Али у *Елементе* нису моглиући сва математичка знања антике. После Еуклида појавила су се стваралаштва Архимеда и Аполонија.

О **Архимеду** (287-212 п.н.е.) се све зна, зна се да је по својим идејама и сваралаштву један о три највећа математичара света. Његово стваралаштво је врхунац хеленске математике.

О **Аполонију из Пергама** (262-190 п.н.е) и његовим делима највише знамо од Грчког математичара **Папа (Папос Александријски,** 290-350 г.п.н.е). Занимљиво је напоменути да није био у пријатељским односима са својим савремеником Архимедом.

Пап је објавио је 8 књига у којима је приказао резултате старијих Грчких математичара и своје. Ту су и коментари за **Птоломејов Алмагест**, за **Еуклидове**

Елементе и за већину **Аполонијевих** књига. Пап се, иначе, бавио тзв. математичким срединама (аритметичка, геометријска и хармонијска).

Из Папових дела сазнајемо да је Аполоније предавао у Александрији. У Александрији је написао ***Конусние пресеке***, величанствени споменик алексадријске науке.

Напоменимо анегдоту према којој се дошло до *конусних пресека.* На грчком острву Делосу око 400. г.п.н.е. појавила се куга епидемијских размера. Становништво се обратило за помоћ делфиском пророчанству, како да се обузда епидемија. Добили су савет да удвострче жртвеник у богомољи који је био у облику коцке. Становници су ставили још једну коцку на предходну али побољшања није било. Касније су схватили да треба постојећи жртвеник заменити са новим, са новом коцком дупло веће запремине. Како направити такву коцку? Тако је настао чувени не решиви проблем, за то време, ***проблем подвостручења коцке,*** на савременом језику, проблем конструкције (само лењиром и шестаром) решења једначине $x^3 = 2a^3$. Први покушај решења тог проблема приписује се **Хипокриту** око 460.г.п.н.е. У то време актуелан је био проблем конструкције квадрата чија је површина једнака површини датог правоугаоникана, тј. конструкције величине x као средње пропорционале $a/x = x/b$ или $x^2 = ab$. Хипокрит је, користећи ту идеју, задатак подвостручења коцке свео на конструкцију две средње пропорционале x и y из једнакости:

$$a/x = x/y = y/(2a).$$

Одавде је

$$x^2 = ay,\ y^2 = 2ax,\ x^4 = 2a^3x,\ x^3 = 2a^3$$

па су тако настала нова „геометријска места“ , која су нашла своја оличења у *конусним пресецима.*

Сматра се да је конусне пресеке открио Еуклидов ученик **Менехмо** (4. век п.н.е.). Менехмо је „решио“ делски проблем тако што је закључио да је x апсциса било која два од следећа три конусна пресека

$$x^2 = ay, \quad y^2 = 2ax, \quad xy = 2a^2.$$

Гаус је доказао да се проблем подвостручења коцке не може решити елементарним конструкцијама.

Аполоније је систематизовао знања и открића својих предходника. Аполоније је своју *Теорију конусних пресека* (8 књига) написао савременим језиком, алгебарским једначинама, планиметријски. Његова теорија конусних пресека омогућила је да се решавају (конструкцијом) једначине степена вишег од два. Он је практично користио неку врсту координатних система. По правилу тај систем се састојао од дијаметра криве и тангенте криве у једној крајњој тачки тог дијаметра. Сматра се да је на његовим идејама у 17. веку настала **Фермина** (1601-1665) и **Декартова** (1596-1650) *аналитичка геометрија.* Он је установио да се две криве, два конусна пресека могу сећи највише у четири тачке. Није потпуно јасно како је Аполоније долазио до неких својих резултата о асимптотама иако није знао математичку анализу. Холандски математичар **Ван дер Варден** (1903-1996) у свом делу *Пробуђена наука* каже: „**Аполоније** виртуозно влада геометријском алгебром, али не мање виртуозно уме да скрива ток својих мисли којима долази до резултата. Расуђивања су му кристално јасна“.

Аполоније је дао комплетну теорију кривих: *елепса, парабола*, *хипербола*. Увео је њихове називе. До њега су се те криве звале само *конични (конусни) пресеци.* По угледу на латинске називе, он је увео називе: *абсциса, ордината, апликата*. Обе гране хиперболе сматрао је да је једна крива, као што се и сада сматра. Аполонија су звали велики геометар.

Увео је појмове *епицикле* и *ексцетрике* да би објаснио неравномерно кретање планета. Био је велики ауторитет за велике светске ауторитете, великог матемаичара **Ферму**(1601-1665) и великог астронома **Халеја** (1656-1742). Они су се јако интересовали за његове резултате из астрономије.
Велики **(з**вали су га и величанствени) антички астроном **Хипарх** (190-120 п.н.е.) велики грчки астроном и математичар **Птоломеј** (90-168) (творац чувене монографије ***Алмагест*)** дефинисали су геоцентрични модел на темељима Аполонијевих резултата из астрономије. Један кратер на месецу зове се по Аполонију. Највећи значај су конусни пресеци добили када је **Њутн** доказао Кеплерове законе о кретању планета око сунца, **Кеплер** (1571-1630). Путање планета и њихових сателита су елипсе, док су путање комета параболе или хиперболе. **Кеплерово** кретање небских тела по елиптичним путањама и **Галилеово** (1564-1642) кретање баченог камена по параболичкој путањи показују да Аполонијеви конусни пресеци имају непосредну и незаменљиву примену у небеској механици и земаљској механици.

Поставио је и, први, комплетно решио чувени задатак: *Конструсати круг који додирује три дата круга*. (Подразумева се да се неки од датих кругова може свести на тачку или на праву, постоји 10 главних могућности). Објављени су бројни радова на ту тему а објављују се и данас.

О значају Аполонија за савремену математику говори и следећа чињеница. Од 1710. до 2003. године објављено је 20 књига о Аполонијевим радовима. Историчари су пребројали да је у разним својим делима објавио 719 теорема, а о конусним пресецима објавио је 387 теорема. Драгоцени су његови резултати из конусних пресека за алгебру и астрономију.

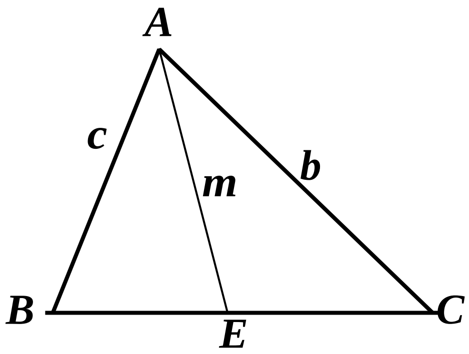
Од свих његових теорема ми ћемо се сада усмерити нашу пажњу на једну, наизглед једноставну, али добро познату теорему,***теорему о једнакости паралелограма*** и на њене последице.Ова теорема је, у самој геометрији, по значају, тврђење на нивоу тврђења **Питагорине теореме.** То значи да је *једнакост паралелограма* једно од најзначајнијих тврђења у геометрији. Бројна су њена значајна уопштења у еуклидској геометрији али још значајнија је чињеница што је она постала „камен темељац" *функционалне анализе,*савремене математичке дисциплине, а која је сама „камен темељац" *теоријске физике* и посебно *квантне механике*.

Дакле, у овом излагању, овој теореми посвећујемо даљу пажњу. Наводимо нека уопштавања те теореме и посебно истичемо значај те теореме у савременим математичким дисциплинама. Избегаваћемо, по правилу, доказе, они се могу наћи у одговарајућим цитираним изворима. Дакле, наводићемо само референце за наведена тврђења.

Аполонијевом тврђењу *једнакости паралелограма* предходи једно Аполонијево тврђење које је еквивалентно тврђењу једнакости паралелограма. То тврђење је познато као А*полонијева теорема*.

1. Аполонијева теорема.

Нека су a,b,c дужине страна троугла ABC и m дужина медијане AE, (Слика 1.).



Слика 1.

Тада је

(1) $$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$$

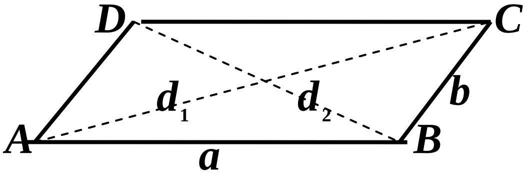
Ако је $b = c$, тј. када је троугао равнокрак добијамо Питагорину теорему

$$m^2 + (a/2)^2 = b^2.$$

Вероватно је ово тврђење Аполоније доказао посматрајући и упоређивајући површине квадрата конструисаних на странама троугла и одговарајућој медијани. Ова тврђење је важно јер се из (1) може добити дужина медијане m у функцији страница троугла. А најважније је због тога што је оно еквивалентно тврђењу једнакости паралелограма које сада наводимо.

2. Аполонијева једнакост паралелограма.

Ако су a и b дужине страниса паралелограма $ABCD$ и d_1 и d_2 дужине његових дијагонала (Слика 2.),



Слика 2.

Тада је

(2) $$d_1^{\,2} + d_2^{\,2} = 2(a^2 + b^2)$$

(код паралелограма је збир квадрата дијагонала једнак збиру квадрата страна).

Једнакост (2) се једноставно доказује, применом тврђења (1), јер се дијагонале паралелограма полове. И обратно, лако је доказати да тврђење **2.** повлачи тврђење **1.**

Тврђења **1.** и **2.** су привлачила пажњу многих математичара од антике па до данашњих дана. Била су повод за многа уопштавања у еуклидској геометрији. Нашла су своја места и неким другим областима математике. Једнакост паралелограма је постала један од стубова на коме стоји дефниција Хилбертових простора.

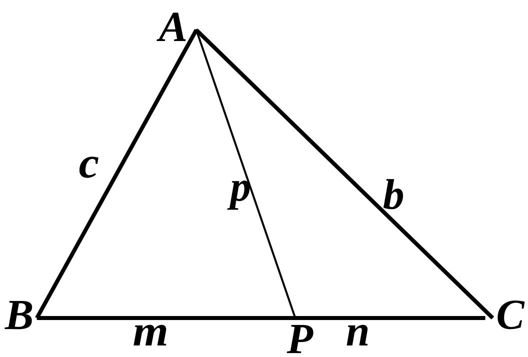
Наводимо сада нека уопштења једнакости паралелограма у самој еуклидској геометрији. После ћемо приказати колико је она присутна у другим савременим областима математике. Она није само једна метричка релација у еуклидској геометрији. У њој је основа паралелност, појам који улази у аксиоме еуклидске геометрије.А видећемо да она улази у основе Хилбертових и Банахових простора.

3. Уопштење Аполонијеве теореме (Стјуарт, [1]).

За троугао ABC са дужинским елементима, као на сл.3,

$$d(A,B) = c,\, d(B,C) = m + n,\, d(C,A) = b,\, d(A,P) = p$$

важи једнакост



Слика 3

(3) $$a\left(p^2 + mn\right) = b^2 m + c^2 n\,.$$

За $m = n$ добијамо Аполонијеву Теорему **1.** Ово је значајно тврђење јер се из (3) може одредити p у функцији страница троугла и одсечака m и n. Најлакше је доказати ову теорему применом косинусне теореме:

Нека је угао између p и n θ и угао између p и m θ' тако да је $\theta + \theta' = \pi$. Тада је, на основу косинусне теореме

$$b^2 = p^2 + n^2 - 2pn\cos\theta$$

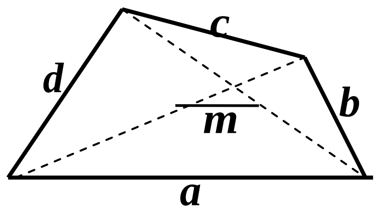
и

$$c^2 = p^2 + m^2 - 2pm\cos\theta' = p^2 + m^2 + 2pm\cos\theta .$$

Множењем прве једнакости са m и друге са n лако се елиминише $\cos\theta$ сабирањем добијених једнакости и добија (3).

4. Уопштење Аполонијеве једнакости паралелограма на четвороугао (Амир-Моез и Д. Хамилтон, [2]).

Нека је m дужина дужи која спаја средишта дијагонала чије су дужине d_1 и d_2 четвороугла са дужинама страница a,b,c,d као на сл.4.



Слика 4.

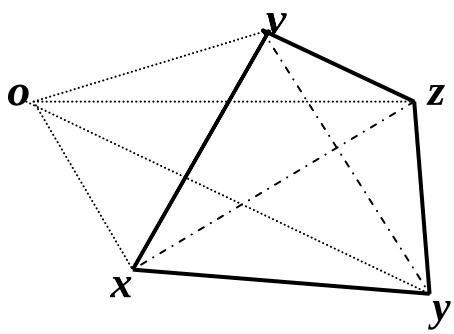
Тада је

(4) $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1{}^2 + d_2{}^2 + 4m^2$$

Ако је $m = 0$ онда се дијагонале четвороугла полове па је овај четвороугао паралелограм. Тврђење (4) се у том случају своди на једнакост паралелограма. Амерички професор геометрије **О. Ботема** 1979. уопштио је ово тврђење на симплексе виших димензија.

5. Уопштење Аполонијеве једнакости паралелограма на четвероугао у произвољном *n*-димензионом еуклидском простору (A.J.Даглас, [3]).

Нека су x, y, z, v четири тачке једне равни у простору E_n са нормом $\|\cdot\|$. Нека $\|x-y\|$ означава растојање између тачака x и y, што значи да су $\|x-z\|$ и $\|y-v\|$ дужине дијагонала овог четвороугла.



Слика 5

Тада је

$$\|x-y\|^2+\|y-z\|^2+\|z-v\|^2+\|v-x\|^2=\|x-z\|^2+\|y-v\|^2+\|x+z-y-v\|^2 .$$

Према томе, сабирак $4m^2$ из прдходног тврђења **4.** једнак је

$$\|x+z-y-v\|^2 .$$

6. Просторно уопштење Аполонијеве једнакости паралелограма (Х. Ганадијан, [4]).

Нека је $\{x,y,z\}$ скуп линеарно независних вектора у тродимензионом простору E_3. Паралелопипед конструисан над ова три вектора има 4 вектор дијагонале:

$$d_1=x+y+z,\quad d_2=x+y-z$$
$$d_3=x+z-y,\quad d_4=y+z-x.$$

Нека је $\|x\|$ интезитет вектора x.Тада је

(5) $$\|d_1\|^2+\|d_2\|^2+\|d_3\|^2+\|d_4\|^2=4(\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2),$$

тј. важи тврђење:У паралелопипеду је збир квадрата дијагонала једнак је збиру квадрата страна. Ако се уведе индексно обележавање

$$\{x,y,z\}=\{x_1,x_2,x_3\}$$

онда се (5) може записати са

(6) $$\sum_1^4\|d_i\|^2=4\sum_1^3\|x_j\|^2 .$$

Овај запис је погодан за даље уопштавање на простор E_n (видети [4]).

Ово су до сада била нека значајна уопштења Аполонијеве једнакости паралелограма у еклидској геометрији. Сада ћемо се осврнути на оно шта она значи у неким апстрактним просторима. Тек тада ћемо видети колико је то моћна теорема у математици.

Ово тврђење (овај Аполонијев идентитет) има историјски значај за **функционалну анализу**. Показало се да је тврђење *једнакости паралелограма* фундаментално за дефинисање **Хилбертових простора** у класи нормираних простора.

Године 1935. велики светски научници 20.века, математичари и теоријски физичари, са фундаменталним прилозима у *квантној механици, теорији поља, рачунарским наукама, економским наукама* и другим наукама, **Паскал Џордан** (1902-1980) и **Џон фон Нојман** (1903-1957) доказали су следећи темељни резултат функционалне анализе. Ради лакшег разумевања њихово тврђење ћемо исказати само у реалном векторском просторима, векторском простору над пољем R, мада оно важи и у случају да је X над пољем комлексних бројева Z.

7. Аполонијева једнакост паралелограма у нормираним просторима (Џордан-фон Нојманова теорема, [5]).

Нека је X реалан нормиран простор са нормом $\|\cdot\|$. Потребан и довољан услов да постоји функционал $(\cdot,\cdot): X^2 \to R$ са особинама

1) $(x,y)=(y,x), \quad (x,y\in X)$,
2) $(x,x)\geq 0, \quad (x,x)=0 \Leftrightarrow x=0, \quad (x\in X)$,
3) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y), \quad (\lambda\in R, x\in X)$,
4) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y), \quad (x_1,x_2,y\in X)$

је важност следећег идентитета

(7) $$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2, \quad (x,y\in X).$$

Јасно је да је идентитет (7) Аполонијева једнакост паралелограма (1) у ширем амбијенту. Напоменимо да се функционал $(\cdot,\cdot)$ који испуњава услове 1)-4) назива ***скаларни производ*** у нормираном простору X, а нормиран простор са скаларним производом се назива ***Претхилбертов простор*** (или ***еуклидски простор***), а ако је простор X комплетан онда се такав простор зове ***Хилбертов простор.***(Помињани еуклидски простор E_n је Хилбертов простор).

Дакле, скаларни производ $(\cdot,\cdot)$ на X^2 сагласан са нормом простора(тј. за који је$(x,x)=\|x\|^2$) постоји тада и само тада ако важи (7). Скаларни производ је главни ослонац у изградњи теорије Хилбертових простора и теорије линеарних оператора у њима.Дакле,Хилбеетов простор као поткласа нормираних простора је основни амбијент *квантне механике*.

Колики је значај Аполонијеве једнакости паралелограма, односно **Џордан – фон Нојманова** критеријума за егзистенцију скаларног производа говоре и следеће чињенице.

Румунски математичар **В. Истратеску** је 1987. објавио књигу од 900 страна под називом *„Inner Product Structures”*, [10], а корице те књиге је илустровао са једним паралелограмом и 6 квадрата над странама тог паралелограма и над његовим дијагоналама. У тој књизи налазе се прилози српских математичара: **Светозара Курепе, Часлава Станојевића, Александра Торгашева** и **Павла Миличића.**

Израелски математичар **Дан Амир** је 1986. објавио књигу *“Charakterizations of inner product spaces”* [9], у којој су хронолошки, од 1889. до 1985., наведена 250 критеријума егзистенције скаларног производа у нормираном простору X. Скоро сви ти критеријуми су објављени у другој половини 20. Врло су различити али се скоро сви у својим доказима ослањају на Џордан -фон Нојманов (Аполонијев) идентитет. Да се види колико се различити критеријуми могу направити коришћењем Џордан-фон Нојманове теореме наводимо два критеријума из књиге Дан Амира:

1) Нормиран простор X је еуклидски ако и само ако је реална функција $\varphi(t)=\|x+ty\|^2$ квадратна функција за $x,y\in X$, $y\neq 0$,

2) Простор X је еуклидски ако и само ако функција

$$\varphi(x,y,z)=\|x+y+z\|^2+\|x+y-z\|^2-\|x-y-z\|^2-\|x-y+z\|^2$$

не зависи од z за $x,y\in X$.

Међу критеријумима о којима је реч у наведеној књизи налазе се и резултати српских математичара: **Часлава Станојевића, Лазара Певца и Павла Миличића.**

8. Функционалне једначине Аполонијевог типа (С. Курепа, [6]).

Аполонијева *једнакост паралелограма* инспирисала је неке математичаре 20. века да у векторском простору X над телом R или K, под одређеним условима, нађе опште решење функционалне једначине

(8) $$f^2(x+y)+f^2(x-y)=2f^2(x)+2f^2(y).$$

У случају да је X реалан еуклидски простор (нормиран простор са скаларним производом који је сагласан са нормом) једно решење ове једначине је свакако $f=\|\cdot,\cdot\|$ (тврђење 7.).

С.Курепа је **1965.** у случају да је $K=Z$ и под условом да је

(9) $$f^2(zx)=|z|^2 f(x),\, z\in Z,\, x\in X$$

показао да постоји билинеарни функционал $B:X^2\to Z$ (линеаран по првом аргументи антилинеаран по другом аргументу) тако да је $B(x,x)=f^2(x)$. За детаље погледати [6].

9. Уопштење Џон-фон Нојмановог идентитета на *квази еуклидске просторе* (P.M.Milićić, [7], [8]).

Нека је X реалан, *гладак*, *стриктно конвексан* и *рефлексиван* нормиран простор, не мора да буде еуклидски. П. Миличић је 1971. показао да се на X^2 можа, на јединствен начин, дефинисати тзв. *полускаларни производ* вектора, [8]. Наиме, то је функционал $g(\cdot,\cdot)$, који испуњава следеће услове:

$$g(x,x)=\|x\|^2 \quad x\in X,$$
$$g(\alpha x,\beta y)=\alpha\beta g(x,y) \quad x,y\in X;\ \alpha,\beta\in R$$
$$g(x,y+z)=g(x,y)+g(x,z) \quad x,y,z\in X$$
$$|g(x,y)|\le\|x\|\|y\| \quad x,y\in X.$$

У случају да је X еуклидски простор, тј. да у њему постоји скаларни производ $(\cdot,\cdot)$, тада је $g(x,y)=(x,y)$ за све $x,y\in X$.

Лако је доказати да је Џордан –фон Нојманов идентитет (7) у еуклидским просторима еквивалентан идентитету

(10) $$\|x+y\|^4-\|x-y\|^4=8(\|x\|^2+\|y\|^2)(x,y) \quad \forall x,y\in X .$$

Зато је идентитет

(11) $$\|x+y\|^4-\|x-y\|^4=8(\|x\|^2 g(x,y)+\|y\|^2 g(y,x)) \quad x,y\in X$$

уопштење идентитета (10), односно уопштење идентитета (7) у нормираном простору X, без обзира постоји ли у њему скаларни производ или не. Може се показати да простор низова l^4 није еуклидски простор али испуњава услов (11).

Простор X у коме важи идентитет (11) називамо *квази еуклидски простор*. Квази еуклидски простори су општији амбијенти од еуклидских простора. Али они су „близки“ еуклидским просторима, јер се у њима могу дефинисати многи појмови еуклидске геометрије као што су ортогоналност вектора, угао између два вектора, површина паралелограма и др.

Литература

[1] M. Stewart. *Some General Theorems of Considerable Use in Higher Part of Mathematics,* Edinburgh, 1746. Kessinger Publishing, LLC (September 10, 2010)

[2] Ali R. Amir-Moez and J. D. Hamilton. *A Generalized Parallelogram Law,* Math. Mag. **49**(1976), 88-89.

[3] A. J. Douglas, A Generalization of Apollonius' Theorem, The Mathematical Gazette, Vol **65**, No 431 (1981), 19-22.

[4] H. Ghannadian, *A Generalization of Apolonius' Theorem*, Pi Mu Epsilon, Vol. **6**, Number 9 (1978), 521-524.

[5] P. Jordan and J. Von Neuman. *On Inner Products in Linear, Metric Spaces,* Annals of Mathematics, **36**(3)(1935), 719-723

[6] S. Kurepa. *Quadratic and Sesquilinear Functionals*, Glasnik Mat. Fiz. i Astr. Ser III, **20** (1965), 79-92.

[7] P.M. Miličić. *A Generalization of the Parallelogram Equality in Normed Spaces.* J. Math. Kyoto Univ., **38**(1)(1998), 71-75.

[8] P.M. Miličić, *Deset tema iz matematike,* Zavod za udžbenike, Beograd 2010.

[9] D. Amir. *Characterizations of Inner Product Spaces,* Operator Theory: Advances and Applications, 20 Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[10] V.I. Istratescu. *Inner Product Structures,Theory and Applications.* D.Reidel Publishig Company, Dordrecht, Holland, 1987.