

Када квадрат јесте а када није правоугаоник?

Данијела Митровић и Даниел А. Романо¹

Универзитет у Источном Сарајеву,
Педагошки факултет Бијељина

Сажетак: У овом тексту потврђујемо нивое геометријских знања ученика другог и четвртог разреда основне школе о усвојеним геометријским концептима правоугаоника и квадрата. Док је за прву групу ученика одговор на постављено питање 'никад' потпуно прихватљив ('ниво 0'), за ученике старијих разреда одговор би требало да буде резултат препознавања, промишљања и анализирања ('ниво 1').

Кључне речи: геометријско мишљење, ван Хилеови нивои, правоугаоник, квадрат

When the square is and when it is not a rectangle?

Abstract: In this paper we confirm the levels of geometric knowledge of second and fourth graders students of Elementary schools about the adopted geometric rectangles and squares concepts. While the first group of students answer to the question 'never' totally acceptable ('level 0'), for higher grades students the answer should be the result of recognition, reflection and analysis ('level 1').

Keywords: geometric thinking, van Hiele's levels, rectangle, square.

Увод

У нашем школском систему ученици се подучавају геометријским фигурама квадрата и правоугаоника у другом, трећем и четвртог разреду основне школе. По окончању другог разреда требало би да ученици могу да препознају фигуре квадрата и правоугаоника и да их разликују од других фигура (Marković and Romano, 2013). Тај ниво развоја геометријског мишљења код ученика препознајемо као 'ниви 0' по ван Хилеовој класификацији (Билбија и сар., 2009; Романо, 2009; Романо, 2009а). У четвртог разреду ученици се подучавају четвоространицима. Тај ниво разумевања геометрије означавамо као 'ниво 1'. То је ниво на којем ученици осим што препознају геометријске фигуре и разликују их од других, уочавају елементе тих

¹ e-mail: bato49@hotmail.com

геометријских фигура, знају њихова имена и међусовне односе (Билбија и сар., 2009; Романо, 2009; Романо, 2009а).

Истраживачки циљ у овом истраживању је установљавање када ученици прелазе са 'нивоа 0' на 'ниво 1'. У тој намери, користили смо се упитником о геометријским фигурама квадрата и правоугаоника. Очекивало се, што би било у складу са теоријским сагледавањем геометријског мишљења, да ученицима другог / трећег разреда основне школе правоугаоник није квадрат и обрнуто, квадрат није правоугаоник будући да се на том нивоу развоја ученици ослањају само на *визуелизацију* фигура. Даље, очекивало се да ученицима четвртог / петог разреда основне школе правоугаоник може бити квадрат и да је квадрат увијек правоугаоник, што би било у складу са теоријским процјењивањем ученичког геометријског мишљења на 'нивоу 1' – нивоу *анализирања*.

У малом емпиријском истраживању анализирани су ученичке рефлексije на три питања о правоугаоникима и квадратима и њиховој хијерархијској вези.

Теоријска заснованост

Концепти геометријских ликова су веома важни у развоју геометријског мишљења ученика. Процјењује се (Türnüklü et al., 2013) да постоје три различите ситуације у вези са геометријским појмовима. То су дефиниција (или скоро-дефиниција), слике и својства облика геометријског концепта.

Класификација четвоространика се сматра важном. Прва је хијерархијска класификација (Fujita and Jones, 2007; Fujita, 2012). Други је класификација која подразумева раздвајање четвоространика у одвојене класе према својствима које имају (De Villiers, 1994; Türnüklü et al., 2013). При прегледу литературе о овој проблематици уочавају се различите студије о ученичким перцепцијама четвоространика. Погледати, на примјер, текстове: Heinze and Ossietzky, 2002; Marković and Romano, 2013; Monaghan, 2000; Türnüklü et al., 2013.

Реализатори наставе математике у нижим разредима основне школе имају велику одговорност у квалитетном развоју геометријског мишљења ученика на 'нивоу 1'.

Ван Хилеови нивои геометријског мишљења

Постоји пет нивоа разумијевања геометрије по ван Хилеовој класификацији. За потребе ове студије подсећамо читаоца на прва два (Билбија и сар., 2009; Романо, 2009; Романо, 2009а).

'Ниво 0' је ниво *визуелизације*. Ученици на том нивоу искључиво на основу перцепције базирају своје мисли и на основу њих донесе одлуке, без познавања било каквих разлога. Они су у стању да препознају геометријске ликове као што тространик, четвоространик или кружница; у стању су да уочавају њихове особине; и у стању су да их разлукују од других геометријских ликова.

'Ниво 1' је ниво *анализирања*. На овом нивоу ученици осим способности уочавања, препознавања и разликовања геометријских ликова ('ниво 0') способни су да:

- уочавају, препознају и разликују елементе посматраног геометријског лика;

- знају да опишу уочене елементе као самосталне геометријске ликове; и
- установе везе између уочених елемената посматраног геометријског лика.

Појам концепта

Под концептом геометријског објекта мислимо (Franke, 2007) на категорију или класу објеката асоцираним са неким конкретним објектом. Под развојем геометријског концепта геометријске фигуре подразумевамо слиједеће:

- препознавање фигуре, знање имена те фигуре, знање тзв. скоро-дефиниције те фигуре, препознавање других објеката исте категорије као и препознавање карактеристика категорије ових објеката ('ниво 0' по ван Хилеовој класификацији);
- препознавање карактеристика елемената објеката ове категорије и препознавање особина ових карактеристичних елемената и њихових међусобних односа ('ниво 1' по ван Хилеовој класификацији).

Дакле, разумијевање концепта неког геометријског објеката експонира се (Новаковић и Романо, 2013) посредством слиједећих способности:

- препознавање облика,
- знање имена облика,
- способност уочавања елемената тог облика,
- способност формирања тзв. скоро-дефиниције тог облика,
- способност препознавања других елемената унутар категорије истих објеката, и
- способност препознавања и именовања већине карактеристика изабране категорије.

Правоугаоник и квадрат

Четвоространик је многостраник са четири странице. (Дакле, концепт многостраника претходи увођењу концепта четвоространика. Са појмом многостраника ученици се упознавају у другом разреду основне школе.) Четвоространике класификујемо (De Villiers, 1994; Fujita and Jones, 2007; Fujita, 2012) према слиједећим критеријима:

(ПС) *Број парова паралелних страница четвоространика:*

ПС0: Четвоространик нема паралелних страница;

ПС1: Четвоространик има један пар паралелних страница (*трапези*);

ПС2: Четвоространик има два пара паралелних страница (*паралелограми*).

(ПУ) *Број правих углова у четвоространику:*

ПУ0: Четвоространик нема прави угао;

ПУ1: Четвоространик има један прави угао;

ПУ2: Четвоространик има два права угла; и

ПУ4: Четвоространик има четири права угла (*правоугаоници*).

(СС) *Међусобни однос сусједних страница четвоространика:*

СС0: Четвоространик нема једнаких сусједних страница;

СС1: Четвоространик има један пар једнаких сусједних страница;

СС2: Четвоространик има два пара једнаких сусједних страница (*делтоиди*).

Може се провјерити да је сваки правоугаоник истовремено и паралелограм. Обрнуто не мора бити: Има паралелограма који нису правоугаоници. На примјер, ромб и ромбоид код којих унутрашњи углови нису прави. Дакле, паралелограм је правоугаоник ако си му унутрашњи углови прави. Квадрат је правоугаоник код кога су сусједне странице једнаке дужине. Из изложеног дедукујемо:

Квадрат је паралелограм код кога су сусједне странице једнаке дужине и унутрашњи углови прави.

Квадрат је делтоид код кога су унутрашњи углови прави.

Квадрат је ромб код кога су унутрашњи углови прави.

Методологија

За потребе ове иницијалне студије, испитаници су били ученици другог, трећег и четвртог разреда² основне школе „Боривоје Ж. Милошевић“ у Крупњу (Србија). Свакој од те три скупине понуђене су изјаве:

(а) *Када ће правоугаоник бити квадрат?* (Heinze and Ossietzky, 2002; стр. 3-85)

(б) *Ако је геометријска фигура квадрат, онда је она правоугаоник.*

(в) *Ако фигура није правоугаоник, онда није ни квадрат.*

Наш истраживачки циљ био је установљивање и разумијевање ученичких рефлексива на горње изјаве. Разговор са одабраним ученицима реализовао је први аутор уз помоћ учитеља поменуте основне школе. Упитник (који је осим ових питања, садржавао и многа друга питања) развијен је у намјери да се идентификује ученичко препознавање и разумијевање значења исказаних изјава. Очекивало се да ниво геометријског мишљења ученика другог разреда буде процијењен као 'ниво 0', али се очекивало да ниво геометријског разумијевања бар неких од ученика четвртог разреда буде процијењен као 'ниво 1'.

Резултати истраживања

Ученичке рефлексиве на питање:

(а) *Када ће правоугаоник бити квадрат?*

ВРСТА РЕФЛЕКСИЈЕ	II	%	III	%	IV	%
Никад	21	84.0				
Не знам	4	16.0	3	12.0		
Кад су му сусједне странице једнаке дужине			22	88.0	25	100.
УКУПНО	25	100.	25	100.	25	100.

Табела 1 (Дистрибуција рефлексива на питање (а): $N_2 = N_3 = N_4 = 25$)

Као што се и очекивало, ученици другог разреда основне школе виде квадрат и правоугаоник као двије различите геометријске фигуре (21 од 25 испитаника). Према томе, њихов одговор „Правоугаоник није квадрат.“ на питање „Када ће

² Школски систем основне школе у Србији састоји се од осам разреда. Дакле, њихов први разред програмски одговара нашем другом разреду.

правоугаоник бити квадрат?“ је прихватљив одговор унутар тзв. 'Школске математике за други разред'. На исто питање ученици трећег (22 од 25 испитаника) и четвртог (25 од 25 испитаника) разреда такође исправно конструишу одговор „*Када су му сусједне странице једнаке дужине.*“ у 'Школској математици за трећи / четврти разред'.

Ученичке рефлексije на узјаву

(в) *Ако је геометријска фигура квадрат, онда је она правоугаоник.*

ВРСТА РЕФЛЕКСИЈЕ	II	%	III	%	IV	%
То није тачно	23	51.11	19	27.94	-	-
Да, то је тачно			24	35.29		
Квадрат није правоугаоник	-		-		18	26.87
Није тачно формулисано	2	4.44	2	2.94	10	14.93
Ова тврдња није тачна	20	44.44	16	23.53	4	5.97
Не може да се реши	-		-		8	11.94
Ова изјава је на први поглед изгледала могућа, али се после показало да је немогућа	-		-		7	10.45
Није тачно. Квадрат има једанке све четири странице а правоугаоник има две једнаке наспрамне странице					3	4.48
Ниједан квадрат не може бити као правоугаоник, јер квадрат има четири исте странице а правоугаоник нема					4	5.97
За ову изјаву је потребно размишљање					2	2.99
Није тачно. Заједничко им је да имају четири темена, четири угла и четири странице али код квадрата су једнаке све четири а код правоугаоника нису			7	10.29	11	16.42
УКУПНО	45	100.	68.	100.	67	100.

Табела 2 (Дистрибуција рефлексija на питање (б): $N_2 = 45$; $N_3 = 68$; $N_4 = 67$)

Међутим, шта се дешава, ако питање (а) трансформишемо у хипотетичко питање (б)? Сви (45 од 45 испитаника) ученици другог разреда и знатан број (преко 51%) ученика трећег разреда не препознаје квадрат као специјалан случај правоугаоника. Само 24 од 68 испитаника (или 35.29%) ученика трећег разреда уочава ову хијерархијску функционалну вези између правоугаоника и квадрата. Овај податак, у упоредби са аналогним податком из Табеле 1 требало би да сугерише закључак да ученицима није на прихватљив начин интерпретирана детерминација правоугаоника. Ову хипотезу оснажују збуњени одговори ученика четвртог разреда: Иако њихови одговори сугеришу истраживачима да се ниво разумијевања геометрије код ових ученика налази унутар 'нивоа I', они још увијек нису у могућности да консолидују своја размишљања. Могућа објашњења су: Ученици су заборавили шта су подучавани у трећем разреду, или поменути геометријски садржаји су интерпретирани тако да нису подстицали процес разумијевања

хијерархијске динамичке везе између правоугаоника и квадрата па се процес консолидације знања није могао ни окончати.

Ученичке рефлексije на узјаву

(в) *Ако фигура није правоуаоник, онда није ни квадрат.*

ВРСТА РЕФЛЕКСИЈЕ	II	%	III	%	IV	%
А шта је онда?	12	48.0				
Да, то је тачно			21	84.0		
Како може да не буде ништа?	9	36.0				
Ко то може да докаже?					20	80.0
Ако није правоугаоник можда јесте квадрат	4	16.0	4	16.0		
Која то фигура може да буде?					5	20.0
УКУПНО	25	100.	25	100.	25	100.

Табела 3 (Дистрибуција рефлексija на питање (в): $N_2 = N_3 = N_4 = 25$)

Изјава (в) је контрапозиција изјаве (б), те је њој логички еквивалентна. Дакле, ако ученици разумију изјаву (в) као трансформирану изјаву (б), онда би ученичке рефлексije на ову изјаву требало да имају приближно исту дистрибуцију. Одговори ученика другог разреда су потпуно прихватљиви обзиром на парадигму њиховог математичког знања јер ученици овог разреда не познају друге четвоространике. Ову констатацију ослањује 16% потпуно разумљивог промишљања тих ученика: У дисјунктном скупу од двије фигуре, ако нешто није правоугаоник онда јесте квадрат. Употреба слогана 'можда јесте квадрат' само нам потврђује неразвијеност процеса у њиховим когнитивним равнима са геометријским садржајима. Знатан број (21 од 25, или 84%), испитаника трећег разреда експонира разумијевање ове изјаве иако нису свијесни да је ријеч о контрапозицији. Из рефлексija ученика четвртог разреда препознајемо виши ниво, 'ниво 1', геометријског мишљења али без консолидованог знања о међусобним односима четвоространика.

Закључак

У закључку овог текста нудимо двије опсервације:

(1) Питање *Када ће правоугаоник бити квадрат?* има два прихватљива одговора: *никад* за ученике другог разреда и *понекад* за ученике четвртог разреда.

(2) Ово парцијално истраживање потврђује нашу увјереност да је тежиште проблема консолидације геометријских знања о четвоространицима од ученика нижих разреда основне школе помјерено према проблему математичко-методичких знања њихових учитеља.

Литература

- [1] Билбија, Д., Миланковић, Ј., Романо, Д.А. и Руњић Н. (2009): Теорија ван Хиелеових о разумијевању геометрије, *MAT-KOL*, XV(2): 5-17

- [2] De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, **14**: 11-18.
- [3] Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule – Mathematik Primar- und Sekundarstufe*. 2. Auflage. München: Spektrum Verlag.
- [4] Fujita, T. (2012). Learners' Level of Understanding of Inclusion Relations of Quadrilaterals and Prototype Phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, **31**: 60-72.
- [5] Fujita, T. and Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing, *Research in Mathematics Education*, **9**(1&2), 3-20.
- [6] Heinze, A. and Ossietzky, C. (2002). "...Because a Square is not a Rectangle" Students' Knowledge of Simple Geometrical Concepts When Starting to Learn Proof. In A. Cockburn ve E. Nardi (Eds.): *Proceedings of The 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3: 81-88), PME. University of East Anglia, Norwich.
- [7] Marković, Z. and Romano, D.A. (2013): Gaining Insight of How do Elementary School's Students in The Republic of Srpska Conceptualize Geometric Shape of Parallelogram, *IMVI Open Mathematical Education Notes*, **3**: 31- 41
- [8] Monaghan, F. (2000). What Difference Does It Make? Children's Views of the Differences Between Some Quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, **42**(2):179-196.
- [9] Новаковић, Д. и Романо, Д.А. (2013): Концепти геометријског појма кружнице код предшколске дјеце; *ИМО – Истраживање математичког образовања*, Вол. **V**, Број 9: 5-12
- [10] Романо, Д.А. (2009): Теорија ван Хиелеових о подучавању геометрије; *Методички обзори*, Vol. **IV** (1-2), No. 7-8: 95-103
- [11] Романо, Д.А. (2009а): О геометријском мишљењу; *Настава математике*, **LIV** (2-3): 1-11
- [12] Türnüklü, R., Akkaş, E. N. and Alaylı, F.G. (2013): Mathematics Teachers' Perceptions of Quadrilaterals and Understanding the Inclusion Relations, In: Ubuz, B., Haser, Ç. and Mariotti, M.A. (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 705-714), Middle East Technical University, Ankara