MAT-KOL (Banja Luka) ISSN 0354-6969 (o)
XXII (2)(2016), 75-90 ISSN 1986-5828 (o)
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

О заблудама и тешкоћама у неким математичким расуђивањима

Павле М. Миличић

pavle.milicic@gmail.com

У историји развитка наука па и математике пуно је било парадоксалних закључака, који су касније уочени и исправљени, Пуно је било недоумица, тешкоћа и препрека у развоју математике и егзактних наука које није било лако отклонити. Неке су откриване и отклоњене после више векова.

У решењима неколико одабраних примера указаћемо на неке тешкоће и замке које настају због нетачног коришћења почетних услова или нетачног коришћења одговарајућег усвојеног математичког тврђења на коме се базира решавање проблема.

Почињемо са два старо- грчка проблема.Први проблем се најчешће, у литератури, помиње као ***Зенонова апорија о Ахилу и корњачи“*** а други као ***Аристотелов точак***.

Појмови **апорија** и **парадокс** су грчког порекла и немају једнозначно одређење, грубо речено, ради се о тачном или лажном расуђивању које доводи до неочекиваног закључка.У руској „**Математичкој енциклопедији“** оба појма су увршћена под појам **антиномије.** Код **Вујаклије**: „антиномија је противуречност закона са самим собом“. У логици: „противуречност судова, тезе и антитезе, који се узајамно искључују“, код **Канта: „**противуречност која се јавља при примени закона чистог разума на чулни свет“.

У старијој математичкој литератури често су појмови *апорија* и *парадокс* синоними. У новијим математичким књигама *апорија* има значење лажног закључивања, док се *парадокс* везује за неочекивани резултат неког закључивања. Најбоље га описује реченица: „**наизглед апсурдно, али ипак истинито.** У сваком случају за неочекиван резултат до кога се долази тачним или нетачним расуђивањима, најчешће се употребљава реч *парадокс*. Једна од првих антиномија)“**Знам да ништа не знам“** приписује се грчком филозофу **Сократу**.

Апорије и парадокси су подстицали на размишљања и на постављање нових проблема па су често су доводиле до побољшања неких дефиниција у наукама као што су филозофија и математика. На пример чувени **Раселов парадокс** у вези са скуповима довео је до побољшања теорије скупова, довео је до аксиоматике **Канторове** наивне теорије скупова.

У математику и филозофију ови појмови (апорија и парадокс) су ушли преко старогрчког филозофа **Зенон из Елеје** (око 490–око 430. god. п.н.е.). Зенон је био антички филозоф елејске школе коју је основао **Парменид** (грчки филозоф живео око 500 г.п.н.е., из Елеје у јужној Италији. Он је био творац тзв. *монистичког материјализма*. Тврдио је да је битак (стварност) ***једно*** а настајање или промена је пуки привид. Ако нешто настаје оно настаје из битка или небитка. Ако настаје из битка онда оно јесте битак па не настаје а ако настаје из небитка оно је ништа јер из ништа настаје ништа. Све је ***једно.***

Зенон покушава да побије филозофију питагорејаца. Поред две најпознатије Зенонове апорије **„Дихотомија“** и **„Ахил и корњача“**, које су, више од два миленијума, задавала много мука математичарима и филозофима, чувене су биле још три Зенонове апорије: *парадокс стреле*, *парадокс мноштва* и *парадокс празнине*.

Највећи антички филозоф **Аристотел** (384-322.п.н.е.) приписао је Зенону откриће **дијалектике,** вероватно зато што се овај први бавио логички добро вођеним побијањем другачијих становишта, побијањем логички извођених последица неких питагорејских теза. Дијалектика се често поистовећује са свођењем на апсурд (*reductio ad absurdum*), који нам је свима познат у математици.

Прелазимо сада на неке Зенонове парадоксе.Они су вековима били занимљиви како математичарима тако и филозофима.Побуђивали су сумњу у тачност неких знања математике и филозофије.Подстицали су на размишљања, подстицали су на увођење нових дефиниција у тим областима.

1. Две Зенонове апорије.

(1) У дихотомији (дељење на два дела који се међусобно искључују) Зенон „доказује“ да *кретање не постоји*, да је немогуће. Он тврди: „Ако би једна тачка (ствар) требало да пређе из тачке $\boldsymbol{A}$ у тачку $\boldsymbol{B}$ по правој линији $\boldsymbol{AB}$, тачка би прво морала да дође у тачку $\boldsymbol{B_1}$ која је на средини дужи $\boldsymbol{AB}$, али, да би дошла у тачку $\boldsymbol{B_1}$ она мора доћи у тачку $\boldsymbol{B_2}$ која је на средини дужи $\boldsymbol{AB_1}$. Слично добијамо тачку $\boldsymbol{B_3}$, и тд, без краја“, сл.1. Према томе, Зенон закључује, „Кретање не може ни да почне па га и нема“.

A-----B_3-----B_2 ----------B_1 -----------------------B

Слика 1.

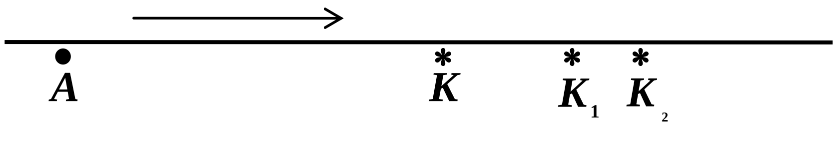
У овом случају код Зенонова закључивања постоји проблем односа *потенцијалне бесконачности* и *актуелне бесконачности*. Он у ствари тврди да се дуж коначне дужине може поделити на бесконачно много дужи од којих је свака коначне дужине, што је немогуће.

Осим тога, напоменимо, да у старој Грчкој, па чак и у Еуклидово време, није постајао тачан појам *кретања.* Еуклид је *подударност* у својим **Елементима** дефинисао кретањем за које није имао дефиницију, користио је интуитивни појам кретања.

Иначе се, данас, кретање тачке P у простору E_3 (Еуклидском простору) дефинише као *непрекидно пресликавање* $t \mapsto P_t$ континуалног скупа временских тренутака T (неког скупа релних бројева) у скуп неких тачака P у E_3, који образује тзв. *путању* тог кретања.

У вези са горњим проблемом постоје тренуци $t_1, t_2, t_3, \cdots, t_0$ такви да за сваки $n \in N$ важи $t_n \mapsto B_n$ а пошто тачке B_n конвергирају тачки A то је $t_0 \mapsto A$, и $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ па у свакој олколини тачке A постоји нека средина B_n.

2) Ипак, најпознатији Зенонов парадокс је **Ахил и корњача.** (У литератури је више познат као „Зенонов парадокс“, од „Зенонове апорије“). У Зеноново време сматрало се да је Ахил био најбржи човек на свету. Зенон тврди: *Ако Ахил и корњача крећу у истом смеру, са константним брзинама, по правој линији, с тим што корњача има предност од* d метара *испред Ахила, онда Ахил никад неће стићи (и престићи) корњачу*,сл 2. (Видети слику).



Слика 2

Добро је познат Зенонов „доказ“ како Ахил не може стићи корњачу. Сличан је његовом доказу дихотомије. Али у Зеноново доба било је великих тешкоћа да се његова тврдња оспори. Ипак, мислим, да се могла оспорити касније, у доба **Архимеда** (287-212 г.п.н.е). Наиме, Аристотел је у својој *Физици* констатовао да, ако се смањује дужина пређеног пута при константној брзини, тада се и време за прелаз те дужине смањује. Осим тога, Архимед је 212 п.н.е. (Зенон је живео у петом веку п.н.е) извео образац за збир бесконачне геометријске прогресије са количником мањим од 1. На основу ове две чињенице могло се је доказати и у Зеноново време (а није, зашто?), да Зенонова тврдња у „Ахилу и корњачи“ није истинита. Ево једног таквог доказа:

Нека Ахил полази из тачке A а корњача из тачке K истовремено, константним брзинама, корњача брзином v метара у секунди а Ахил константном брзином од vx метара у секунди, где је $x > 1$. Ако је почетно растојање између њих било d метара, онда да би Ахил дошао у тачку K, из које је кренула корњача потребно му је $t_0 = \frac{d}{vx}$ секунди . За то време корњача је прешла дужину пута $\frac{d}{vx}.v = \frac{d}{x}$ метара и стигла у неку тачку K_1. Од тачке K до тачке K_1 Ахилу је потребно $t_1 = \frac{d}{x}\Big/ xv = \frac{d}{v}.\frac{1}{x^2}$ секунди. За прелаз следеће етапе Аилу је потребно $t_2 = \frac{d}{v}.\frac{1}{x^3}$ секунди и тд. Збир свих секунди у којима је Ахил био иза корњаче износи

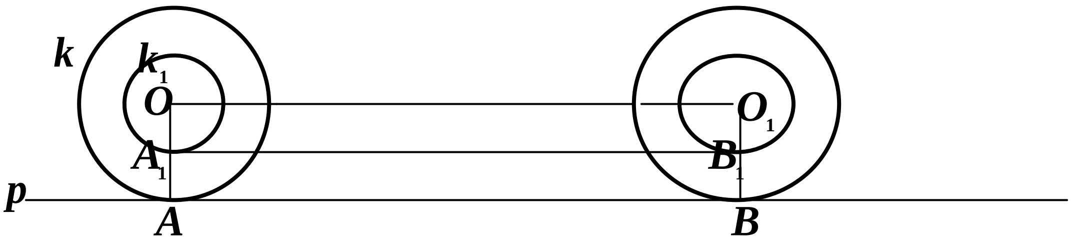
$$\frac{d}{v}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{x^n} = \frac{d}{v}.\frac{1}{x-1},$$

што је коначан број који негира Зенонову тврдњу да Ахил никада не достиже корњачу.

Али, све у свему, без сумње,**Зенонова** закључивања су потстакла на велика размишљања поколења математичара, физичара и филозофа.Несумњиво је да су Зенонова размишљања утицала на математичку мисао многих генерација. Зато се **Зенон,** и због тога што је основао дијалектику, сматра једним од највећих генија грчке мисли.

(2) Аристотелов точак. Проблем, тзв. **Аристотеловог точка**, приписује се Аристотелу јер га је он објавио у својој *Физици*, и није сасвим јасно да ли га је он поставио или неко други.

Формулисаћемо овај проблем у апстрактном геометријском облику, иако је он у изворној појави дат у материјалном облику. Наиме, нека се круг k са центром O, дужине полупречника R котрља без клизања по правој p у равни круга,сл.3. Додирна тачка A круга k са правом p (која је непокретна у односу на круг), при томе, описује један лук(тзв. *циклоиду*) док поново не падне на праву p, у тачку B тако да је (због котрљања без клизања) $d(A,B)=2R\pi$.



Слика 3.

Центар круга k,тачка O, после пуног окретаја круга, дође у тачку O_1 тако да се центар O кретао дуж праве OO_1 и да је $d(O,O_1)=2R\pi$. Нека је A_1 фиксирана тачка на пречнику OA и k_1 круг са полупречником $d(O,A_1)=r<R$. При пуном обртају круга k и тачка A_1 је направила пун обртај и прешла у неку тачку B_1 на дужи O_1B тако да је $d(O,A_1)=d(O_1,B_1)$. Према томе важи једнакост

$$d(A_1,B_1)=d(O,O_1)=2r\pi.$$

Будући да је још

$$d(A,B)=d(O,O_1)=2R\pi$$

то је $r=R$!Како је то могуће?! Вековима је то био велики проблем.

Неки одговор на ово питање, постављено у другом „материјалном“ облику, дао је још Аристотел у свом раду *Проблеми механике*. Наиме, он је кругове k и k_1 замишљао као два тока чврсто везане један за други (као аутомобилски точак и фелма на њему), а точак k се котрља без клизања по правој p. Његово решење није задовољило касније математичаре и механичаре који су били заокупљени решавањем апстрактног случаја. **Галилео Галилеј** (1564-1642) је у свом раду *„Беседе из механике“*, уместо точкова, узимао правилне многоугле, да би дошао до приближног решења. Али, тек је 1634. г. велики француски математичар, један од четворице оснивача француске академије наука, **Робервал** (1602- 1675), дефинитивно решио тај проблем. Ствар је у томе да круг (точак) k_1 поред котрљања мора и да проклизава, разумели ми то или не!. А није лако са разумевањем прихватити то решење.

Напоменимо овде да тачка A приликом описаног поступка (котрљања без клизања) описује познату и веома значајну, у математици и механици, криву тзв. *циклоиду,*коју је први 1590.г тако назвао и конструисао **Галилеј**. Она је у првој половини седамнаестог века, пре **Њутна** (1643-1727) и **Лајбница** (1646-1716), била главна крива којом су се бавили (и međусобно свађали око приоритета) велики математичари тога доба, **Декарт** (1596-1650) **, Ферма** (1601-1665) **,Торичели** (1608-1647) и **Робелвил** (1602-1675).Тада су (на циклоиди) откривани први рудименти диференцијалног и интегралног рачуна. Њене (циклоидине) диференцијалне и интегралне особине (конструкција тангенте, израчунавање дужине, израчунавање површине испод првог лука,запремина обртног тела које настаје њеним обртањем око $x-$осе). Око приоритета открића у вези са том кривом између ових математичара настале су међусобне свађе и нетрпељивости (на пример, независно један од другог су **Торичели** и **Робервал** нашли да је површина површи испод једног лука циклоиде једнака три површине круга који је производи).Сматра се да је то прва крива за коју је направљена ректификација, чија је дужина израчуната и без **Њутн-Лајбницовог** интегралног рачуна. Њену дужину израчунао је енглески астроном, физичар и математичар **Рен** (1632-1723. г.) 1658. г.Њена геометијска својства је потпуно описао **Б.Паскал** 1659.г.а њене механичке особине, њену брахистохроност **К. Хајгенс** (1629-1625) **,** што је била полазна тачка да ксније у 18. веку настане *варијациони рачун* **Ојлера** и **Лагранжа.**

Наведена Зенонова тврђења су биле праве заблуде које није било лако отклонити тада, па ни касније. Зенонова тврђења није било лако негирати ни у математици ни у филозофији. Она су тек у новом веку, много касније, у потпуности негирана. Али та негирања, решења његових тврђења нису донела никавих благодети у математици, и у науци, уопште, осим што су потстицали на размишљања и будила знатижељу. Аристотелов парадокс није био заблуда, али ни његово решење у 17. в. није донело ништа ново у математици.

(3) Решења неких старогрчких проблем која су довела до епохалних научних открића.

Сама решења наведених старогрчких проблема нису донела велики напредак нуци.За разлику од њих , решења неких других старогрчких проблема и заблуда, су направила прекретнице у науци. Свакако да је до решења тих проблема није лако било дођи.Вековима су решавани. Немогуће је овде, само и, поменути све такве проблеме чија су решења мењала свет математике, астрономије, физике, механике и тд. Наведимо само два чувена старогрчка проблема без чијих решења данашња цивилизација не би била оно што јесте.

То су проблем ***Хелиоцентричног система*** у астрономији и проблем ***Петог постулата*** у геометрији**.**

Оба проблема потичу од старих Грка. Насупрот **Птоломејовом** *геоцентричном систему,***Аристарх** (310-230 п.н.е) (у 18. веку су га називали „Коперником антике“) тврдио је да је центар око ког се обрћу планете Сунце а не Земља. Али његову хипотезу је касније негирао „највећи астроном антике“ **Хипарх** (180?-125 п.н.е.), коме се веровало (само веровало без икаквог доказа) да је Земља центар око кога се окрећу планете. Ипак је остала сумња:шта је центар Земља или Сунце? А проблем Еуклидове *аксиоме паралелности* појавио се још за време **Еуклида** (око 300.г. п.н.е.)**.** Било је отворено питање: *да ли је он последица осталих Еуклидових аксиома, односно може ли се он доказати помоћу осталих Еуклидових аксиома*?.

Векови су пролазили, највећи умови света у астрономији и математици су били окупирани овим проблемима, док се нису појавили непоновљиви великани науке, блистави умови човечанства, **Н. Коперник** (1473-1543) и **Н. Лобачевски** (1792-1856) (оба су Николе и оба су словени) су својим решењима, отклонили предрасуде и заблуда које су трајале вековима.Уздрмали су научни свет планете. Отворили су нове видике науке. **Коперник** је после 14 векова оживио хелиоцентрични систем и тако створио највећу прекретницу у историји науке. **Лобачевски** је после два миленијума решио енигму, да ли је Еуклидов пети постулат независана аксиома или не.Тиме је отворио нове видике у стварању нових математичких дициплина. Појавила се **Нееуклидска геометрија, Риманова геометрија** и **Ерлагенски програм Феликса Клајна** (1872) којима се разне геометрије помоћу група трансформација постављају на исте логичке основе.

О њима и њиховим делима написане су бројне књиге о којима је овде немогуће говорити.

Наравно, нису све велике проблеме науке и цивилизације започели решавати Грци. Напоменимо да за можда највеће достигнуће цивилизације, *електрицитет,* не можемо наћи јединог проналазача. Више их је и из разних су епоха. Руски хемичар **Д.И. мендељејев** (1834-1907) је утемељио *Периодни систем хемијских елемената,*енглески природњак **Ч. Дарвин** (1809-1882) је формулисао *Теорију еволуције,* шкотски биолог и фармаколог **А. Флеминг** (1881-1955) пронашао је *пеницилин* и т.д.

Али вратимо се тешкоћама закључивања при решавању неких математичких проблема.

(4) Тешкоће заснивања основа Математичке анализе.

У 17. веку су се зачеле прве основе математичке анализе (***МА***).Савремени појмови на којима се темељи данашња ***МА*** појавили су се са велим тешкоћама.Тешкоће заснивања тих основа најбоље је описао амерички математичар, стручњак за историју и филозофију математике и математичког образовања, **Морис Клајн** (1908-1992), у својој капиталној књизи [4]. Није лако било поставити основе ***МА*** у другој половини 17. в. иако су их постављали велики математичари тог времена **Њутн** (1643-1727) и **Лајбниц** (646-1716). Основне појмови ***МА***: ***бесконачно мала*** (***бм***) и ***извод***:

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h} \quad (k = f(x_0 + x) - f(x_0), h = x - x_0)$$

тек су се уводили али са доста оскудним алатом. Још није било ни близу тачне дефиниције поља реалних бројева. Magловите су биле представе о ирационалном о негативном и о комплексном броју. Није било јасних представа о *потенцијаној бесконачности* ни о *актелној бесконачности.* Чак је **Коши** (1789-1857) један од највећих математичара света, много касније, у првој половини 19. века, каснији творац **комплексне анализе**, израз $a+b\sqrt{-1}$ називао *„количином лишене сваког смисла*" (Клајн). Чувени логичар **Огист де Морган** је 1831. тврдио да симбол $\sqrt{-a}$ нема никаквог смисла (Клајн). **Даламбер (**1717-1783) је записао: *Ако неки задатак доводи до негативног броја као решења онда то значи да су неке претпоставке у задатку лажне.*

Какав је све био неред са негативним бројевима, М. Клајн наводи да, чак у 18. веку, најбољи алгебраисти нису разликовали знак „минус" као знак операције одузимања од знака „минус" као симбола негативног броја.

МА је настала на непостојећим логичким основама аритметике и алгебре и на не потпуно јасним основама геометрије. До краја 17. в. ***МА*** као ни аритметика ни алгебра нису имале своје праве логичке основе.

Унаточ свега „осакаћени“ Њутнови и Лајбницови новоуведени појмови ***МА*** су вршили своју функцију,основе ***МА*** су заживеле. Почела је да се развија и теорија. Како?! Кад је у питању реална ***МА,*** у то време, по грчким узорима,још су се дефиниције и тврђења, најчешће, исказивале са *величинама* (дужина, површина, запремина) а не са *бројевима*.На тај начин су избегавани ирационални бројеви. Ипак новоуведени појмови су тешко прихваћани.

Појавио се епископ **Џорџ Беркли** (1685-1753) који је тврдио да Њутнова наука подржава материјализам и детерминизам те на тај начин угрожава религију. Жестоко је напао дефиницију *извод функције* као количника две изчезавајуће величине(k/h)(које прелазе у нуле). Он тврди:“*ако* k *и* h *изчезавају онда и њихов количник* k/h *изчезава и све што из њих произлази изчезава*“. Њутнове *флуксије* и бесконачно мале назива *сене нестајућих величина.*

Али и неки велики математичари тога доба нису били задовољни Њутновим и Лајбницовим дефиницијама *бесконачно мале величине* и објашњењем количника прираштаја k/h који прелази у извод функције у тачки.

Ојлер (1707-1783) је покушао да оспори Берклијеве приговоре на основе ***МА*** које су дали Њутн и Лајбниц, али није био довољно убедљив. Испало је да подржава Берклија. Он констатује да беконачно мала величина ***бм,*** како је описују **Њутн** и **Лајбниц** (*промењљива величина која може да буде мања од било које и било колико мале коначне величине)* може бити само нула. Јер, он каже “ако би она била различита од нуле, то супротно претпоставци, она не би била мања од саме себе“ (Клајн). Он је у потпуности одбацио геометрију на којој би се могла изграђивати ***МА***. Разматрао је функције формално алгебарско- аналитички. Није прихватио Лајбницове ***бм*** као величине које су мање од сваког заданог броја, различите од нуле. По **Ојлеру Лајбницов** однос k/h граничним процесом прелази у $0/0$ а $0/0$ може да има више значења јер, он каже, како је $n \cdot 0 = 0$ за сваки n, делењем са 0 добијамо $n = 0/0$. Он је тврдио да је ***бм*** h, у горњем количнику, једнака нули, што је објашњавао следећим примером. За функцију $y = x^2$ добијамо $k/h = 2x + h$, одакле се за $h = 0$ добија тачан извод, једнак $2x$.Он је, у почетку, Лајбницове ***бм*** често називао и *апсолутним нулама.*

И **Лагранж** (1736-1813) (неки историчари кажу највећи математичар 18. века) није био задовољан теоријом **Лајбницових** бесконачно малих, а ни **Ојлеровим** *апсолутним нулама.* Некоректност њихових поступака он је објашњавао на примеру однос кружног лука и одговарајуће тетиве кад угао тежи нули. Он кажа „тај однос има смисла само док су дужина лука и и дужина тетиве коначне величине, а ако обе величине изчезавају истовремено, у том тренутку оне нису величине. **Лагранж** је желео да у ***МА*** уведе грчку строгост доказивања. О његовом погледу на Њутн-Лајбницове основе ***МА*** говори његова књига *Теорија аналитичких функција* (1797), са поднасловом: *„Садржи (доказане) основне теореме диференцијалног рачуна, без коришћења* ***бм,*** *изчезавајућих величина, граничних вредности и флуксија; коришћењем алгебарске анализе коначних величина“*. Дакле, био је убеђен да му је пошло за руком да у анализи избегне појам *лимеса*, да користи само алгебру. Лагранжеово мишљење да ***МА*** представља само продужење алгебре, поткрепили су и неки други математичари тог времена.

Посебно су велике тешкоће насатале касније када је требало тачно дефинисати *непрекидност функције* у тачки, када је требало дати однос диференцијабилности и непрекидности. Велики савременици тих проблема су били у заблуди, тврдили су да из непрекидности следи диференцијабилност. То је у извесном периоду тврдио и Коши. Математички свет је био запрепашћен **Вајерштрасовим** примером примером функције која је непрекидна у свакој течки а није дифренцијабилна ни у једној тачки. Све ово наводи Клајн.

Дакле, порођајне муке основа ***МА*** заиста су биле велике али упорност је дала блиставе резултете. Интуиција великих умова (**Њутн** и **Лајбниц**), поред свих тешкоћа, вукла је напред. Настала је величанствена научна творевина која је,такође, мењала свет.

Прву коректну дефиницију граничне вредности бројевног низа дао је **Болцано** 1817. а прву граничну вредност функције у тачки дао је **Коши** 1821.у својој књизи *Курс алгебарске анализе.*

(5) Две заблуде средњошколаца.

1) Сад један средњошколски пример који опомиње на опрезност у сагледавању претпоставки.Нека су m и n природни бројеви већи од 1. Следеће резоновање приказано импликацијама изгледа коректно.

$$0<\frac{m+n}{mn}\Rightarrow^{1}\log\frac{m+n}{mn}=\log\frac{m+n}{mn}\Rightarrow^{2}2\log\frac{m+n}{mn}>\log\frac{m+n}{mn}$$

$$\Rightarrow^{3}\log\left(\frac{m+n}{mn}\right)^{2}>\log\frac{m+n}{mn}\Rightarrow^{4}\left(\frac{m+n}{mn}\right)^{2}>\frac{m+n}{mn}\Rightarrow^{5}\frac{m+n}{mn}>1$$

$$\Rightarrow^{6}m+n>mn$$

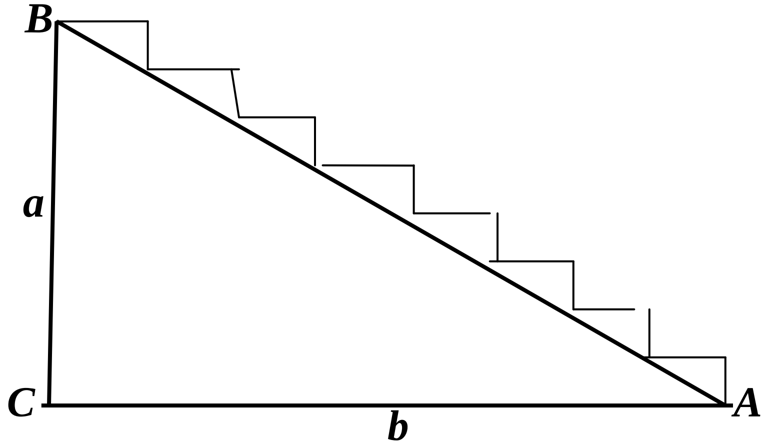
што није тачно.Где је грешка? Импликација 2 није тачна, јер је

$\frac{m+n}{mn}<1$, па је $\log\frac{m+n}{mn}$

негативан број.

2) Следећи пример показује колико је опасно у доказима математичких тврђења позивати се на *„геометријску очигледност*“.

Нека је хипотенуза AB правоуглог троугла ABC подељена на n једнаких делова и на сваком том делу уочимо правоугли троугао чије су катете паралелне са



Слика 4.

катетама троугла ABC а хипотенуза му је $\frac{AB}{n}$, сл.4. Збир дужина свих хоризонталних катета ових троуглова једнак је a, дужини катете CA, а збир свих вертикалних катета једнак је b, дужини катете CB. На тај начин је дужина изломљене линије коју образују све ове катете једнак збиру катета троугла ABC, тј једнак је $a+b$. Дакле, ако означимо збир дужина свих ових катета са S_n,онда је $S_n = a+b$ за сваки природан број n, па и ако је n колико хоћемо велики број.

Са друге стране ако се n неограничено увећава „видимо“ да изломљенљена линија, коју чине катете малих троуглова, прелази у хипотенузу AB, па њена дужина постаје дужина хипотенузе c ($S_n \to c$) троугла ABC.То би значило да је $c = a+b$!Како је то могуће? Дужина хипотенузе једнака збиру дужина катета!Где је грешка?

Грешка је у томе што није тачно да S_n тежи ка c ($S_n \to c$) кад $n \to \infty$. Јер се разлика $S_n - c = a + b - c$ не може учинити бесконачно малом величином кад $n \to 0$. Дакле није коришћена тачна дефиниција појма граничне вредности па је закључак био нетачан.

3) У вези са фигуром из 2) поставимо још једно питање: Чему тежи површина P_n, фигуре састављене од троугла ABC и свих троуглова над хипотенузом, кад $n \to \infty$? Обзиром да озломљена линија прелази у хипотенузу троугла AB кад $n \to \infty$ то се поново може наслутити да је та површина једнака површини троугла ABC тј да је једнака $\frac{ab}{2}$.

И овог пута наше запажање је тачно. Наиме површина коју ограничавају изломљена линија и хипотенуза троугла ABC је $n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n}$ те је

$$P_n = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2n} = \frac{ab}{2}(1 + \frac{1}{n}).$$

Када $n \to \infty$ видимо да

$$P_n \to \frac{ab}{2}.$$

Из ова два задња примера можемо закључити: *понекад интуиција може да нас одведе до странпутице али може нам често помоћи да дођемо до правог решења*.

(6) Опрезно са бесконачним збировима.

Следећи примери говоре до каквих се апсурдних закључака може доћи ако се при израчунавању неких бесконачних збирова не користи гранична вредност.

Добро знамо да се бесконачни периодични запис неког броја може, помоћу геометријског реда написати као разломак. Али то се може урадити и без геометријског реда на следећи начин. На пример, ако треба претворити у разломак број $x = 0,343434\cdots$ (34 се неограничено понавља), без употребе граничне вредности, можемо ту једнакост помножити са 100 па имамо:

$$x = 0,34343434\cdots \Rightarrow 100x = 34,34343434\cdots = 34 + x.$$

Дакле, $100x = 34 + x$ одакле је $x = \dfrac{34}{99}$.

Или, ако треба израчунати вредност

$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$ можемо квадрирати ову једнакост тако да добијемо

$$x^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}} = 2 + x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Да ли би горњи поступак могли да употребимо као метод за израчунавање бесконачног збира $a + a + a + \cdots$ где је $a > 0$?

Пробајмо:

$$x = a + a + a + \cdots \Rightarrow x = a + (a + a + a + \cdots) \Rightarrow x = a + x.$$

Дакле, $a = 0$, супротно претпоставци $a > 0.$ У чему је проблем? У томе што овде x (ознака за бесконачни збир) није број, бесконачни ред чији су сви чланови a је дивергентан (његов општи члан не тежи нули кад $n \to \infty$).

У прва два примера све је у реду јер x означава коначан број. У првом случају низ $x_n = 0,3434\cdots 34$, где се 34 понавља $n-$ пута, је растући и ограничен одозго са $0,4$ па је конвергентан те је x коначан број. (сваки растући ограничени низ одозго конвергира). У другом случају слично, низ $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$, са n двојки, је растући. Он је ограничен са 2 јер ако претпоставимо да је, за неко

n, $x_n > 2$, узастопним квдрирањем ове неједнакости долазимо до абсурда $\sqrt{2} > 2$.

А када је реч о „збиру“ $x = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, на њему су се спотицали и велики математичари осамнаестог века **Гвидо Гранди, Лајбниц, Н.Бернули, Лагранж, Ојлер** и други.

Наиме, ако овај „збир“ напишемо у различитим облицима добијамо различите вредности тог „збира“:

$x = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$ добијамо да је $x = 0$,

$x = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots$ добијамо $x = 1$,

$x - 1 = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = -x$ одакле је $x = 1/2$.

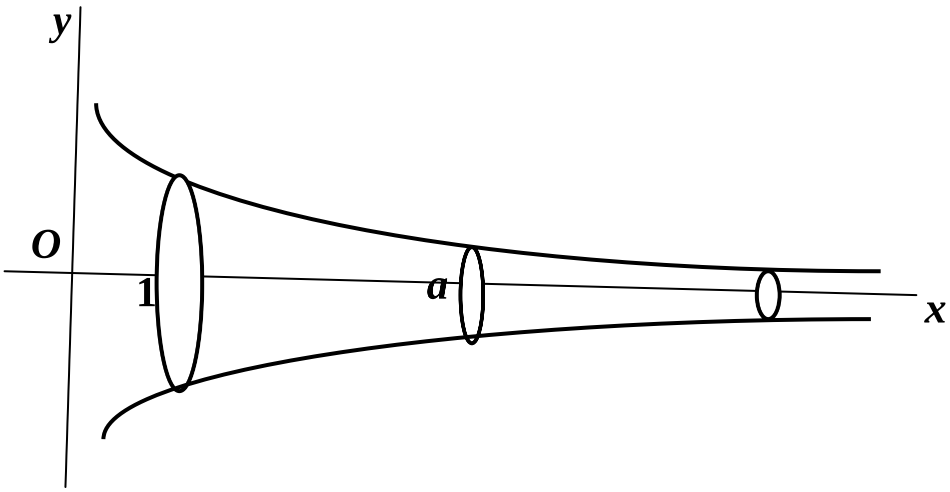
Овде смо правили више некоректности: примењивали смо асоцијативни и дистрибутивни закон који важе за коначне збирове и кначне бројеве.Осим тога горњи збир је бесконачни ред који је дивергентан јер му општи члан не тежи нули. То значи да x није реалан број, не постоји.

На основу горњих закључака **Гвидо Гранди** (калуђер и професор у Пизи) 1703. долази до закључка да је $0 = 1/2$ и на основу тога закључује да се Свет може створити из ништа. И **Лајбниц** је тврдио да је природно да се за x узме аритметичка средина бројева 0 и 1 тј. да тај збир треба да буде буде $1/2$. **Бернули** и **Лагранж** су се слагали са Лајбницовим мишљењем. Овако нешто после **Кошијевих** резултата није могло да се прихвати, могло је да се лако негира.(**Коши** 1789-1857).

(7) Парадокс „Гаврилове трубе“.

Реч је о једном добро познатом примеру где се тачним расуђивањем добија тачан али неочекиван, чудан, закључак.Ради се о геометријском телу које има бесконачну површину, али ограничену, коначну, запремину.

У литератури је овај пример познат као **Гаврилова труба** или **Торичелијева труба,** чије име потиче од италијанског физичара и математичара **Еванђелиста Торичелија** (1608-1647.г.).На опште изненађење математичара тог доба, око 1641. г., пре **Њутна** и **Лајбница**, они тада нису били ни рођени, **Торичели** је применом уопштене **Каваљеријеве** методе (уопштење је сам дао) израчунао један несвојствен интеграл и добио запремину једног ротационог тела $\boldsymbol{T}$ насталог ротацијом око $\boldsymbol{x-}$осе дела хиперболе $\boldsymbol{y=\frac{1}{x}}$ $\boldsymbol{x\geq 1}$ (сл.5.)



Слика 5.

Савременим методама математичке анализе, данас се, применом интегралних образаца за запремину и површину ротационих тела, тј.образаца за ову функцију:

$$P=2\pi\int_1^a \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x}\mathrm{d}x>2\pi\int_1^a\frac{\sqrt{1}}{x}\,\mathrm{d}x=2\pi\ln a$$

и једнакости $\lim_{a\to\infty}\pi(1-\frac{1}{a})=\pi,\ \lim_{a\to\infty}2\pi\ln a=\infty$

добија да то тело има коначну запремину $\boldsymbol{V=\pi}$ и бесконачну површину $\boldsymbol{P=\infty}$. Многи математичари су сматрали да је то парадокс, да је овај рачун нетачан. Јер да је тачан, значило би, да је дотичну трубу могуће напунити коначном количином фарбе чиме би се офарбала и њена унутрашњост. Оваквим резоновањем заборавља се да се ради о бесконачном телу, што важи за коначно не мора да важи за бесконачно. Осим тога ово тело не може да се дефинише класичном тополошком дефиницијом: Скуп T је тело ако је $T = \operatorname{int} T \cup \partial T$ јер није јасно шта се овде подразумева под скупом рубних тачака ∂T . Јер је свака тачка на позитивном делу x-осе унутрашња тачка тог ротационог тела. А да ли је, за довољно велико x она и рубна тачка?

На крају, истакнимо једно лично запажање. Добро нам је познато да се разни практнички проблеми, везани за материјални свет, једино могу решити методом апстраховања, помоћу одговарајућег математичког модела. Међутим код решавања Аристотеловог парадоса, решење нас је могло задовољити, лакше га је прихватити, ако се проблем посматра у изворном, материјалном, облику. Јер, у апстрактном случају, круг k_1 при окретању без клизања круга k , тешко се може замислити да проклизава. Са друге стране код „Гаврилове трубе“ ако трубу замишљамо као реални објекат не уверава нас решење да је могуће да то тело има коначну запремину а бесконачну површину. Дакле, наша интуиција није увек у складу са стварним чињеницама. А тешкоће у закључивању у примерима 3-8 настају углавном због не коришћења тачних дефиниција одређених појмова и не коришћења одговарајућих савремених прецизних стандардних теорема.

Извори

[1] В.М.Брадис, В.Л.Минковсий, А.К.Харачева, *Ошибки в математических расуждениях*,„Учпедгиз“, Москва 1959.

[2] В.А.Никифоровский, Л.С.Фрейман, *Рождение новой математики*,„Наука“, Москва 1976.

[3] Д.Я. Стройк, *Краткий очерк истории Математики*, Наука, Москва 1984.

[4] М. Клайн, *Математика Урата определенности,* „Мир“, Москва 1984

[5] Павле М. Миличић, *10 тема из математике,* Завод за уџбенике, Београд 2010

[6] Google