MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
Vol. XXII (2)(2016), 141-147

Nekoliko kombinatornih dokaza

Duško Jojić
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Banja Luka

Jovan Mikić
J.U. SŠC "Jovan Cvijić", Modriča

Apstrakt

Savremeni udžbenici kombinatorike i diskretne matematike ističu značaj i eleganciju kombinatornih dokaza. U ovom radu navodimo nekoliko primjera kombinatornih dokaza koji se mogu mogu koristiti u nastavi. Na kraju dajemo kombinatorni dokaz Diksonovog identiteta pomoću puteva u cjelobrojnoj mreži u prostoru.

Ključne riječi i fraze : Kombinatorni dokaz, bijekcija, putevi u cjelobrojnoj mreži, Diksonov identitet

1 Šta je to kombinatorni dokaz?

Danas je postalo uobičajeno da budući nastavnici matematike u toku osnovnog studija slušaju bar jedan kurs kombinatorike. U savremenim udžbenicima diskretne matematike i kombinatorike se u svakoj mogućoj situaciji pokušava da dokazi identiteta i teorema budu kombinatorni. Na primjer, u knjizi [5] se sintagma "kombinatorni dokaz" pojavljuje više od 150 puta.

Ukratko, **kombinatorni** ili **bijektivni dokaz** da skup X ima tačno a elemenata dobićemo ako konstruišemo bijekciju između skupa X i skupa A za koji znamo da ima a elemenata. Kombinatorni dokaz nekog identiteta dobijemo kada taj identitet zapišemo sa $|X| = |Y|$ (tj. lijevu i desnu stranu identiteta prepoznamo kao broj elemenata u skupovima X i Y), pa onda konstruišemo bijekciju između skupova X i Y.

Često je nalaženje željene bijekcije kraće i jednostavnije od ostalih dokaza, pa u takvim situacijama nije potrebno objašnjavati razloge zašto je potreban kombinatorni dokaz. Međutim, i kombinatorni dokazi koji su značajno komplikovaniji od standardnih (najčešće algebarskih) su zanimljivi i vrijedni pažnje. Prvi razlog za to je taj što tražeći željenu bijekciju bolje upoznajemo posmatrane strukture i nalazimo njihove dodatne osobine. Takođe, lijepo je rezultate u kombinatorici dobiti samo kombinatornim metodama. I pored toga što je u posljednjih desetak godina počela "velika potjera" za kombinatornim dokazima, još uvijek postoje važni identiteti (kao i drugi rezultati u kombinatorici) za koje nije pronađen kombinatorni dokaz. Više o tome zainteresovani čitalac može naći u knjigama [5] i [6].

U ovom radu počinjemo sa nekoliko jednostavnih primjera kombinatornih dokaza.

Teorema 1. *Broj podskupova konačnog nepraznog skupa koji imaju paran broj elemenata je jednak broju podskupova tog skupa koji imaju neparan broj elemenata.*

Dokaz: Ne umanjujući opštost, možemo smatrati da je dati konačan skup početni dio skupa prirodnih brojeva

$$[n] = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}.$$

Za svaki $X \subseteq [n]$ definišemo novi skup X' na sljedeći način:

ako $n \in X$ onda je $X' = X \setminus \{n\}$, a ako $n \notin X$ onda je $X' = X \cup \{n\}$. Lako je uočiti da je $|X'| = |X| \pm 1$, pa su $|X|$ i $|X'|$ različite parnosti.

Tako smo svaki podskup od $[n]$ sa parnim brojem elemenata "spojili" sa tačno jednim podskupom koji ima neparan broj elemenata, što daje željenu bijekciju.

$\square$

Sljedeći primjer je kombinatorni dokaz nejednakosti koja se često dokazuje matematičkom indukcijom.

Teorema 2. *Za svaki prirodan broj $n > 4$ vrijedi $2^n > n^2$.*

Dokaz: Broj 2^n možemo interpretirati kao broj svih binarnih nizova dužine n, a n^2 je broj elemenata skupa $[n] \times [n]$. Uređenom paru $(i, j) \in [n] \times [n]$ dodijelimo binarni niz $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ na sljedeći način:

- Ako je $i \leqslant j$ onda je $a_i = a_j = 1$, a svi ostali članovi su nule (ovaj niz ima najviše dvije jedinice za $i \neq j$).
- Za $i > j$ je $a_i = a_j = 0$, a svi ostali članovi su jedinice (ovaj niz ima tačno $n - 2$ jedinica).

Lako je provjeriti da je za $n > 4$ ovo preslikavanje injekcija sa $[n] \times [n]$ u skup svih binarnih nizova dužine n. Takođe, za $n > 4$ potoje binarni nizovi koji nisu slika nijednog para (i, j), pa vrijedi tražena nejednakost.

$\square$

Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ je jedan od najvažnijih i najčešćih brojeva koji se pojave u kombinatorici. Taj broj se pojavi u binomnoj formuli (koeficijent uz $x^k y^{n-k}$ u razvoju $(x + y)^n$ i kao broj svih k-članih podskupova u skupu od n elemenata. Broj $\binom{n}{k}$ možemo prepoznati[1] i kao broj svih najkraćih puteva

[1] Za bolje razumjevanje matematičkih pojmova i objekata je važno da se isti objekt prepozna u što više različitih situacija. U kombinatorici radimo sa relativno jednostavnim objektima, pa je to "prepoznavanje" lakše nego u ostalim oblastima matematike. To je još jedan od razloga zašto budući matematičari treba da uče kombinatoriku.

u cjelobrojnoj mreži od $(0,0)$ do $(k, n-k)$. Zaista, svaki takav put možemo zapisati kao niz od n slova D i G (ako idemo desno pišemo D, a za gore pišemo G). Pri tome se slovo D pojavi tačno k puta, pa je broj puteva jednak broju načina da odaberemo k-člani podskup iz skupa od n elemenata.

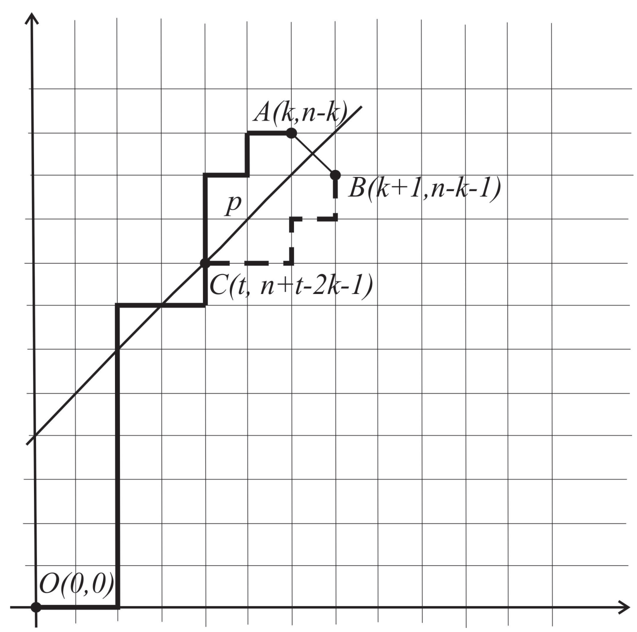
Sljedeća teorema se nalazi u većini udžbenika kombinatorike (ali i iz ostalih oblasti matematike) u kojima se govori o binomnim koeficijentima. Standardni dokazi koji se mogu naći u tim knjigama nisu kombinatorni i koriste upoređivanje binomnih koeficijenata. Ako binomne koeficijente interpretitamo kao broj puteva u cjelobrojnoj mreži možemo dati kombinatorni dokaz.

Teorema 3. *Za dato $n \in \mathbb{N}$ i za sve $k = 0, 1, \ldots [\frac{n}{2}] - 1$ vrijedi $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$.*

Dokaz: Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ možemo interpretirati kao broj svih puteva u cjelobrojnoj mreži od $(0,0)$ do $(k, n-k)$.

Tvrđenje teoreme ćemo dokazati ako za sve $k \leqslant [\frac{n}{2}]-1$ konstruišemo injekciju između sljedeća dva skupa:

- Skupa svih puteva od $O(0,0)$ do $A(k, n-k)$ (njih ima $\binom{n}{k}$) i
- skupa puteva od $O(0,0)$ do $B(k+1, n-k-1)$. (tih puteva ima $\binom{n}{k+1}$).



Slika 1: Bijekcija između puteva

Neka je prava p simetrala duži $\overline{AB}$, gdje su tačke $A(k, n-k)$ i $B(k+1, n-k-1)$, vidjeti sliku 1. Lako je izračunati da je $y = x + n - 2k - 1$ jednačina prave p.

Proizvoljan put Π od koordinatnog početka do tačke A (put Π ima k koraka "desno" i $n-k$ koraka "gore") mora presjeći pravu p u nekoj cjelobrojnoj tački.

Neka je $C(t, n+t-2k-1)$ posljednja tačka kada naš put Π siječe pravu p. Put Π od tačke C do tačke A ima još $k-t$ koraka desno i $k+1-t$ koraka gore. Taj dio puta Π preslikaćemo simetrično obzirom na pravu p. Pri tom preslikavanju koraci desno postanu koraci gore, a koraci gore postanu koraci desno, vidi sliku 1.

Tako smo od puta Π konstruisali put Π' koji ima ukupno ima $k+1$ korak desno (t koraka desno do tačke C i još $k+1-t$ poslije) i $n-k-1$ korak gore ($n+t-2k-1$ do C i još $k-t$ poslije). Dakle, put Π' će završiti u tački $(k+1, n-k-1)$. Očigledno je ovo preslikavanje injekcija, što dokazuje željenu nejednakost.

$\square$

2 Kombinatorni dokaz Diksonovog identiteta

Najstariji oblik Diksonovog identiteta

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^3 = \begin{cases} \frac{(-1)^m(3m)!}{(m!)^3} & \text{ako je } n=2m \\ 0 & \text{inače} \end{cases}.$$

se pojavio još 1891 godine u [1]. Danas je Diksonov identitet zajednički naziv za nekoliko uopštenja prethodne formule (pogledati u [2] i [3]).

Između ostalog, identiteti ovog tipa su važni u razvoju hipergeometrijskih suma, vidjeti [4].

U kombinatorici, nekoliko različitih dokaza Diksonovog identiteta služi za ilustraciju efikasnosti različitih tehnika: dokaz pomoću Lagranžove inverzije, manipulacija sa formalnim stepenim redovima, WZ-metoda[2], vidjeti u [3] i [7].

U ovom poglavlju ćemo opisati kombinatorni dokaz[3] uopštenog Diksonovog identiteta brojeći na pametan način puteve u cjelobrojnoj mreži u prostoru.

Teorema 4 (Uopšteni Diksonov identitet)**.** *Ako su $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ i ako je $a \leqslant b$ i $a \leqslant c$ tada vrijedi:*

$$\sum_{k=-a}^{a}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}.$$

Dokaz: Desnu stranu prethodne jednakosti možemo interpretirati kao broj svih cjelobrojnih puteva u prostoru od koordinatnog početka $O(0,0,0)$ do tačke $A(a,b,c)$. Svaki taj put odgovara permutaciji $s = s_1, s_2, \ldots, s_{a+b+c}$ multiskupa $M = \{x^a, y^b, z^c\}$ u kojoj se slovo x pojavi a puta, slovo y se pojavi b puta, a

[2]Herbert Wilf i Doron Zeilberger.

[3]Ovaj dokaz je 2009 godine na predavanju [8] ispričao poznati izraelski matematičar Doron Zeilberger. Po njegovim riječima, ovaj kombinatorni dokaz je dao Dominic Foata.

slovo z se pojavi c puta. Skup svih permutacija multiskupa M (putevi od O do A) označimo sa $\mathcal{P}$.

Sada, za sve $k = -a, -a+1, \dots, a-1, a$ sa S_k označimo skup svih uređenih trojki $(\pi_{xy}, \pi_{xz}, \pi_{yz})$, gdje je π_{xy} permutacija multiskupa $M_{12}^{(k)} = \{x^{a+k}, y^{b-k}\}$, π_{xz} permutacija $M_{13}^{(k)} = \{x^{a-k}, z^{c+k}\}$, a π_{yz} permutacija multiskupa $M_{23}^{(k)} = \{y^{b+k}, z^{c-k}\}$. Možemo primijetiti da je lijeva strana Diksonovog identiteta u stvari $\sum_k (-1)^k |S_k|$.

Svakoj permutaciji $s \in \mathcal{P}$ multiskupa $\{x^a, y^b, z^c\}$ možemo dodijeliti uređenu trojku $(\pi_{xy}, \pi_{xz}, \pi_{yz})$, gdje je:

- $\pi_{xy}(s)$ je permutacija dobijena od s brisanjem svih slova z;
- $\pi_{xz}(s)$ je permutacija dobijena brisanjem svih y iz permutacije s;
- $\pi_{yz}(s)$ je permutacija dobijena brisanjem svih x iz permutacije s.

Lako je uočiti da su $\pi_{xy}(s)$, $\pi_{xz}(s)$ i $\pi_{yz}(s)$ u stvari permutacije multiskupova $M_{12}^{(0)}$, $M_{13}^{(0)}$ i $M_{2,3}^{(0)}$. Tako je sa $s \mapsto (\pi_{xy}(s); \pi_{xz}(s); \pi_{yz}(s))$ definisano preslikavanje $Proj : \mathcal{P} \to S_0$.

Pretpostavimo da je za neku permutaciju s multiskupa M poznata njena slika $Proj(s) = (\pi_{xy}(s), \pi_{xz}(s), \pi_{yz}(s))$, to jest, da znamo permutacije

$$\pi_{xy}(s) = u = (u_1, u_2, \dots, u_{a+b});$$

$$\pi_{xz}(s) = v = (v_1, v_2, \cdots, v_{a+c});$$

$$\pi_{yz}(s) = w = (w_1, w_2, \dots, w_{b+c}).$$

Ključni argument u kombinatornom dokazu Diksonovog identiteta je činje nica da se iz slike $Proj(s) = (\pi_{xy}(s); \pi_{xz}(s); \pi_{yz}(s))$ može rekonstruisati polazna permutacija s.

Naime, ako posmatramo multiskup $\{u_1, v_1, w_1\}$ sastavljen od prvih elemenata u permutacijama $\pi_{xy}(s)$, $\pi_{xz}(s)$ i $\pi_{yz}(s)$, dva od tih elemenata su međusobno jednaka.

Taj element koji se pojavi dva puta u permutacijama $\pi_{xy}(s)$, $\pi_{xz}(s)$ i $\pi_{yz}(s)$ je prvi element u permutaciji s, odnosno, to je prvi korak u putu od O do A. Kada taj element obrišemo iz s i dvije permutacije iz $Proj(s)$ koje ga sadrže, ponavljamo postupak. Koristeći matematičku indukciju, možemo dokazati da se iz $Proj(s)$ može rekonstruisati cijela permutacija s.

Odavde zaključujemo da je preslikavanje $s \mapsto (\pi_{xy}(s); \pi_{xz}(s); \pi_{yz}(s))$ injekcija, odnosno $Proj : \mathcal{P} \to S_0$ je bijekcija između skupa svih permutacija multiskupa $\mathcal{P}$ i nekog podskupa S_0.

Naravno, lako je opaziti da postoje trojke permutacija iz S_0 koje nisu projekcija neke permutacije multiskupa M. Takvu trojku permutacija

$$(u; v; w) = (u_1, u_2, \dots, u_{a+b}; v_1, v_2, \cdots, v_{a+c}; w_1, w_2, \dots, w_{b+c})$$

prepoznajemo po tome što se u procesu rekonstrukcije, nakon brisanja konačno elemenata, pojavi trojka $(u'; v'; w')$ u kojoj su tri početna elementa permutacija

u', v' i w' različiti. U tom slučaju ne možemo donijeti odluku kako se nastavlja put, i te trojke permutacija iz S_0 nisu u slici funkcije $Proj$.

Slično vrijedi za sve ostale trojke permutacija. Ako je $k \neq 0$, trojka permutacija iz S_k sigurno nije projekcija neke permutacije iz $\mathcal{P}$. Stoga, ako od trojke $(u; v; w) \in S_k$, $k \neq 0$ rekonstrukcijom pokušamo dobiti permutaciju multiskupa, pojaviće se situacija kada trojka $(u'; v'; w')$ ima različite početne elemente. Sada ćemo pokazati kako se trojke permutacija koje nisu projekcija permutacije multiskupa M mogu "spariti".

Pretpostavimo da trojka

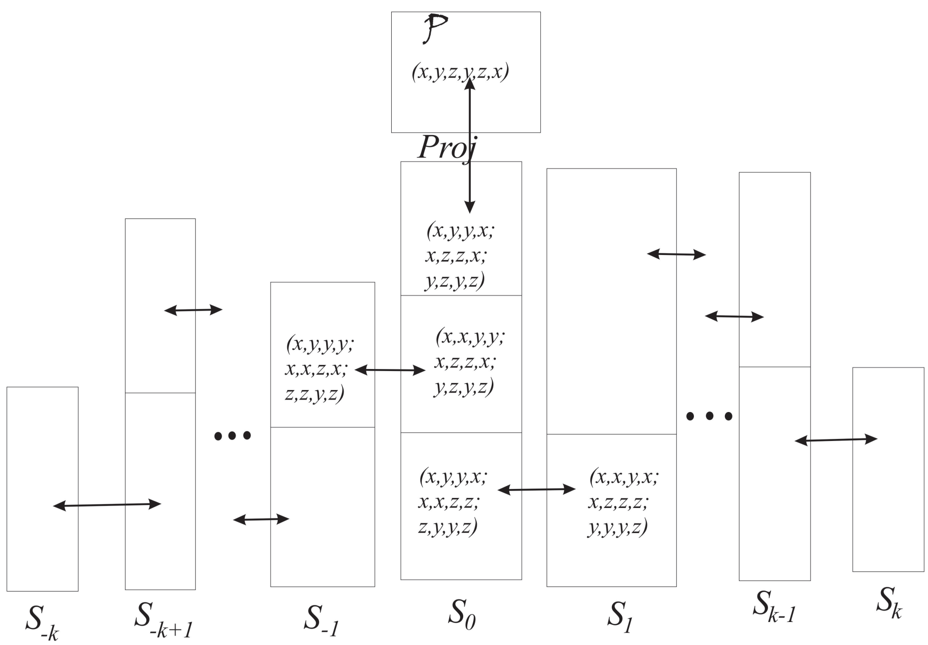
$$\sigma = (u_1, u_2, \ldots, u_{a+b}; v_1, v_2, \cdots, v_{a+c}; w_1, w_2, \ldots, w_{b+c}) \in S_k$$

nije projekcija s. Ako od σ pokušamo rekonstruisati permutaciju multiskupa M, staćemo u trenutku kada ne možemo odlučiti koji je sljedeći korak (tri početna su različita). Neka je uređena trojka

$$(u_p, u_{p+1} \ldots, u_{a+b}; v_q, v_{q+1} \cdots, v_{a+c}; w_r, w_{r+1} \ldots, w_{b+c})$$

prvo mjesto gdje smo se "zaglavili" u pokušaju rekonstrukcije. Postoje tačno dvije mogućnosti za početne elemente:

vrijedi $u_p = x$, $v_q = z$, $w_r = y$ ili $u_p = y$, $v_q = x$, $w_r = z$.



Slika 2: Bijekcije u dokazu Diksonovog identiteta

Trojku σ sparimo sa trojkom permutacija σ' koja se od σ razlikuje samo na mjestima u_p, v_q i w_r. Preciznije:

- Ako je $u_p = x$, $v_q = z$ i $w_r = y$ u σ, onda je $u'_p = y$, $v'_q = x$ i $w'_r = z$ u σ'. Tada je $\sigma' \in S_{k-1}$.
- Ako je $u_p = y$, $v_q = x$ i $w_r = z$ u σ, onda je $u'_p = x$, $v'_q = z$ i $w'_r = y$ u σ', i tada je $\sigma' \in S_{k+1}$.

Zato se svake dvije sparene trojke permutacija u sumi na lijevoj strani broje sa različitim znakom, pa se ponište. Jedino "prežive" permutacije koje nismo sparili, a one su u bijekciji sa cjelobrojnim putevima od $(0,0,0)$ do (a,b,c).

$\square$

U stvari, kombinatorni dokaz Diksonovog identiteta zahtijeva cijeli niz bijekcija. Šema tih bijekcija je ilustrovana na slici 2. Takođe, na ovoj slici se može vidjeti nekoliko primjera sparivanja i primjer za funkciju $Proj$ u slučaju kada je $a = b = c = 2$.

Literatura

[1] A. C. Dixon, *On the sum of the cubes of the coefficients in a certain expansion by the binomial theorem*, Messenger of Mathematics, 20 (1891), pp. 79-80,

[2] V. J. W. Guo, *A simple proof of Dixon's identity*, Discrete Math., 268 (2003), pp. 309-310

[3] W. James, *100 years of Dixon's identity*, Irish Mathematical Society Bulletin, 27 (1991), pp. 46-54,

[4] W. Koepf, *Hypergeometric summation. An algorithmic approach to summation and special function identities*, Springer, London, 2014

[5] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 1.* 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 49. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[6] R. P. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge, University Press, Cambridge, 2015.

[7] H. Wilf, *generatingfunctionology*, 2nd ed., Academic Press, Inc., Boston, 1994

[8] D. Zeilberger, Predavanje na Državnom univerzitetu u Sibiru, http://tube.sfu-kras.ru/video/396?playlist=397