MAT-KOL (Banja Luka)
XXII (2) (2016), 135-139
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

PRILOG ZA ČLANAK

„NEKE ZANIMLJIVE ALGEBARSKE NEJEDNAKOSTI“

(Addenda to the article „Some interesting algebraic inequalities“)

Dragoljub Milošević

Gornji Milanovac, Srbija
e-nail: dramil947@gmail.com

Sažetak: U ovom radu dajemo nove dokaze dviju nejednakosti iz Arslanagićevog i Hindijinog članka (v. [1]).

Ključne riječi i izrazi: algebarska nejednakost, Engelova nejednakost.

Abstract: In this paper we give new proofs of two inequalities from the article of Arslanagić and Hindija (see: [1]).

Key words and phrases: algebraic inequality, the Engel's inequality.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 50
ZDM Subject Classification (2010): F 50, N 50

U [1] autori su dali dokaze sljedećih nejednakosti:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \geq \sqrt{2(a^2+b^2)}\,,\,(a,b>0) \tag{1}$$

i

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\,,\,(a,b,c>0). \tag{2}$$

Ovdje ćemo prikazati dva nova dokaza nejednakosti (1) i jedan novi dokaz nejednakosti (2), bez korištenja nejednakosti Koši-Bunjakovski-Švarca. Daćemo i neke zanimljive napomene.

a) **Dokaz 1**: Najprije dokažimo sljedeću nejednakost

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \geq \sqrt[3]{4(a^3+b^3)}. \tag{3}$$

Imamo redom:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \geq \sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \Leftrightarrow \left(\frac{a^3+b^3}{ab}\right)^3 \geq 4(a^3+b^3)$$

$$\Leftrightarrow (a^3+b^3)^2 \geq 4a^3b^3$$

$$\Leftrightarrow (a^3-b^3)^2 \geq 0,$$

što je tačno.

U [2], str. 24, je dokazana nejednakost između kvadratne i kubne sredine dva pozitivna broja a i b :

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}},$$

tj.

$$\sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \geq \sqrt{2(a^2+b^2)}. \tag{4}$$

Iz nejednakosti (3) i (4) slijedi nejednakost (1).

Dokaz 2: Prvo ćemo dokazati nejednakost

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}. \tag{5}$$

Imamo:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}-\frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)} = \frac{a^3(a+b)+b^3(a+b)-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$$

$$= \frac{a^2+b^2-2ab}{a+b}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{a+b} \geq 0$$

čime je dokaz nejednakosti (5) okončan.

Tačna nejednakost $(a-b)^2 \geq 0$ je ekvivalentna sa

$$a^2 + b^2 \geq 2ab\ ,$$

ali i sa

$$a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}\ ,$$

pa iz (5) slijedi

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{2ab\,(a^2+b^2)}{ab\,(a+b)}$$

$$= \frac{2(a^2+b^2)}{a+b}$$

$$\geq \frac{2(a^2+b^2)}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$$

$$= \sqrt{2(a^2+b^2)}\ \text{, tj. (1).}$$

b) **Dokaz**: U [3], str. 8, nalazi se dokaz nejednakosti za $x, y, z > 0$ i $a, b, c \in \mathbf{R}$:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\ . \tag{6}$$

Primjenom nejednakosti (6) dobijamo

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{b^2c} + \frac{c^4}{c^2a} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}\ . \tag{7}$$

Kako vrijede sljedeće dvije nejednakosti

$$a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \tag{8}$$

$$(\Leftrightarrow\ (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow\ ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\left(\,(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geq 0 \text{ (tačno))}$$

i

$$a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \qquad (9)$$

$(\Leftrightarrow\ 3(a^2b+b^2c+c^2a) \leq a^3+ab^2+ac^2+ba^2+b^3+bc^2+ca^2+cb^2+c^3$

$\Leftrightarrow 2(a^2b+b^2c+c^2a) \leq a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2$

$\Leftrightarrow\ (a^3-a^2b)+(b^3-b^2c)+(c^3-c^2a)+(ab^2-a^2b)+(bc^2-b^2c)+(ca^2-c^2a) \geq 0$

$\Leftrightarrow\ a^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(c-a)+ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c) \geq 0$

$\Leftrightarrow\ (a-b)(a^2-ab)+(b-c)(b^2-bc)+(c-a)(c^2-ca) \geq 0$

$\Leftrightarrow\ a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2 \geq 0$ (tačno)),

iz (7) slijedi

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$$

$$= \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

$$\geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}$$

$$= \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)},$$

čime je dokaz nejednakosti (2) završen.

Napomena 1: Nejednakost (6) autori članka [1] nazivaju **Engelovom formom** nejednakosti Koši-Bunjakovski-Švarca:

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\ ; (x_i>0, a_i \in \boldsymbol{R}, i=1,2,\ldots,n), \quad (10)$$

za $n=3$.

Napomena 2: Nejednakost (5) se može dobiti primjenom Engelove nejednakosti (10) za $n=2$:

$$\frac{a^4}{a^2b}+\frac{b^4}{b^2a} \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b+b^2a} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}.$$

Napomena 3: S obzirom da su tačne nejednakosti

$$a_1^2a_2 + \ a_2^2a_1 \le \frac{1}{2}(a_1 + a_2)(a_1^2 + a_2^2), \ (a_1, a_2 > 0)$$

$$(\Leftrightarrow \ (a_1 - a_2)^2 \ge 0)$$

i

$$a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + a_3^2a_1 \le \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \ , \ (a_1, a_2, a_3 \ > 0)$$

(v. nejednakost (9)),

postavlja se pitanje: Da li je tačna nejednakost

$$a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + \cdots + a_n^2a_1 \le \frac{1}{n}(a_1 + a_2 \ldots + a_n)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \ ,$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n > 0) \ ?$$

Napomena 4: Pozitivan odgovor na posljednje pitanje predstavljao bi jedan od ključeva za dokazivanje generalizacije nejednakosti (1) i (2):

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_1} \ \ge \ \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)} \ ; (a_i > 0, i = 1,2, \ldots, n) \ .$$

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š., Hindija, H., *Neke zanimljive algebarske nejednakosti*, MAT-KOL (Banja Luka), XII (2)(2016), 127 – 133.

[2] Simjanović, D.J., Vesić, N.O., *Uopštenja nekih algebarskih nejednakosti*, MAT-KOL (Banja Luka), XIX (3)(2013), 23 – 29.

[3] Милошевић, Д., *Једна неједнакост и њене примене*, Тангента (Београд), **55** (2008/2009-3), 8-10

Primljeno u redakciju 26.06.2016. Dostupno online 04.07.2016.