MAT-KOL (Banja Luka)
XXI (4)(2015), 221-235
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5828 (o)
doiSrpska: 10.7251/MK1504221G

ЈЕДНА АНАЛИЗА СТУДЕНТСКИХ МЕНТАЛНИХ СТРУКТУРА ПРИ РЈЕШАВАЊУ ЗАДАТКА О ГРАНИЧНОЈ ВРИЈЕДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ

Јелена Гајић

Универзитет у Бањој Луци, Технолошки факултет
78000 Бања Лука, Војводе Сепе Степановића 73, Б&Х
e-mail: jelena.gajic@tfbl.org

Даниел А. Романо

Универзитет у Источном Сарајеву, Педагошки факултет Бијељина
76300 Бијељина, Семберских ратара б.б., Б&Х
e-mail: bato49@hotmail.com

Мирела Мрђа

Универзитет у Новом Саду
Педагошки факултет Сомбор, Подгоричка 4, 25000 Сомбор, Србија
e-mail: mirelamrdja@gmail. com

Сажетак. Овај извјештај садржи анализу неприхватљивих и промашених одговора студената Машинског факултета у Бањој Луци на једно питање о граничној вриједности функције. У процедури израчунавања граничне вриједности у понуђеном задатку осим примјене тзв. 'логаритамског поступка' требало је примјенити и Лопиталов теорем. На основу прикупљених показатеља и деривираних закључака, ослањајући се на *APOS* теорију и *SOLO* таксономију, процјењујемо да је концепт граничне вриједности и процеси са тим концептом (али не и процедурално кориштења овог концепта) за већину тестиране студентске популације прихватљив уз знатне потешкоће. Понуђена је једна реконструкција студентских менталних слика које се индукују у њиховим умовима при настојањима да понуде прихватљиве одговоре на понуђени задатак уз кориштење категоријалних појмова *RBC+C* теорије апстракције. Чини се да се може формирати хипотеза (чију би оправданост, наравно, требало студиозно испитати) да многи студенти овог факултета немају изграђена неопходно потребна концептуална и процесна знања у њиховим когнитивним равнима о граничним процесима низова и функција због недовољно квалитетно консолидованих знања о својствима објеката поља реалних бројева.

Кључне ријечи и фразе: *АПОС теорија, SOLO таксонимоја, гранична вриједност функције, логаритамски поступак, Лопиталов теорем*

Abstract. This report contains an analysis of unacceptable and missed responses of students of Mechanical Engineering Faculty at Banja Luka Univeristy to a question about the limit of functions. The procedure of calculation of the limits in the proposed task other than the application of the so-called. 'logarithmic procedure' should be applied and Lopitalov theorem. Based on the collected data and derived conclusions, relying on *APOS* theory and the *SOLO* taxonomy, we estimate that the concept of limit values and processes that concept (but not procedurally using this concept) for the majority of the student population eligible tested with considerable difficulty. Offered is a reconstruction of student mental images that can induce in their minds in an effort to offer acceptable answers to a given task using categorical terms *RBC + C* theory of abstraction. It seems that it can form a hypothesis (whose justification would, of course, be meticulously examined) that many students of this college have built urgently needed conceptual and procedural knowledge in their cognitive level on the border of threads and processes function due to inadequate performance of the consolidated knowledge of the properties of field real numbers.

Subject Classification (2010**): 97C30, 97I20**
ZDM Subject classification (2010): **C30, I20**
Key words and phrases: *APOS theory, SOLO taxonomy, limit of a function, logarithm's procedure, l'Hôpital's theorem*

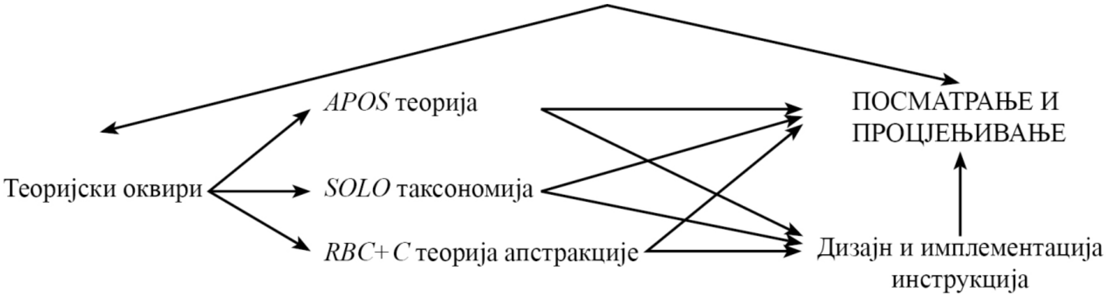
1. Увод

У овом тексту аутори нуде своја промишљања о менталним структурама конструисаним у студентским когнитивним равнима при рјешавању једног стандардног линеарно сложеног задатка израчунавања граничне вриједности функвије. Када се студенти суочавају са потребом да израчунају граничну вриједност функције, знатан број тих студената не промишља о примјенљивим технологијама израчунавања у конкретном случају. Ово указује на потребу да би реализатори курсева Calculusa (енциклопедијских курсева математике на техничким и учитељским факултетима) требало да се више ангажују у наставном процесу са циљем да студентима квалитетније приближе како концепт граничне вриједности функције тако и неке од примјенљивих алгоритама за израчунавање тих вриједнсоти. Истраживачка питања ове студије су била:

- генеричка декомпозиција алгоритма за израчунавање граничне вриједности функције за чије проналажење се потражује тзв. 'логаритамски поступак' и Лопиталово правило;
- шта омогућава *APOS* теорија у овом конкретном случају?, и
- које параметре можемо дедуковати из анализе студентских одговора ослањајући се на *RBC+C* теорију апстракције?

2. Истраживачка парадигма

У овом тексту ми се користимо истраживачким поспупцима по аналогији према поступцима изложеним у тексту Cottrill, Nichols, Schwingendorf, Thomas and Vidakovic (1996), детаљније описаних у чувеном иницијалном тексту Едуарда Дубинског (Dubinski, 1992) и ефективно примјењених у дисертацији Лин Бови (Lynn Bowie, 1998), а које овдје само назначавамо као троугао истраживачке парадигме



У суштини, наши кораци су слиједећи:

(1) радећи у оквирима теоријске перспективе (*APOS* теорија) излажемо студентима концепт граничне вриједности функције на примјеру једног задатка таквог да се за његово рјешавање потражује нелинеаран приступ (позивањен на више различитих својстава математичких објеката и успостављањем њиховог јединства, дакле успостављањем корелације између њих - релацијски ниво задатка у оквирима *SOLO* таксонимоје);

(2) посматрамо и процјењујемо студентску успјешност у рјешавању изабраног задатка;

(3) анализирамо студентске грешке настојећи да установимо када се те грешке појављују у процедурама примјењеним за добијање рјешења али и врсту грешке;

(4) настојимо да разумијемо зашто се грешке појављују ослањајући се на елементе *RBC+C* теорија апстракције;

(5) ревидирањем генеричке декомпозиције инструкционог подучавања у овом конкретном примјеру, и понављањем процедуре.

3. Преглед литературе

Постоје многе међународне студије о квалитету студентског разумијевања концепта граничне вриједности реалне функције једне реалне варијавле (на примјер погледати текстове: Artigue, 1992; Cornu, 1992; Davis and Vinner, 1986; Ervynck, 1988; Li and Tall, 1993; Monaghan, Sun and Tall, 1994; Robert, 1982; Sierpinska, 1987; Tall, 1992; Tall and Vinner, 1981; Williams, 1991; Oehrtman, 2003, 2004; Maharajh, Brijlall and Govender, 2008; Maharajh, 2010). У овом студијама изнесена су запажања њихових аутора да велика већина тестираних студената има значајних потешкоћа у разумијевању концепта граничне вриједности функције али и у разумијевању процеса у којима се овај концепт појављује (тј. имају потешкоћа са разумијевањем и прихватањем својстава овог концепта али и његово кориштење као објекта у конструисању или као алата за изградњу других математичких концепата. Такође, истиче се да уочене потешкоће у разумијевању овог концепта знатно отежавају разумијевање и прихварање других математички врло значајних концепата као што су, на примјер, непрекиндост, диференцијабилност и интеграбилност функција (погледати, на примјер текстове: Orton, 1983; Tall, 1992). Неки истраживачи математичког образовања (на примјер Cornu, 1992; Sierpińska, 1987) износе своја запажања у облику констатације да висок проценат студената има статичан поглед на процесе са математичким објектима. Студенти са таквим опредјељењем развијају само своје процедуралне способности. Знатан број студената са таквим погледом на међуодносе математичких објеката има знатних потешкоћа у сагледавању, разумијевању и прихватању процеса у којима су инкорпорирани математички концепт-објекти настали апстракцијом (Maharaj, 2010). Општеприхваћен став значајног дијела међународне заједнице истраживача математичког образовања може се илустровати на слиједећи начин: студентска перцепција граничног процеса функције као да је нешто што се никад не окончава, дакле и не досеже (на примјер: Cottrill, Nichols, Schwingendorf, Thomas and Vidakovic, 1996; Dubinsky, 2010). Још је својевремено Ана Сфард (Sfard, 1988) истицала да на гранични процес функција треба гледати као на динамичку структуру. Иако су неки аутори у почетку (на примјер, Tall, 1992) сматрали да је концептуализација динамичке структуре лака и природна за студенте, чини се да то није тако (на примјер, Li and Tall, 1993; Monaghan, Sun and Tall, 1994). Процјењује се да проблем у студентским умовима јесте неувиђање повезаности формалне дефиниције концепта граничне вриједности функције и њене динамичке структуре (Davis and Vinner, 1986; Ervynck, 1988; Williams, 1991)

Прегледавајући доступну међународну литературу нисмо успјели пронаћи неке извештаје о успеху у помагању студентима да превазиђу тешкоће у разумијевању формално дефинисаног и динамики детерминисаног концепта граничне вриједности функције. У овом извјештају ми нећемо понудити наша промишљања о моделу који би омогућавао виши успјех у нашим наставничким настојањима. Оно што ћемо ми урадити у овом раду је да фокусирамо више пажње на поменуту проблематику користећи се категоријама *APOS* теорије анализирајући један конкретан задатак о граничној вриједнисти функције (*нелинеарно сложен задатак*, или говорећи језиком *SOLO* таксономије, задатак на нивоу *'SOLO 4'* - релациони ниво), који потражује разумијевање неколико аспеката при чему добијене резултате примјене тих различитих приступа треба третирати као међусобно независне.

О савремености третираног проблема најбоље свједоће одбрањене мастер радње (на примјер: Jordaan, 2005; Lambertus, 2007) и докторске дисертацијен (на примјер: Bergthold, 1999; Juter, 2006; Moru, 2006; Cetin, 2009; Nair, 2010; Sarvestani, 2011) и велики број публикованих текстова у којима се третирају различити аспекти студентских неразумијевања концепта граничне вриједнсоти функције (на примјер: Cornu, 1992; Davis and Vinner, 1986; Domingos, 2009; Masteroides and Zachariades, 2004; Monaghan, Sun and Tall 1994; Oehrtman, 2003, 2004; Sierpińska, 1987; Tall and Vinner, 1981; Williams, 1991; Swinyard and Larsen, 2012; Huillet, 2005; Pons, Valls and Llinares, 2011; Aydin and Muylu, 2013; Karatas, Guven and Cekmez, 2011; Jaffae and Dindyal, 2011).

4. Теоријска заснованост

4.1. *APOS* теорија

Аутори APOS теорије су Ед Дубински и његове колеге (погледати, на примјер: Dubinsky 1991; Czarnocha et all 1999; Dubinsky and McDonald 2002). Име ове теорије састоји се од првих слова слиједећих термина: Акција, Процеси, Објекти и Шеме (Actions, Processes, Objects, and Schemes). Објаснићемо ове термине према доступној литератури: Arnawa et all 2007; Brijlall and Maharaj 2008; Hatfield 2013 и Voskoglou 2013:

Акција је трансформација објеката, уочених од стране појединца, у суштини спољна и као захтев, било експлицитно или из меморије, корак-покорак упутства о томе како да се изврши операција. Када се акција понавља а индивидуалне рефлексије у односу на тај акт се појављују, тада се може направити интерна ментална конструкција, коју називамо *процес*, а особа која проводи активности је у могућности да размишља о томе као о обављању уоченог процеса.

Објекат је изграђен током процеса када појединац постане свјестан процеса као категорије и прихвати да нека трансформација може дјеловати на објекат.

Коначно, *шема* за одређени математички концепт је појединачна колекција састављена од акције, процеса, објеката, али и других шема које су повезане посредством неких општих принципа те формирају оквир у уму појединца у који се третирана ситуација може уклопити. Овај оквир мора бити
кохерентан у смислу да даје, експлицитно или имплицитно, начин одређивања које појаве су у оквиру шеме а који нису. Овакав приступ подразумијева да сви субјекти у њој могу да се репрезентују у терминима акција, процеса, објеката и шема.

Ове четри компоненте - акција, процес, објекат и шема, овдје су представљене у једном хијерархиском низу. Аутори овог теоријског приступа сматрају да је сваки појединачни конструкт у овом низу мора бити конструисан пре слиједећег. У стварности ситуација није баш линеарна.

Наиме, када се разматра концептуализација неког појма, његов развој али и његово кориштење у неким процесима, тј. увезивању са другим категоријалним концептима, ситуација је знатно сложенија будући да може постојати повратни утицај.

4.2. *RBC+C* теорија апстракције

RBC (Recognizing-Building with-Constructing) *модел апстракције* наглашава потребу и стимулацију у процесу апстракције. Активности унутар ове теорије су: Препознавање (*recognizing*), кориштење алата (*building with*) и конструкција (*construction*). Апстракција, један од основних појмова који се користе у овој студији, дефинисан је на једноставан начин као "процес преласка са *препознатљивог* до *апстрактног*" (Hershkowitz, Schwarz and Dreyfus; 2001). Три поменуте епистемиолошке активниости ћемо додатно објаснити:

Препознавање је употреба претходно формиране структуре. Дакле, под 'препознавањем' познате математичке структуре, у мисаоном смислу настаје када ум онога који сазнаје сусретне, идентификује и разумије (у цјелини али и по дијеловима) ову структуру у математичком контексту у коме се тај уме креће (Hershkowitz, Schwarz and Dreyfus; 2001).

У процесу *'кориштење елемената и алата'* студентски ум још увијек није обогаћен новим комплекснијим знањима већ се користи постојећим знањем да разумије и разријеши нову парадигму унутар математичког концепта у којем се креће трагајући за новим сазнањима (Schwarz, Dreyfus, Hads, Hershkowitz, 2004).

Процес *'конструисање',* такође познат као поновно (пре)уређење надограђивањем, је процес изградње нових знања. То је процес којим се постојеће компоненте математичког знања евентуално допуњују новим компонентама, на нови начин међусобно уређују успостављајући комплексније уређење у претходној решетки сазнања и тако добијају нова значења.

У настојањима да посредством ове *RBC* теорије понуди порпуно прихватљиво образложење у формирању нових структура знања, Томи Драхфус је 2007. године предложио њено проширење процесом '*консолидације*' формирајући тако *RBC + C* теорију апстракције (Dreyfus, 2007).

5. Генеричка декомпозиција

5.1. Прелиминарна генеричка декомпозиција

Задат ак: Израчунати

$$f\left(x\right)=\left(ctgx\right)^{\frac{1}{lnx}}$$

1. Треба посматрати објект $f\left(x\right)=\left(ctgx\right)^{\frac{1}{lnx}}$ и одредити домен функције $x\to f(x)$:

   Домен ове функције детерминисан је слиједећим условима: (1) $ctgx>0$, (2) $lnx\neq 0$ (3) $x>0$. Рјешења прве двије неједначине су:

   (1) $ctgx>0\Leftrightarrow x\in\left\langle 0+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right\rangle$, гдје је $k\in Z$.

   (2) $lnx\neq 0\Leftrightarrow x\in\left\langle 0,1\right\rangle\cup\left\langle 1,+\infty\right\rangle$.

   Дакле, ако хоћемо да процијенимо $\lim\limits_{x\to 0}+\left(ctgx\right)^{\frac{1}{lnx}}$ посматрамо гранични процес 'понашање функције $\left(ctgx\right)^{\frac{1}{lnx}}$ за $x\to 0^+$'. У том циљу, бирамо варијаблу x из интервала $\left\langle 0,1\right\rangle$. За изабране вриједности варијебле x вриједи $ctgx>0$ и $lnx<0$. Овај дио активности у рјешевању овог задатка препознајемо као 'акцију'.

2. На једнакост $f\left(x\right)=\left(ctgx\right)^{\frac{1}{lnx}}$, при чему је $x\in\left\langle 0,1\right\rangle$, примјенимо логаритам натуралис (ln):

$$lnM=\frac{1}{lnx}ln\left(ctgx\right).$$

   Одавде слиједи

$$\lim_{x\to 0}+lnM=\lim_{x\to 0}+\frac{1}{lnx}ln\left(ctgx\right).$$

Овај дио активности препознајемо као прелиминарне активности на објекту. Други дио активности на објекту детерминисан је у слиједећој тачци.

3. Будући да је функција $x \to lnx$ непрекинда функција на интервалу $\langle 0,+\infty \rangle$ закључујемо да вриједи

$$\lim_{x\to 0}+ lnM = ln\left(\lim_{x\to 0}+ M\right) = \lim_{x\to 0}+ \frac{1}{lnx} ln\left(ctgx\right).$$

4. Како $lnx \to -\infty$ и $ln\left(ctgx\right) \to +\infty$ кад $x \to 0^+$, испуњени су услови Лопиталовог теорема[1], па имамо

$$\begin{aligned} ln\left(\lim_{x\to 0^+} M\right) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{lnx} ln(ctgx) \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{ctgx} \cdot \frac{-2}{\sin^2 x}}{\frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\cos x \cdot \sin x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{-1}{\cos x} \\ &= -1. \end{aligned}$$

јер је $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ а $\cos 0 = 1$. Примјена Лопиталовог теорема у овој декомпозицији може се посматрати као издвојена и претходно конструисана шема али њена примјена у овом конкретном случају препознајемо као дио процеса. Други дио процеса је антилогаритмирање

5. Коначно, антилогаритмирањем добијамо

$$\lim_{x\to 0^+} \left(ctgx\right)^{\frac{1}{lnx}} = e^{-1}.$$

5.2. Искуства из наставе

[1] Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661 -1704)

Тестирано је 48 кандидата – студената прве године студијског програма за образовање машинских инжењера Машинског факултета Универзитета у Бањој Луци.

Резултати тестирања / Дистрибуција студентске успјешности

Успјешност	∅	0	Са грешком	Без грешке
Број	19	20	4	5
Фреквенција	39.58	41.67	8.33	10.42

Легенда. Симбол ∅ истичемо студенте који нису понудили никакве одговоре на поставени задатак. Симболом 0 означавамо потпуно неприхватљиве информације које су студенти понудили као рјешење задатка.

Илустрација студентских пограшека

Примјер 1. $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\frac{\cos x}{\sin x}+1\right)^{\frac{1}{lnx}}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{lnx}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\left(1-\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{lnx}}\right]^{\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\cdot\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\left(1-\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}}\right]^{\frac{1}{lnx}\cdot\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}}\frac{(\cos x+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{1}{lnx}$$

$$= e^0 = 1.$$

И поред снажно изражених настојања, аутори овог текста нису билу у могућности да реконструишу срудентова промишљања у конструисању једначине $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\frac{\cos x}{\sin x}+1\right)^{\frac{1}{lnx}}$. Склони смо процијенити да је у питању 'lapsus kalami' тако да је слиједећи ред, ред (2), добијен коректном трансформацијом претходног ако претпоставили да је -1 умјесто +1. Ред (3) и ред (4) добијени су коректним алгебарским трансформацијама: (2) $\to$ (3) и (3) $\to$ (4). Грешка се уочава у трансформацији (4) $\to$ (5). То је неприхватљива трансформација

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1-\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{lnx}}\right]^{\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\cdot\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\cos x+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{1}{lnx}}$$

процијењујући да је трансформисање одвијано на слиједећи начин:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1-\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{lnx}}\right]^{\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\cdot\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(1-\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}}\right]^{\frac{1}{lnx}\cdot\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}}$$

Дакле, неприхватљивост понуђеног рјешења обог задатка произлази из погрешног поистовјећивања

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}} = e\,.$$

Слиједећи примјер је аналоган претходном јер се уочава слично погрешно поистовјећивање

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\left(ctgx-1\right)\right)^{\frac{1}{\mathrm{ctgx}-1}} = e\,.$$

Примјер 2. $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\cos x}{\sin x}-1\right)^{\frac{1}{lnx}}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\left(1+\left(ctgx-1\right)\right)^{\frac{1}{ctgx-1}}\right]^{(ctgx-1)\frac{1}{lnx}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ctgx-1}{lnx}} = \left|L.P.\right| = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^0 = 1.$$

Примјер 3. $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = (+\infty)^{\frac{1}{1}} = +\infty\,.$

Примјер 4. $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{tgx}\right)^{\frac{1}{lnx}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1\frac{1}{lnx}}{tgx\frac{1}{lnx}}\right) = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$.

Примјер 5. Нека је $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = L$. Примјењујући логаритам натуралис на лијеву и десну страну ове једнакости, добијамо

$$lnL = ln\lim_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0^+} ln(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{lnx}ln(ctgx) = \lim_{x\to 0^+} ln(ctgx)$$

јер $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{lnx} = 0$. Даље, будући да имамо

$$\lim_{x\to 0^+} ln(ctgx) = \lim_{x\to 0^+} ln\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+} ln\left(\frac{\sqrt{1-\sin x^2}}{\sin x}\right) = ln\frac{0}{1} = 1$$

закључујемо да је $L = e^1$.

Примјер 6. Нека је $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = C$. Примјењујући *ln* на ову једнакост, добијамо

$$lnC = ln\lim_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0^+} ln(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{lnx}ln(ctgx).$$

Одавде, даље, слиједи

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{lnx}\cdot\lim_{x\to 0^+} ln(ctgx) = (0-\varepsilon).$$

Зато је

$$C = e^{0-\varepsilon} = \frac{e^0}{e^{\varepsilon}} = e^{-\varepsilon} \approx 1.$$

5.3. Ревидирана генеричка декомпозиција

Други модел. Користимо једноставну алгебарску трансформацију

$$(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = e^{\frac{1}{lnx}ln(xtgx)}.$$

Одавде, због непрекидности функције $Exp: x \to e^x$, слиједи

$$\lim_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{lnx}(ctgx)}$$

Одавде, као и у првом моделу, имамо

$$\lim_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = e^{-1}.$$

Трећи модел. Ако означимо $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{lnx}} = L$, имамо

$$\ln L = ln\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0^+} ln\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{lnx}ln\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{lnx}(\ln\cos x - \ln\sin x)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{lnx}(\ln\cos x) - \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{lnx}(\ln\sin x) = -\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{lnx}(\ln\sin x)$$

јер је $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{lnx}(\ln\cos x) = 0$. Други лимес, будући да је $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln\sin x) = -\infty$, можемо

израђунати примјењујући Лопиталов теорем:

$$-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{lnx} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x = -1$$

Одавде добијамо да је $\lim\limits_{x\to 0^+}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = e^{-1}$.

6. Методичке сугестије

Да би направили увид у менталне структуре које се генеришу у студентсим умовима при проналажењу рјешења постављеног задатка ослањамо се на двије теоријске подлоге: 'корак по корак анализу' ('chunk-by-chunk' analysis) и елементе APOS теорије. Прикупљени повратни подаци овог тестирања сугеришу закључак да је разумијевање концепта граничне вриједности функције али и флуентност рада са тим концептом један од најзахтијевнијих потраживаних умјећа за окоја се очекује да их студенти морају овладати. Дедукцијом из овог задатка али и знатног броја других примјера са граничном вриједношћу функције формира се хипотеза да студенти техничких факултета са знатно израженим потешкоћама конструишу менталне слике овог апстрактног појма. Наша вишегодишња искуства током којег смо настојали да задатака овог типа али и аналогоне овом типу представљамо студентима са повећаном пажњомним су у складу са резултатима који се појабљују у међународној литератури у којој се обрађујеу студентски проблеми са храничном вриједношћу функције.

Међутим, наша сазнања о дизајнирању учења указују да би требало да се планира више времена у реализацији како предавања тако и вјежања са студентима у настојању са им се помогне да развију своје менталне структуре на нивоу процеса, објекта и шеме (говорећи језиком APOS теорије). Говорећи језиком *RBC+C* теорије апстракције то подразумијева да подучавање и студентско учење би требало да се фокусира на:

(1) препознавање типа функције и сагледавање тачака нагомилавања домене посматране функције у којима треба потраживати граничну вриједност;
(2) избор алата примјенљивих на процес израчунавања границе третиране функције у потраживаним граничним процесима;
(3) процес израчунавања;
(4) моделирање помоћу варијација шеме, тј. консолидацијом.

Графички приступ ни у знатном броју случајева омогућавао развој менталних структура на процесних и објеката нивоима, док фокус на симболичким структурама би требало да помогну у сагледавању конструисаног објекта концепције. Ако шеме организују и повежу релевантне акцију, процес и објект на прихватљив начин у конкретном случају, онда то треба да буде дио наставе. Утицај таквог фокуса на настава захтијева даља истраживања.

7. Закључне опсервације

Овдје треба указати да значајан дио неразумијевања концепта граничне вриједности функције произлази из тројности овог концепта: Симбол $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ је истовремено број (дакле, објект), процес – понашање функције у околини тачке c (c је тачка нагомилавања домене функције f) али и процедура за израчунавање граничне вриједности функције. Међутим, за разлику од концепата у тзв. Елементарној / Школској математици, где се припадајући алгоритам уз неки концепт користи за израчунавање специфичне вриједности тог концепта, гранична вриједност функције нема универзални алгоритам који ради у свим случајевима. Даље, концепт граничне вриједности функција није ограничен на рачунања у коначно много корака које даје дефинитиван одговор на постављени захтијев. То је управо мјесто где, говорећи језиком APOS теорије, почиње разлика између акције и процеса.

Литература

[1] I. M. Arnawa, I.M., Sumarno, U., Kartasasmita, B. and E.T. Baskoro, E.T. (2007), *Applying the APOS theory to improve students ability to prove in Elementary abstract algebra*, J. Indones. Math. Soc. (MIHMI), 13(1), 133-148.

[2] Artigue, M. (1992). *Analysis*. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dor-drecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

[3] Aydin, S. and Mutlu, C. (2013), *Students' understanding of the concept of limit of a function in vocational high school mathematics*, The Online Journal of Science and Technology, 3(1), 145-152

[4] Bergthold, T.A. (1999), *Patterns analytical thinking and knowledge use in student's early understanding of the limit concept*, Dissertation, University of Oklahoma.
[5] Bowie, L. (1998), *A learning theory approach to students' misconceptions in Calculus*, Dissertation, University of Cape Town
[6] Brijlall, D. and Maharaj, A. (2008), *Applying APOS theory as a theoretical framework for collaborative learning in teacher education*, In: The Teaching and Learning of Mathematics at University Level New ICMI Study Series, http://tsg.icme11.org/document/get/857
[7] Cetin, I. (2009), *Students 'understanding of limit concept: An APOS perspective*, Dissertation, Middle East Technical University in Turkey.
[8] Cornu, B. (1992). *Limits*, In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (pp. 153-166).
[9] B.Czarnocha, E. Dubinsky, V. Prabhu and D.Vidakovic (1999). *One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research*. In: Orit Zaslaysky (Ed.) Proceedings *of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Haifa, Istael, Volume 1, (pp. 95-110)
[10] Cottrill, J., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). *Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema*, Journal of Mathematical Behavior, 15(2), 167-192.
Доступно на: Retrieved from http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/concept-limit.pdf
[11] Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). *The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages*, Journal of Mathematical Behavior, 5, 281-303.
[12] Domingos, A., (2009), *Learning advanced mathematical concept: The concept of limit*, Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France, (pp. 2266-2275)
[13] Dreyfus, T. (2007): *Processes of abstraction in context the nested epistemic actions model*, Доступно на адреси: http://escalate.org.il/construction_knowledge/papers/dreyfus.pdf
[14] Ed Dubinsky (1991), *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. In: D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* , (pp. 231–250). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
[15] Dubinsky, Ed (1992). *A learning theory approach to calculus*, In Z.A. Karian (Ed.), *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*, MAA Notes No. 24 (pp. 43-55). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
[16] Dubinsky, E. (2010, January). *The APOS theory of learning mathematics: Pedagogical applications and results*. Paper presented at the Eighteenth Annual Meeting of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education. Durban, South Africa.
[17] Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). *APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research*. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (pp. 275-282).
Доступно на: http://www.math.kent.edu/~edd/ICMIPaper.pdf
[18] Ervynck, Gontran (1988). *Conceptual di culties for rst year university students in acquisition for the notion of limit of a function*. In L.P. Mendoza & E.R. Williams (Eds.), *Canadian Mathematics Education Study Group. Proceedings of the annual meeting* (pp. 330-333). Kingston, Ontario: Memorial University of Newfoundland.
[19] Hatfield, N.J (2013), *The Action, Process, Object, and Schema Theory for sampling*, In: (Eds.) S. Brown, G. Karakok, K. H. Roh, and M. Oehrtman, *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2013, Denver, Colorado. Volume 2, (pp. 356-362)
[20] Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. & Dreyfus, T. (2001): *Abstraction in contexts: Epistemic actions*, Journal for Research in Mathematics Education, 32(2), 195-222.

[21] Hershkowitz, R, Schwarz, B. B., Dreyfus, T. & Hadas, N. (2004): *Abstracting Processes, from Individuals' Constructing of Knowledge to a Group's "Shared Knowledge",* Mathematics Education Research Journal, Vol. 19, No. 2, 41-68.

[22] Huillet, D. (2005), *Mozambician teachers' professional knowledge about limits of functions*, In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, (pp. 169-176).

[23] Giraldo, V., Carvalho, L. M., & Tall, D. O. (2003). *Descriptions and definitions in the teaching of elementary calculus,* In N. A. Pateman, B.J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Honolulu HI: Center for Research and Development Group, University of Hawaii. (Vol. 2, pp. 445-452).
Доступно на: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003d-giraldo-carv-pme.pdf

[24] Jaffae, S.M. and Dindyal, J. (2011), *Languege-related inconceprions in the study of limits*, Mathematics: Traditions and [New] Practices • © AAMT & MERGA

[25] Jordaan, T. (2005), *Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students*, Master thesis, Univestity of South Africa.

[26] Juter, K. (2006), *Limits of Functions-University Students' Concept Development*, Dissertation, Department of Mathematics Luleå University of Technology.

[27] Karatas, I. Guven, B. and Cekmez, E. (2011), *A Cross-Age Study of Students' Understanding of Limit and Continuity Concepts*, Bolema, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, 245-264

[28] Lambertus, A.J. (2007), *Students' Understanding of the Function Concept: Concept Images and Concept Definitions*, Master thesis, Graduate Faculty of North Carolina State University

[29] Li, L. and Tall, D. (1993), *Constructing different concept images of sequences and limits by programming,* In: I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Tsukuba, Japan. (Vol 2, pp. 41-48).
Доступно на: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993e-lan-li-pme.pdf

[30] Maharaj, A. (2005). *Investigating the Senior Certificate Mathematics examination in South Africa: Implications for teaching*. (Unpublished doctoral dissertation). University of South Africa, Johannesburg.

[31] Maharaj, A., (2010), *An APOS Analysis of Students' Understanding of the Concept of a Limit of a Function*, Pythagoras, 71, 41-52.

[32] Maharajh, N., Brijlall,D., & Govender, N. (2008). *Preservice mathematics students' notions of the concept definition of continuity in calculus through collaborative instructional design worksheets*. African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 12, 93-108.

[33] Masteroides, E., & Zachariades, T. (2004). *Secondary mathematics teachers' knowledge concerning the concept of limit and continuity*. In Marit Johnsen Hoines and Anne Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 481–488). Bergen: PME.

[34] Monaghan, J., Sun, S., and Tall, D. (1994). Construction of the limit concept with a computer algebra system. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Lisbon: University of Lisbon. (Vol. 3, pp. 279-286).
Доступно на: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994c-monhn-sun-pme.pdf

[35] Moru, E.K. (2006), *Epistemological Obstacles in Coming to Understand the Limit Concept at Undergraduate Level: A Case of the National University of Lesotho*, Dissertation, School of Science and Mathematics Education in the Faculty of Education, University of the Western Cape.

[36] Nair, G.S. (2010), *College Students' Concept Images of Asymptotes, Limits, and Continuity of Rational Functions*, Dissertation, College of Education and Human Ecology The Ohio State University

[37] Oehrtman, M. (2003). *Strong and weak metaphors for limits*, Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA, Vol 3, (pp. 397-404). Honolulu, HI.
[38] Oehrtman, M. (2004). *Approximation as a foundation for understanding limit concepts*. Proceedings of the Psychology of Mathematics Education North American Chapter, 23 (pp. 95-102), Snowbird, UT.
[39] Orton, A. (1983), *Students' understanding of integration*. Educational Studies in Mathematics, 14, 1-18
[40] Pons, J., Valls, J. and Llinares, S. (2011), *Coordination of aproximation in secondary school students' understanding of limit concept*, In Ubuz, B. (Ed.). Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, (pp. 393-400).
[41] Robert, A. (1982). *L'Acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'Enseignement Superieur*. Recherches en Didactique des Mathematiques, 3 (3), 307-341.
[42] Sarvestani, A.K. (2011), *Contemplating problems taken from the history of limits as a way to improve students' understanding of the limit concept*, Dissertation, Universiteit van Amsterdam (pp. 1-162)
[43] Sfard, A. (1988). Operational vs. structural method of teaching mathematics|case study. In A. Borbas (Ed.), Proceedings of the 12th Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 560-567). Vesprem, Hungary: Ferenc Genzwein, OOK.
[44] Sierpińska, A. (1987). *Humanities students and epistemological obstacles related to limits*. Educational Studies in Mathematics, 18, 371-397.
[45] Swinyard, C. and Larsen, S. (2012), *Coming to Understand the Formal Definition of Limit: Insights Gained From Engaging Students in Reinvention*, Journal for Research in Mathematics Education, 43(4), 465-493
[46] Tall, D. (1992). *The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof*. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York: Macmillan.
[47] Tall, D., and Vinner, S. (1981),. *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.
[48] Voskoglou, M.G. (2013), *An Application of the APOS/ACE Approach in Teaching the Irrational Numbers*, Journal of Mathematical Sciences and Mathematics Education, 8(1)(2013), 30-47
[49] Williams, S. R. (1991). *Models of limit held by college calculus students*, Journal for Research in Mathematics Education, 22, 219-236.