MAT-KOL (Banja Luka)
XXI (4)(2015), 215-219
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5828 (o)
doiSrpska: 10.7251/MK1504215S

NEKOLIKO RAZLIČITIH NAČINA IZRAČUNAVANJA $tg\, 15^\circ$

(A few different methods of calculations of $tg\, 15^\circ$)

Dušan J. Simjanović [1]

Sažetak: U radu je dato nekoliko različitih načina izračunavanja vrednosti $tg\ 15^\circ$.

Ključne reči: Ugao, tangens ugla, tangens zbira, tangens razlike, pravougli trougao, Pitagorina teorema, sinusna teorema.

Abstract: A few different manners of calculation of $tg\ 15^\circ$ were given in this paper.

Key words: angle, tangent of angle, tangent of sum, tangent of difference, right-angled triangle, Pythagoras theorem, sinus theorem.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40, E50**

U zbirkama za pripremu prijemnog ispita za upis na fakultete česti su zadaci u kojima treba „srediti“ izraz u kome se javljaju trigonometrijske funkcije ili dokazati neku jednakost. Jedan od takvih zadataka koji svakako zavređuje pažnju marljivog maturanta može se naći u [1,2].

Zadatak: Dokazati da je $\frac{1-tg^2 15^\circ}{1+tg^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rešenje 1: Korišćenjem elementarne trigonometrijske relacije $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{\cos\alpha}$ i formule za dvostruki ugao $\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$ dobija se

[1] Prirodno-matematički fakultet u Nišu, Višegradska 33, Niš, Srbija; Gimnazija „Svetozar Marković“ u Nišu, Branka Radičevića 1, Niš, Srbija, e-mail: dsimce@gmail.com

$$\frac{1-tg^2 15^\circ}{1+tg^2 15^\circ} = \frac{1-\frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}}{1+\frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}} = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 2 \circ 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Po rečima čuvenog mađarskog matematičara *George Pólye* značajnije je jedan matematički zadatak rešiti na više različitih načina, nego na isti način rešiti stotinu zadataka. Time se dolazi do lakšeg i elegantnijeg rešenja i u isto vreme prezentuje bogatstvo ideja čime se stiče samopouzdanje i razvija kvalitet matematičkog razmišljanja.

Osim ovakvog, direktnog pristupa, zanimljivo je izračunati i $tg\ 15^\circ$.

Rešenje 2:

$\frac{1-tg^2 15^\circ}{1+tg^2 15^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\,(1-tg^2 15^\circ) - \sqrt{3}\,(1+tg^2 15^\circ)}{2\,(1+tg^2 15^\circ)} = 0 \Leftrightarrow tg^2 15^\circ \left(2+\sqrt{3}\right) = (2-\sqrt{3}),$
odakle dobijamo da je $tg\ 15^\circ = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$.

Rešenje 3: Korišćenjem formule za dvostruki ugao $1 - tg^2\alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{tg\ 2\alpha}$ dobijamo jednačinu $tg^2\alpha + 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha - 1 = 0$, odakle, uz činjenicu da pomenuti ugao pripada prvom kvadrantu, sledi da je $tg\ 15^\circ = 2-\sqrt{3}$.

Rešenje 4: Korišćenjem formula za poluugao $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ i $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ i činjenice da pomenuti ugao pripada prvom kvadrantu, dobijamo da je

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} \text{ i } \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}},$$

$$\text{odakle je } \mathrm{tg}\,15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}} = 2-\sqrt{3}.$$

Koristeći formulu za tangens razlike, $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1+tg\alpha\ tg\beta}$ i činjenice da je $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ dobijamo još dva rešenja:

Rešenje 5: $tg\frac{\pi}{12} = tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{tg\ \frac{\pi}{4} - tg\ \frac{\pi}{6}}{1+tg\frac{\pi}{4}\ tg\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

Rešenje 6: $tg\frac{\pi}{12} = tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\ \frac{\pi}{3} - tg\ \frac{\pi}{4}}{1+tg\frac{\pi}{3}\ tg\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

Rešenje 7: Koristeći rezultat dobijen u [3] i činjenicu da je $\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{3}$, imamo da je

$$tg\,\frac{\pi}{12}=tg\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{tg\,\frac{5\pi}{12}-tg\,\frac{\pi}{3}}{1+tg\frac{5\pi}{12}\,tg\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}\,.$$

Rešenje 8: Uz formulu za tangens zbira $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\alpha\;tg\beta}$, rezultat dobijen u [4] i činjenicu da

je $\frac{5\pi}{24}=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{8}$, imamo da je $tg\,\frac{5\pi}{24}=tg\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{tg\,\frac{\pi}{12}+tg\,\frac{\pi}{8}}{1-tg\,\frac{\pi}{12}tg\,\frac{\pi}{8}}$, što uz $tg\,\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}-1$, daje $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2=\frac{tg\,\frac{\pi}{12}+\sqrt{2}-1}{1-tg\,\frac{\pi}{12}(\sqrt{2}-1)}$, odnosno $tg\,\frac{\pi}{12}\big(1+\sqrt{3}+$ *2=6+3−22−1,* odakle dobijamo da je

$$tg\,\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-1+3\sqrt{2}+3-2\sqrt{6}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4-\sqrt{2}}{1+2\sqrt{3}+3-2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\,.$$

Rešenje 9: Imamo da je

$$tg\,\frac{\pi}{12}=\frac{sin\,\frac{\pi}{12}}{cos\,\frac{\pi}{12}}=\frac{cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12})}{cos\,\frac{\pi}{12}}=\frac{cos\,\frac{5\pi}{12}}{cos\,\frac{\pi}{12}}\,.$$

Posle proširivanja poslednjeg razlomka sa $2\,sin\frac{\pi}{12}\;cos\,\frac{\pi}{12}$ i primene formula

$sin\alpha-sin\beta=2\,sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}$ i $sin\,2\alpha=2sin\alpha\;cos\alpha$ na brojilac i imenilac tim redom,

dobijamo da je

$$tg\,\frac{\pi}{12}=\frac{2\,cos\,\frac{5\pi}{12}\;sin\,\frac{\pi}{12}}{2\,cos\,\frac{\pi}{12}\;sin\,\frac{\pi}{12}}=\frac{sin\,\frac{\pi}{2}-sin\,\frac{\pi}{3}}{sin\,\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{3}\,.$$

Rešenje 10: Neka je dat pravougli trougao $\triangle\,ABC$ sa pravim uglom kod temena C (slika 1), $\measuredangle BAC=30^{\circ}$ i $\overline{AC}=1$. Kako je $sin30^{\circ}=\frac{1}{2}$, zaključujemo da je $\overline{BC}=\frac{1}{2}\,\overline{AC}$, a primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $\triangle\,ABC$ imamo da je

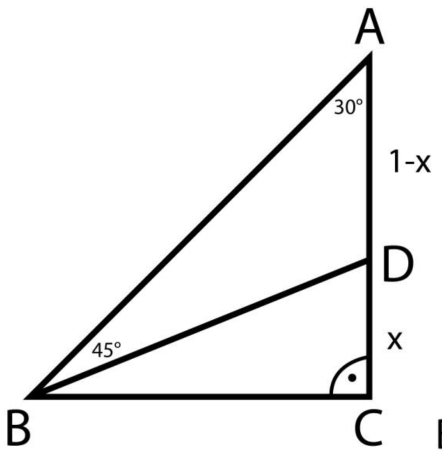
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (\frac{1}{2}\overline{AC})^2 + 1.$$

Lako se utvrđuje da je $\overline{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ i $\overline{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

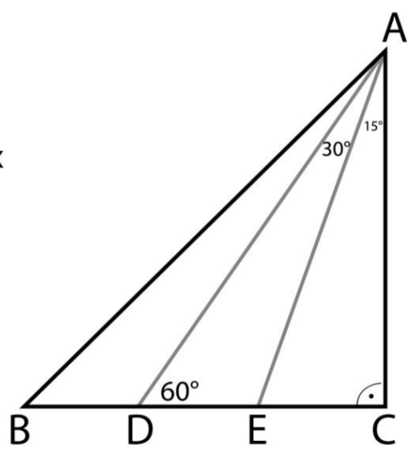
Odredimo tačku D na kateti AC tako da važi $A - D - C$ i $\measuredangle DBA = 45^{\circ}$ i uvedimo oznake $\overline{CD} = x$ i $\overline{AD} = 1 - x$.

Primenom sinusne teoreme na trougao $\triangle ABD$ imamo da je $\frac{1-x}{sin\,45^{\circ}} = \frac{\overline{BD}}{sin\,30^{\circ}}$, odakle se dobija da je $\overline{BD} = \frac{1-x}{\sqrt{2}}$. Primenom Pitagorine teoreme na trougao $\triangle BCD$ imamo da je $\overline{BD}^2 = (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + x^2$, odakle, zamenom dobijene vrenosti za $\overline{BD}$ dobijamo da je $x = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

$$tg\ 15^{\circ} = tg\frac{\pi}{12} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}\,.$$



slika 1



slika 2

Rešenje 11. Neka je dat jednakokrako-pravougli trougao $\triangle ABC$ sa pravim uglom kod temena C, dužine kateta 1 (slika 2). Konstruišimo ugao $\measuredangle CAD = 30^{\circ}$, gde je D tačka na kateti BC i važi $B - D - C$. Kako je $sin30^{\circ} = \frac{1}{2}$, zaključujemo da je $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AD}$. Neka je $\overline{AE}$ simetrala ugla $\measuredangle CAD$. Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $\triangle ACD$ imamo da je $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 1 + \overline{CD}^2$.

Jednostavno se dobija da je $\overline{AD} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ i $\overline{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Kako je $\overline{AE}$ simetrala ugla $\measuredangle CAD$,

$$\overline{DE}:\overline{EC} = \overline{AD}:\overline{AC} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \overline{EC}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} : 1,$$

odakle se dobija da je $\overline{EC} = 2 - \sqrt{3}$, odnosno

$$tg\ 15^{\circ} = tg\frac{\pi}{12} = \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} = 2 - \sqrt{3}\,.$$

Napomena: U predstavljenim rešenjima korišćene su osnovne trigonometrijske jednakosti, formule za poluugao, dvostruki ugao i tangens zbira i razlike, kao i osnovna znanja u vezi sa pravouglim trouglom i Pitagorinom teoremom. Zainteresovani čitalac može doći do zanimljivih rešenja korišćenjem **rešenja 2-5** iz [4]. Nadam se da će ovaj rad, kao i predstavljena literatura biti od koristi maturantima i đacima koji se pripremaju za matematička takmičenja.

Literatura:

[1] Manojlović, J.,Cvetković Ilić, D, *Zbirka zadataka za pripremu prijemnog ispita*, Niš, 2011.

[2] Bogoslavov, V, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2*, 35. izdanje, Beograd, 2011.

[3] Arslanagić, Š., Milošević, D, *Devet raznih izračunavanja* $tg\frac{5\pi}{24}$, MAT-KOL (Banja Luka) XVII (2) (2011), 9-16.

[4] Arslanagić, Š., Milošević, D, *Još pet raznih načina izračunavanja* $tg\frac{5\pi}{24}$, MAT-KOL (Banja Luka) XVIII (2) (2012), 11-17.