MAT-KOL (Banja Luka) ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5828 (o)
XXI (4)(2015), 205-213 doiSrpska: 10.7251/MK1504205H
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

RJEŠAVANJE JEDNOG PROBLEMA IZ GEOMETRIJSKE OPTIKE KROZ PRIMJERE RAZLIČITIH MATEMATIČKIH DOKAZA

(A geometrical optics problem solving through examples of different mathematical proofs)

Zalkida Hadžibegović, Bojan Bogdanović i Selma Franca[1]

Sažetak: U ovom radu su prikazana tri matematička rješenja jednog problema iz geometrijske optike, koji se odnosi na međusobnu udaljenost predmeta i njegove slike u sabirnoj leći zanemarive debljine. Zadatak su rješavali studenti druge godine studija fizike, a korektna tri rješenja problema su prikazala samo dva od ukupno 20 studenata.

Ključne riječi: *geometrijska optika, sabirna leća, jednadžba za tanku leću, udaljenost predmeta i slike.*

Abstract: In this paper are presented three mathematical solutions of a geometrical optics problem, which refers to the mutual distance of the object and its image given by a convergent negligible thickness lens. The task was solved by a group of physics second-year students, but only two students among 20 of them presented their three correct solutions.

Key words: *geometrical optics, convergent lens, thin lens equation, object-image distance*.

AMS Subject Classification (2010): **97G99**

UVOD

Počev od Euklida, Galileia, Isaaca Newtona, Gaussa, Paula Diraca i drugih svjetski poznatih matematičara i fizičara može se spoznati kakav je međusobni značaj i integracija matematičkih znanja za fiziku i obratno, te kako je uzajamni položaj ovih nauka značajan za razvoj kako fizike tako i za razvoj matematike[1]. Baveći se istraživanjima o matematičkim znanjima značajnim za konceptualno razumijevanje fizike David Meltzer[2] ističe važnost pozitivne korelacije između postignuća studenata na ispitima iz fizike i

[1] Univerzitet u Sarajevu, Prirodno-matematički fakultet/Odsjek za fiziku, 71000 Sarajevo, Zmaja od Bosne 33-35, Bosna i Hercegovina; E-mail adresa za kontakt: zalkida.hadzibegovic@gmail.com.

njihove sposobnosti primjene matematičkih znanja ne samo za rješavanje kvantitativnih problema (zadataka) nego i za samo razumijevanje koncepata iz fizike. Nedovoljno razvijene kompetencije za koje je kao osnovu potrebno imati potrebna matematička znanja, kako iz elementarne matematike, algebre, trigonometrije, tako i iz diferencijalnog, integralnog i vektorskog računa, su uzrok poteškoća sa kojima se susreću učenici i studenti na nastavi fizike. Sposobnost rješavanja zadataka iz fizike smatra se višim nivoima stečenih znanja i ishoda učenja. Dakle, znanja iz različitih područja matematike su od posebne važnosti za stjecanje kompetencija pri rješavanju problema u različitim disciplinama fizike. Kao segment nastavne prakse iz fizike, pojavljuje se problem integriranja znanja iz matematike u fizici, a nastavnici fizike su suočeni s problemom poučavanja u slučajevima kada su matematička znanja nužna za uspješno rješavanje različitih zadataka iz fizike koristeći grafičku, analitičku i kombiniranu metodu. Jonathan Tuminaro[3] i sam ističe činjenicu da je rješavanje zadataka iz fizike poteškoća za veliki broj učenika srednje škole, ali i studenata na univerzitetu. Istraživani problemi primjene matematičkih znanja u okviru nastave fizike odnose se, naprimjer, na razumijevanje jednadžbi, simbola, načina rješavanja, provjeravanja i odgovarajućeg kritičkog odnosa prema fizikalnom značenju rješenja [4]. David Hestenes [5] ističe u svom radu značaj matematičkih znanja za razvoj fizike, ali i samih fizičara, u smislu da se na studijima fizike uvode odgovarajući kursevi iz matematike, važni za proces poučavanja i učenja u okviru studija fizike, posebno u oblastima moderne fizike. S druge strane, za neke istraživače je zanimljivo bilo traženje podataka o uticajima na razumijevanje odnosa među varijablama, koje leže u definicijama fizikalnih veličina, u odgovarajućim jednadžbama, koje opisuju fizikalne zakonitosti, a koje treba da budu razumljive u složenom kontekstu, kao što je, naprimjer, razumijevanja zakona termodinamike [6]. Posebno je važno, kako ističe Ilsa Basson [7] da se uspostavi veza između apstraktnih matematičkih pojmova sa fizičkim veličinama koje su povezane sa svakodnevnim životom (primjer je definicija brzine u kojoj se pojavljuje granična vrijednost, odnosno prvi izvod vektora položaja u vremenu i realnost kretanja tijela u prirodi određenom brzinom).

Značaj matematičkih znanja za učenje geometrijske optike

Obzirom da je matematika jezik fizike, konceptualno razumijevanje sadržaja geometrijske optike imanentno je vezano za znanja geometrije, trigonometrije, elementarne matematike, diferencijalog i integralnog računa. U ovom radu su prikazana tri matematička modela rješavanja jednog problema geometrijske optike, koji je predstavljao poteškoću za više od 90 % studenata druge godine studija fizike na Univerzitetu u Sarajevu, u okviru aktivnosti na nastavi Optike (proljeće, 2014.). Samo 10% od ukupno 20 studenata, koji su sudjelovali u jednoj sekvenci aktivnog učenja, je imalo ideju kako riješiti postavljeni zadatak, i koji su prikazali prihvatljiva idejna rješenja problema. Samo jedna studentica (5% studenata) je prikazala kompletno rješenje, povezujući koncepte u matematici s konceptima u geometrijskoj optici. Tri modela rješavanja jednog matematičkog problema geometrijske optike pokazuju različite pristupe rješavanju istog situacijskog modela. S jedne strane se nalaze dva matematička modela, tipično algebarskog načina rješavanja matematičkih problema, a s druge strane je model rješavanja istog problema drugog studenta, koji je primijenio znanja više matematike (prvi i drugi izvod), što je bilo i očekivano od studenata druge godine studija fizike.

JEDAN MATEMATIČKI PROBLEM GEOMETRIJSKE OPTIKE

Problem iz geometrijske optike

Studenti druge godine studija fizike, u okviru nastave Optike su u okviru jedne sekvence aktivnog učenja, u trajanju od 30 minuta, imali zadatak da riješe problem iz geometrijske optika čija formulacija slijedi.

Ispred sabirne leće žižne daljine f (f >0), postavljen je svijetli predmet (strelica određena tačkama A i B), okomito na glavnu optičku osu. Dokazati da je najmanja udaljenost predmeta od njegove slike ($s = p + q$) jednaka $4f$, pri čemu je p udaljenost predmeta od centra leće, a q udaljenost slike od centra leće. Smatrati da je leća tanka i smještena u zraku. Diskutirati slučajeve: $p > f$, $p = f$ i $p < f$.

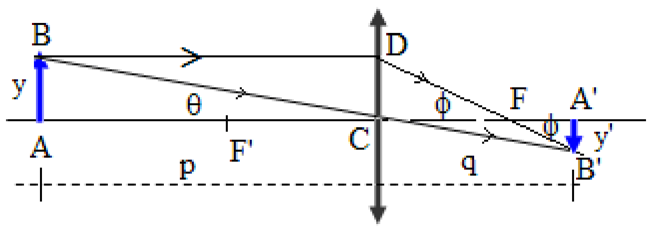
Situacijiski model potreban za rješavanje ovog problema bio je predstavljen od strane nastavnika kako slijedi.

Situacijski model

Ako se razmotri slučaj $p > f$, slika svijetlog predmeta (strelica određena tačkama A i B) veličine *y*, koji se nalazi na udaljenosti p od centra leće, se nalazi na udaljenosti q od centra leće, s druge strane leće, veličine *y'* (strelica određena tačkama A' i B'). Koristeći karakteristične zrake za konstrukciju slike dobije se realna slika (nastala presijekom realnih prelomljenih zraka svjetlosti). Prema Slici 1 za konstrukciju slike korištena su dva karakteristična zraka:

(1) zrak koji od tačke B svijetlog predmeta ide paralelno glavnoj optičkoj osi, koja prolazi tačkama F', C i F, i prelama se na kroz leću tako da prolazi kroz F koja predstavlja žižu slike, a nalazi se na udaljenosti f od centra leće C.

(2) Zrak koji od tačke B svijetlog predmeta ide bez prelamanja kroz centar leće.



Slika 1. Konstrukcija slike predmeta postavljenog ispred sabirne leće (situacijski model).

Prema [1] i [2] , u slučaju tanke leće (Gaussova aproksimacija) poznata jednadžba prema uvjetima zadatka, za sabirnu leću je:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \qquad (1)$$

gdje je $f = \overline{CF} = \overline{CF'}$.

Prema [1] i [2] transverzalno uvećanje je određeno izrazima:

$$u = \frac{y'}{y} \text{ i } u = \frac{q}{p} \qquad (2)$$

Prema situacijskom modelu prikazanom na Slici 1, korištenjem (1) i (2) potrebno je dokazati algebarsku nejednakost:

$$p + q \geq 4f \qquad (3)$$

Fizikalni smisao (3) ima za slučaj da je $p > 0$ i $q > 0$.

REZULTATI

Rješavanju zadanog problema iz geometrijske optike je pristupilo 20 studenata. Od studenata se očekivalo da zadatak riješe primjenom znanja više matematike, ali od strane nastavnika nije bilo sugestija na koji način studenti mogu pristupiti rješavanju zadanog problema. Studentica (jedan od autora), koja je u potpunosti riješila zadatak u zadanom vremenu, prikazala je model rješavanja zadanog problema, koji je u ovom radu predstavljen kao *Matematički model 1.* Obzirom da je zbog slabe uspješnosti rješavanja zadatka studentima data mogućnost da isti problem rješavaju kao dio zadaće iz geometrijske optike i dostave rješenja nakon sedam dana, ista studentica je ponudila i drugo rješenje (*Matematički model 2*). Student (jedan od autora) je ponudio očekivani model rješavanja (*Matematički model 3*) koji nije uspio završiti u zadanom vremenu, ali je rješenje zadatka kompletirao u okviru zadaće.

Rješenja studenata koja su prikazana kako slijedi su primjeri različitih ideja ali i primjene znanja iz matematike na različite načine.

Matematički model 1

Jednadžba (1) se može napisati u obliku:

$$p + q = \frac{pq}{f} \qquad (4)$$

Prema Slici 1 trougao ΔCDF sličan je trouglu $\Delta A'B'F$ (na osnovu činjenice da je ∡CFD=∡A´FB´ jer su ta dva ugla unakrsna, pa su uglovi u ova dva trougla podudarni što je uslov sličnosti trouglova) te vrijedi:

$$tg\phi = \frac{y}{f} \text{ i } tg\phi = \frac{y'}{x},\ x = \overline{A'F},\ y' = \overline{A'B'}$$

odnosno, na osnovu prethodnih relacija dobije se jednadžba:

$$\frac{y}{f} = \frac{y'}{x} \qquad (5)$$

Rješavanjem (5) po x dobije se izraz:

$$x = \frac{y'}{y} \cdot f \ ,$$

odnosno prema (2)

$$x = u \cdot f \qquad (6)$$

Trougao ΔABC sličan je trouglu $\Delta CA'B'$ te vrijedi:

$$tg\theta = \frac{y}{\overline{\overline{AC}}} \ \text{ i } \ tg\theta = \frac{y'}{\overline{\overline{A'C}}}$$

Izjednačavajući desne strane prethodnih izraza dobije se nakon sređivanja:

$$\overline{A'C} = \overline{AC} \cdot \frac{y'}{y} \qquad (7)$$

Kako je $\overline{A'C} = f + \overline{A'F}$, $\overline{AC} = f + \overline{AF'}$, $\overline{FC} = \overline{F'C} = f$, izraz (7) postaje:

$$f + \overline{A'F} = \frac{y'}{y}\left(f + \overline{AF'}\right) \qquad (8)$$

a nakon uvrštavanja (2) u (8) se dobije:

$$f + \overline{A'F} = u \cdot \left(f + \overline{AF'}\right) \qquad (9)$$

Kako je prema $x = \overline{A'F}$ i (6) , izraz (9) se može napisati u obliku:

$$f + u \cdot f = u \cdot f + u \cdot \overline{AF'},$$

odnosno

$$\overline{AF'} = \frac{f}{u} \qquad (10)$$

S obzirom da vrijedi $\overline{A'C} = f + \overline{A'F}$, $\overline{AC} = f + \overline{AF'}$, uvrštavajući $\overline{A'C} = q$ i $\overline{AC} = p$, dobiju se jednadžbe:

$$p = f + \frac{f}{u} \qquad (11)$$

$$q = f + u \cdot f \qquad (12)$$

Produkt $p \cdot q$ prema (11) i (12) iznosi:

$$p \cdot q = \left(f + \frac{f}{u}\right) \cdot \left(f + u \cdot f\right) ,$$

što nakon sređivanja postaje:

$$p \cdot q = f^2 \left(2 + u + \frac{1}{u}\right) \qquad (13)$$

Nakon uvrštavanja (13) u (4) dobije se da je udaljenost predmeta od slike:

$$p+q=f\cdot\left(2+u+\frac{1}{u}\right) \qquad (14)$$

Uzimajući u obzir da vrijedi poznata nejednakost:

$$u+\frac{1}{u}\geq 2 \qquad (15)$$

Tražena udaljenost (14) prema (15) zadovoljava nejednakost:

$$p+q\geq 4f \qquad (16)$$

što je trebalo i dokazati. Dakle, prema (16) najmanja udaljenost između predmeta i njegove slike dobijene pomoću sabirne leće iznosi 4*f*.

Diskusija:

a) Ako vrijedi da je $p = f$, dobije se prema (1) da je slika beskonačno udaljena te je udaljenost predmeta i slike ($p + q$) je beskonačno velika vrijednost, što znači da najmanja vrijednost ($p + q$) ne može biti 4*f*.
b) Ako vrijedi da je $p < f$, u ovom slučaju uvećanje leće $u > 1$ prema [1] i [2] , slika je uvijek imaginarna i uvećana. Kako za takvo uvećanje vrijedi da je

$$0<\frac{1}{u}<1,$$

te za udaljenost predmeta i uvećane slike se dobije da je

$$p+q<4f$$

te u ovom slučaju udaljenost predmeta i slike ne može imati najmanju vrijednost 4*f*.

Zaključak: na ovaj način je dokazano da najmanja udaljenost predmeta i njegove slike iznosi 4*f*, u slučaju da je predmet postavljen na udaljenosti $p > f$.

Matematički model 2

Prema izloženom situacijskom modelu potrebno iz (1) slijedi izraz:

$$q=\frac{pf}{p-f} \qquad (17)$$

Tražena udaljenost predmeta ($p + q$) nakon uvrštavanja izraza (17) postaje:

$$p+q=\frac{p^2}{p-f} \qquad (18)$$

Pretpostavimo da vrijedi nejednakost $p+q<4f$, odnosno,

$$\frac{p^2}{p-f}<4f \qquad (19)$$

U tom slučaju nakon sređivanja (19) se dobije:

$p^2<4f(p-f)$, uz uvjet da je p > f (da se ne bi promijenio znak nejednakosti), što nakon sređivanja postaje:

$$p^2 - 4fp + 4f^2 < 0 \qquad (20)$$

odnosno,

$$(p - 2f)^2 < 0 \qquad (21)$$

Kako su p i f realne vrijednosti onda izraz (21) ne vrijedi, čime je dokazano da je:

$$\frac{p^2}{p-f} \geq 4f \,,$$

odnosno prema (18) slijedi:

$$p + q \geq 4f \qquad (22)$$

što je trebalo dokazati.

Za slučaj da je $p = f$, slika je u beskonačnosti i zbir p+q je beskonačno velika vriejdenost te ne vrijedi (22).

Za slučaj da je $p < f$, slika je imaginarna i uvećana, te slijedi dokaz kao u prethodnom matematičkom modelu.

Matematički model 3

Diskutirajući izraz (17), za $p = f$, evidentno je da bi udaljenost slike od centra leće bila beskonačno velika, što govori da 4*f* nije najmanja udaljenost predmeta i njegove slike za bilo koje f > 0.

Tražena udaljenost predmeta i njegove slike u slučaju $p \neq f$ se može predstaviti izrazom:

$$s = p + q \qquad (23)$$

Ako se uvrsti (17) u (23) , nakon sređivanja dobije se funkcionalna ovisnost

$$s(p) = \frac{p^2}{p-f} \qquad (24)$$

Ekstremna vrijednost ove funkcije, ako je f parametar (f >0 za sabirnu leću) dobije se vrijednost za p, za koju prvi izvod funkcije $s(p)$ je jednak nuli:

$$\frac{d}{dp}\left[s(p)\right] = 0$$

Odnosno, prema (24) potrebno je riješiti jednadžbu:

$$\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2}{p-f}\right] = 0$$

Primjenom teoreme o prvom izvodu za količnik (24) dobije se jednadžba:

$$\frac{2p(p-f)-p^2}{(p-f)^2}=0,$$

$$\frac{p^2-2pf}{(p-f)^2}=0,$$

čija su rješenja $p_1 = 0$ i $p_2 = 2f$. Kako prvo rješenje nema fizikalnog smisla, onda je rješenje

$$p=2f \qquad (25)$$

Nakon uvrštavanja (25) u (24) dobije se ekstremna vrijednost udaljenosti predmeta i njegove slike:

$$s(2f)=4f \qquad (26)$$

Da se pokaže da je (26) minimalna vrijednost funkcije (24) za $p=2f$, potrebno je pokazati da je vrijednost drugog izvoda funkcije $s(p)$ pozitivna, odnosno da vrijedi:

$$\frac{d^2}{dp^2}\left[s(p)\right]>0\text{, za } p=2f \qquad (27)$$

Drugi izvod funkcije $s(p)$ se dobije ako se nađe prvi izvod funkcije $r(p)=\frac{ds(p)}{dp}$ koji glasi:

$$r(p)=\frac{p^2-2pf}{(p-f)^2},$$

a predstavlja prvi izvod prvog izvoda funkcije $s(p)$. Primjenom teoreme o izvodu količnika u izrazu $r(p)$, za $p \neq f$ dobije se:

$$\frac{d}{dp}\left[r(p)\right]=\frac{(2p-2f)(p-f)^2-(p^2-2pf)\cdot 2(p-f)}{(p-f)^4}$$

$$\frac{d}{dp}\left[r(p)\right]=\frac{2(p-f)^2-2(p^2-2pf)}{(p-f)^3},$$

što nakon sređivanja iznosi:

$$\frac{d}{dp}\left[r(p)\right]=\frac{2f^2}{(p-f)^3} \qquad (28)$$

čija je vrijednost za $p = 2f$:

$$\frac{d}{dp}\left[r(p)\right]\Big|_{p=2f}=\frac{2}{f}$$

Diskutirajući izraz (28) može se zaključiti da je tvrdnja iz zadanog problema ne vrijedi za slučaj da je $p < f$, obzirom da je $f > 0$, a desna strana jednadžbe (28) bi bila uvijek negativna, što vodi ka masimalnoj a ne minimalnoj vrijednosti. Prema tome za svako $f > 0$ (sabirna leća), obzirom da je vrijednost funkcije, koja je drugi izvod funkcije $s(p)$, pozitivna, najmanja udaljenosti s iznosi $4f$, što je trebalo i dokazati.

ZAKLJUČAK

Kao što se može vidjeti,, iz priloženih modela rješavanja jednog problema geometrijske optike, znanja stečena u različitim disciplinama matematike se uspješno primijenjuju u fizici, te se na taj način, osim integracije znanja stečenih u matematici i fizici, može postići bolje konceptualno razumijevanje fizičkih veličina, kao što su žižna daljina, udaljenost predmeta od centra leće, udaljenost slike od centra leće, i drugo. S druge strane, važno je istaknuti da studenti, razumijevajući da različite fizičke veličine koje imaju određena matematička značenja kao što su parametar, nezavsna varijabla, zavisna varijabla, ekstremna vrijednost, imaju sasvim konkretnu ulogu i značenje u realnom svijetu.

LITERATURA

[1] Dirac, P. (1938-39).The Relation between Mathematics and Physics-James Scott Prize Lecture. *Proceedings of the Royal Society (Edinburgh)*, 59, 122-129.

[2] Meltzer, D. E. (2002). The relationship between mathematics preparation and conceptual learning gains in physics: A possible “hidden variable” in diagnostic pretest scores. *American Journal of Physics*, 70(12), 1259-1268.

[3] Tuminaro, J. (2004). A Cognitive Framework for Anylyzing and Describing Introductory Students' Use and Understanding of mathematics in Physics. Unpublished dissertation, University of Maryland (preuzeto u aprilu 2013 sa http://www.physics.umd.edu/perg/dissertations/Tuminaro/)

[4] Herscovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher*; 73(8), 572-580.

[5] Hestenes, D. (1986). A Unifies Language for Mathematics and Physics. In: J.S.R. Chisholm/A.K. Commons (Eds.), Clifford Algebra and their Application in Mathematical Physics (pp 1-23). Reidel: Dordrecht/Boston.

[6] Rozier, S. & Viennot, L. (1991). Students’ reasoning in thermodynamics. *International Journal of Science Education*,13(2), 159-170.

[7] Basson, I. (2002). Physics and mathematics as interrelated fields of thought development using acceleration as an example, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 33(5), 679-690.