MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), 1986-5228 (o)
Vol. XXI (3)(2015), 179-202
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

Kombinatorne igre sa završnicom tipa (poraz, pobjeda) na konačnim orgrafovima[1]

Slavko Brdar[2], Marko Đukanović[3], Ilija Lalović[4]

Sažetak

Rad prikazuje klasičnu teoriju igara dva lica na konačnim grafovima, sa konačnim putevima, bez slučajnih poteza i sa završetkom tipa (poraz, pobjeda). Prikaz se ilustruje na primjerima igara sličnih igri Nim.

Abstract

The paper makes a review of the classic theory of two person games on finite, and path-finite graphs, without chance moves, and outcomes for two players restricted to (lose, win). The review is illustrated by examples of Nim-like games.

Categories and Subject Descriptors (according to AMS MSC 2010): 91A46 Combinatorial games, 91A05 2-person games, 91A43 Games involving graphs

General terms: Game theory, Impartial games, Decidability of Games, Global and local strategies

Key words and phrases: Game Nim, Game F (Fomin's game), P and N position, Game-Graph, Game-Sums, Nim-Sums, Sprague-Grandy function

1 Uvod

U ovoj sekciji uvodimo pojmove koji se odnose na orijentisane grafove (orgrafove) i predstavljamo neke činjenice o orgrafovima.

Zatim ćemo uvesti osnovne pojmove o igri dva lica sa perfektnom informacijom, bez slučajnih poteza i sa završetkom tipa (poraz, pobjeda). U radu ćemo koristiti samo konačne orgrafove, sa konačnim putevima.

O uvedenim pojmovima može se naći više detalja u knjigama [4, 6, 10]. U našem izlaganju uglavnom slijedimo knjigu [10]. Više detalja o opštoj teoriji igara može se naći u [9, 18], a o algoritamskoj teoriji igara u [8, 16]. Osnovni

[1]Rad je nastao proširenjem dijela predavanja koje je treći autor držao u okviru kursa „Dizajn i analiza algoritama" na PMF Banja Luka (I. Lalović (2014): [15]).

[2]Abteilung für Angewandte Mathematik, Universität Freiburg, Germany, e-mail: *slavko@mathematik.uni-freiburg.de*

[3]Prirodno-matematički fakultet, Mladena Stojanovića 2, 78000 Banja Luka, e-mail: *marko.djukanovic@ymail.com*

[4]Prirodno-matematički fakultet, Mladena Stojanovića 2, 78000 Banja Luka, e-mail: *ilalovich@yahoo.com*

pojmovi o teoriji složenosti mogu se naći u [10, 15]. Različiti aspekti teorije igara i interesantni primjeri mogu se naći u [1, 2, 3, 5, 12, 13, 14, 17, 18]

1.1 Uvodni pojmovi iz teorije grafova

Definicija 1.1 *Neka je $G = (V, E)$ konačan orgraf.*

(i) *Za vrh $v \in V$, skupovi*

$$S(u) = \{v \in V | (u, v) \in E\}, \; S^{-1}(u) = \{w \in V | (w, u) \in E\}$$

nazivaju se **skup sljedbenika** *i* **skup prethodnika** *vrha u, respektivno.*

(ii) *Neka je $u \in V$. Tada se*

$$d_{out} = |S(u)|, \; d_{in} = |S^{-1}(u)|, \; d(u) = d_{out}(u) + d_{in}(u),$$

nazivaju **stepen izlaza, stepen ulaza i stepen** *vrha v, respektivno.*

(iii) *Ako je $S(u) = \emptyset$, tada se u naziva* **list**. *Ako je $S^{-1}(u) = \emptyset$, tada se u naziva* **korijen** *ili* **početak**. *Ako je $S(u) = S^{-1}(u)$, tada se u naziva* **izolovani vrh**.

(iv) **Put (šetnja)** *u grafu G je svaki niz vrhova $u_1, u_2, \ldots,$ koji ne moraju biti različiti, pri čemu je za svako $i \geq 1$, $(u_i, u_{i+1}) \in E$. Grane mogu biti ponovljene.*

(v) **Dužina puta** *je broj grana u putu, pri čemu se broje i ponavljanja grana.*

(vi) *Svaki orgraf u kome je svaki put konačne dužine, naziva se graf sa konačnim putevima.*

(vii) *Podskup $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{V}$ je* **usmjereno jezgro** *ako:*

(a) *$u, v \in \mathcal{J}$ povlači $(u, v), (v, u) \notin E$,*

(b) *$u \in V - \mathcal{J}$ povlači da postoji $v \in V$ tako da je $(u, v) \in E$.*

(viii) *Označimo sa $\mathbb{Z}^0$ skup $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Neka je $M \subset \mathbb{Z}^0$ i $\overline{M} = \mathbb{Z}^0 - M$. Najmanji broj iz M je*

$$mex\, M = min\, \overline{M} = \text{najmanji nenegativan cio broj koji nije u } M.$$

(ix) **Klasična funkcija Sprague-Grandy** *ili kraće SG ili g-funkcija $g : V \to \mathbb{Z}^0$ definiše se rekurzivno sa*

$$g(u) = mex\{g(S(u))\},$$

pri čemu za proizvoljan skup M i funkciju h na M uzimamo da je

$$h(M) = \{h(t) | t \in M\}.$$

Primjedba 1.1 *(i) U daljnjem tekstu pod grafom uvijek podrazumijevamo orijentisani graf (orgraf).*

(ii) Iz definicije 1.1 slijedi da je svaki orgraf sa konačnim putevima acikličan i nema petlji.

Teorema 1.1 (A.S. Fraenkel, [11]) *Neka je $G = (V, E)$ konačan, acikličan orgraf. Tada G ima jedinstvenu g-funkciju.*

Dokaz. Indukcija po broju grana grafa. Za $|E| = 0$ iz definicije 1.1 slijedi $g(u) = 0$ za svako $u \in V$. Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za sve konačne, aciklične orgrafove sa $|E| \leq n$ i neka je G konačan, acikličan graf sa n grana, pri čemu je $n \geq 1$. Pošto je G konačan i acikličan graf, to postoji jedan vrh $v \in V$ koji nije list. Ako izbacimo taj vrh, onda dobivamo graf koji ima manje od n grana, pa prema induktivnoj hipotezi taj graf ima jedinstvenu g-funkciju. Prema definiciji 1.1 je $g(u) = mex\, g(S(u))$ određena na jedinstven način. □

Navodimo rezultat o vezi g-funkcije i jezgra orgrafa:

Lema 1.1 *Ako je $G = (V, E)$ orgraf sa g-funkcijom, tada G ima jezgro*

$$\mathcal{J} = \{u \in V | g(u) = 0\}.$$

Dokaz. Lako se provjeri da skup $\{u \in V | g(u) = 0\}$ zadovoljava definiciju jezgra datu u 1.1. □

Korolar 1.1 *Svaki konačan, acikličan, orgraf ima jedinstveno jezgro*

$$\mathcal{J} = \{u \in V | g(u) = 0\}.$$

Dokaz. Jedinstvenost se dokazuje slično kao u teoremi 1.1. □

Napominjemo da za ciklične grafove ni g-funkcija ni jezgro $\mathcal{J}$ ne moraju nužno postojati. U opštem slučaju su problemi postojanja jezgra i postojanja g-funkcije konačnog grafa NP-kompletni.

Zadatak 1.1 *Dokazati ili opovrgnuti tvrdnju da orgraf ima jezgro ako i samo ako ima g-funkciju.*

1.2 Uvodni pojmovi iz teorije igara

Razmatramo kombinatornu teoriju igara dva igrača, sa potpunom informacijom. Potpuna informacija znači da nema skrivene informacije, kao što se, na primjer, informacija skriva u nekim igrama sa kartama.

Slučajni potezi nisu dozvoljeni. To znači da pri izboru poteza igrač ne donosi odluku zavisnu od nekog slučajnog događaja, kao što je bacanje kocke.

Ograničavamo se igrama koje se završavaju sa (poraz, pobjeda). Dakle, igre koje ovdje razmatramo nemaju završnice tipa (pat, pat), kada ni jedan igrač ne može povući validan potez, ili završnice tipa (remi, remi), kada svaki igrač može povući potez, ali ni jedan igrač ne može iznuditi pobjedu.

U teoriji matričnih igara uvodi se vrijednost koju dobiva svaki igrač. Ako u kombinatornoj igri pobjedniku dodijelimo $+1$, gubitniku -1, a 0 u ostalim slučajevima, onda se može reći da su kombinatorne igre igre sa sumom nula.

Kombinatornu teoriju igara na orgrafovima koji su konačni, imaju konačne puteve i završnicu (poraz, pobjeda), nazivaćemo i *klasična teorija igara*.

Definicija 1.2 *(i)* **Normalna igra** *je igra u kojoj se igrač koji prvi dođe u situaciju da je na potezu, a ne može povući validan potez, proglašava poraženim, a njegov protivnik pobjednikom.*

(ii) **Mizerna igra** *je igra u kojoj, reverzno, igač koji igra zadnji mogući potez gubi igru.*

(iii) **Pozicija** *igre je svako stanje koje je dostižno u nekoj igri, uključujući i igre sa laživanjem. Pod laživanjem podrazumijevamo zlonamjerno eliminisanje višeznačnosti završetka igre.*

(iv) **P-pozicija** *je svaka pozicija u iz koje prethodni igrač, to jest, protivnik igrača koji povlači potez iz u, može forsirati pobjedu.*

(v) **N-pozicija** *je pozicija v u kojoj naredni igrač, to jest, igrač koji je na potezu u v, može forsirati pobjedu.*

(vi) **Nepristrasna (impartial) igra** *je igra u kojoj je skup sljedbenika za neku poziciju isti, bez obzira koji igrač igra. Inače se igra naziva* **pristrasna (partial, partisan)**. *Nim je tipična nepristrasna igra, dok je šah pristrasna igra, jer crni igrač ne može vući bijele figure i obrnuto.*

Svakoj kombinatornoj igri $\mathcal{I}$ ćemo pridružiti orgraf $G = (V, E)$. Ovdje je V skup pozicija igre $\mathcal{I}$, a grana (a, b) pripada skupu E ako i samo ako postoji potez iz pozicije a u poziciju b. Graf G zvaćemo *grafom na kojem se igra* $\mathcal{I}$, za razliku od *g*rafa igre $\mathcal{I}$, koji ćemo definisati kasnije.

Nepostojanje završnice tipa (pat, pat) i tipa (remi, remi), znači da naš graf nema petlji i da je acikličan.

Primjedba 1.2 *P, N-labele za normalnu igru smo prikazali na slikama 1 i 2. Skup svih P-pozicija ćemo označavati sa $\mathcal{P}$, a skup svih N-pozicija sa $\mathcal{N}$.*

Neka je G bilo koji orgraf sa konačnim putevima i neka je u nekom njegovom vrhu stavljen žeton. Ako dva igrača alterniraju u pomjeranju žetona u smjeru grane sa jednog vrha u susjedni mu vrh, pri čemu je dozvoljeno staviti žeton preko već postojećeg žetona, onda kažemo da igraju kombinatornu igru. Znači, svaka kombinatorna igra odgovara nekom orgrafu sa konačnim putevima i obrnuto, svaki orgraf sa konačnim putevima daje neku kombinatornu igru.

Slijedi da možemo identifikovati igre sa grafovima na kojima se one igraju. Pri tome su vrhovi grafa pozicije igre, a orijentisane grane grafa potezi igre.

Ako je graf na kome se igra konačan i acikličan, onda se igra naziva *konačna igra*, a ako graf na kome se igra ima konačne puteve, onda govorimo o igri sa konačnim putevima. Jasno je da je svaka konačna igra i igra sa konačnim putevima.

Primjer 1.1 *Jedna od najprostijih kombinatronih igara je Nim. Nim je i jedna od najstarijih igara sa dva igrača. Vjerovatno potiče iz Kine (zvana Tsyanshidzi, tj. „uzmi kamenčić"). Možda ime koje koristimo potiče od njemačke riječi* nehmen - uzimati.

Neka je dato m gomila kuglica. Igrač koji je na potezu izabira nepraznu gomilu i iz nje uklanja najmanje jednu kuglicu, a dozvoljeno je da ukloni i sve kuglice iz gomile. Razmotrimo normalnu igru.

Za $m = 1$, igrač koji je na potezu pobjeđuje ako ukloni cijelu gomilu.

Za $m = 2$ imamo dva slučaja. Ako gomile imaju različit broj kuglica, onda igrač koji je na potezu pobjeđuje ako uklanja sa veće gomile kuglice tako da izjednači gomile po veličini, a onda to ponavlja nakon poteza protivnika dok na obje gomile ne bude po nula kuglica. Ako su inicijalno gomile jednakobrojne, onda na isti način pobjeđuje igrač koji je drugi na potezu.

Za $m > 2$ pobjedničku strategiju je opisao C. L. Bouton u radu [7]. Brojevi kuglica na gomilama se predstave u binarnom obliku, a onda se na njih primijeni logička funkcija XOR (ekskluzivno ILI, sabiranje po modulu 2). Igrač koji uspije nakon svakog poteza ostaviti protivniku XOR sumu kuglica jednaku nuli, pobjeđuje. □

Na slici 1 dajemo primjer igara na grafovima. Ako u vrhovima a_1, a_2, a_3, a_4 grafa stoji žeton koji se može premjestiti u smjeru grane do nekog od sljedećih vrhova, čak i ako na njemu već stoji žeton, onda se lako vidi da je igra na grafu (a) izomorfna igri Nim sa gomilama od 1, 2, 3 kuglice respektivno, a igra na grafu (b) igri Nim sa gomilama od 1, 2, 3, 4 kuglice, respektivno. Na slici su pokazane i P, N labele grafa. Još jedan graf sa P, N labelama pokazan je na slici 2.

2 Osobine igara na konačnim acikličnim grafovima

U ovoj sekciji navodimo osobine igara na konačnim acikličnim grafovima koje ćemo iskoristiti za rješavanje primjera u sekciji 3. Dokaze dajemo prema knjizi [10]. Neke dokaze dajemo za grafove sa konačnim putevima, što je opštiji slučaj nego što nam je potrebno za rješavanje zadataka na konačnim acikličnim grafovima u sekciji 3.

2.1 P, N-pozicije i strategija

U sljedećoj lemi dajemo karakterizaciju P, N-labela.

Lema se takođe odnosi i na grafove mizerne igre, jer se ovi svode na grafove normalne igre ako se dogovorimo da se zadnji potez ne vuče i na odgovarajući način posiječemo graf mizerne igre.

Lema 2.1 *Neka je $G = (V, E)$ graf igre sa konačnim putevima. Tada je*

(i) $u \in \mathcal{P}$ *ako i samo ako je* $S(u) \subseteq \mathcal{N}$,

(ii) $u \in \mathcal{N}$ *ako i samo ako je* $S(u) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$.

Dokaz.

(i) Pretpostavimo da postoji vrh $v \in S(u) \cap \mathcal{P}$. Tada bi igrač koji vuče potez iz u u v bio pobjednik. To je suprotno pretpostavci da vrh u ima labelu P. Sa druge strane, ako saki sljedbenik vrha u ima labelu N, onda po definiciji 1.2, vrh u ima labelu P.

(ii) Pretpostavimo da je $S(u) \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Tada svi slljedbenici vrha u imaju labelu N, pa bi, prema definiciji 1.2 vrh u imao labelu P. Sa druge strane, ako je $S(u) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, onda postoji sljedbenik v vrha u sa labelom P, pa po definiciji, vrh u ima labelu N.

$\square$

Dajemo definiciju *strategije.*

Definicija 2.1 **Strategija** *je algoritam koji za svaku poziciju date igre računa labele P, N te pozicije i optimalan sljedeći potez, saglasan sa labelama, koji vodi do pobjede u konačnom broju koraka za N-poziciju.*

Sada se postavlja pitanje da li u igri na konačnom, acikličnom grafu pobjeđuje tačno jedan igrač. Odgovor dajemo u teoremi koja slijedi.

Teorema 2.1 *Neka je $\mathcal{I}$ igra dva lica sa perfektnom informacjom, bez slučajnih poteza, na grafu sa konačnim putevima. Tada postoji pobjednička strategija za tačno jednog igrača.*

Dokaz. Dokazaćemo da se skup M pozicija igre $\mathcal{I}$ može podijeliti na dva podskupa $\mathcal{P}$ i $\mathcal{N}$ tako da važi $M = \mathcal{P} \cup \mathcal{N}$ i $\mathcal{P} \cap \mathcal{N} = \emptyset$.

Pretpostavimo da postoji pozicija u takva da $u \notin M$. Pozicija u ne može biti izolovana i ne može biti list grafa, jer bi u tom slučaju pripadala $\mathcal{P}$, po definiciji. Sada je $S(u) \cap \mathcal{P} = \emptyset$, jer bi inače prema lemi 2.1 pozicija u bila N-pozicija. Takođe imamo $S(u) \not\subseteq \mathcal{N}$, inače bi, prema lemi 2.1, u bila P-pozicija. Pošto u mora imati sljedbenika u_1, zaključujemo da važi $u_1 \notin M$. Ponavljajući prethodno rasuđivanje na poziciju u_1, zatim na poziciju u_2 dobivenu kao sljedbenik

u_1 i nastavljajući postupk dalje, dobivamo beskonačan put $u, u_1, u_2, \ldots$. To je suprotno pretpostavci da naš graf ima samo puteve konačne dužine.

Prema lemi 2.1 slijedi da ne može biti $\mathcal{P} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. □

Računanje P, N-pozicija

Sljedeći algoritam računa P, N-pozicije igre na konačnim, acikličnim orgrafovima:

Algoritam za određivanje P i N pozicija

1. Na svaki list staviti labelu P.

2. Na svaki vrh koji nema labelu, staviti labelu N ako taj vrh ima sljedbenika sa labelom P.

3. Ako postoji neki vrh bez labele, koji ima sve sljedbenike sa labelom N, staviti labelu P na taj vrh i vratiti se na 2. Inače završiti rad.

Algoritam za određivanje P i N pozicija se može implementirati koristeći metodu pretraživanja u dubinu. Ako je graf $G = (V, E)$ predstavljen matricom incidencije, reda $|V| \times |V|$, onda je složenost algoritma $O(|V| + |E|)$.

Zadatak 2.1 *Na primjeru grafa datog na slici 2 provjeriti rad algoritma za određivanje P i N pozicija.*

2.2 Suma igara

Algoritam za određivanje P, N labela u principu pokriva klasičnu teoriju kombinatornih igara, jer za svaku igru na konačnim acikličnim grafovima, sa krajem tipa (poraz, pobjeda) možemo konstruisati graf na kome se igra i izračunati P, N labele u $O(|V| + |E|)$ koraka, što je polinomijalan broj koraka u odnosu na veličinu grafa. Problem je što je najčešće veličina grafa eksponencijalna u odnosu na veličinu igre.

Savremena kombinatorna teorija igara može se posmatrati kao pokušaj da se kombinatorne igre podijele na one koje se rješavaju u polinomijalnom vremenu i one koje su nerješive. Uvođenje pojma sume igara i korištenje Sprague-Grundy funkcija omogućava da se nađu polinomijalne strategije za neke klasične igre, bez obzira na veličinu njihovog grafa.

Sumu igara uvodimo da bi se eliminisale neke nepogodnosti koje se pojavljuju ako igramo na grafu. Na primjer, ako na vrhove b_1 i b_6 grafa sa slike 2 stavimo žetone, onda se ta pozicija može smatrati P pozicijom, jer u tom slučaju igrač koji je prvi na potezu gubi u normalnoj igri, iako su vrhovi označeni sa N. Ako žetone stavimo na vrhove b_1 i b_2, koji su takođe označeni sa N, onda igrač koji je prvi na potezu dobiva normalnu igru premještajući žeton sa b_2 na b_1, pa je ovo N pozicija. Ovo nam govori da P, N uzorak na orgrafu, na kojem se igra, ne određuje uvijek pobjedničku strategiju, dok P, N uzorak na odgovarajućem grafu igre, u kojem su vrhovi tipa (a_1, a_2, a_3) za igru sa slike 1 (a) ili tipa (a_1, a_2, a_3, a_4), za igru sa slike 1 (b), određuje.

Ako uzmemo tri kopije grafa sa slike 1 (a), stavimo žeton na a_1 u prvoj kopiji, na a_2 u drugoj kopiji i na a_3 u trećoj kopiji, dobićemo igru nim, ekvivalentnu ranije opisanoj u primjeru 1.1. Svaki igrač na potezu pomjera žeton na vrh sljedbenik. U ovoj reprezentaciji Nim-pozicija $(1, 2, 3)$ je *suma* tri pojedinačne gomile veličine 1, 2, i 3, respektivno.

Motivisani ovim primjerom definisaćemo graf igre G od sume igara $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_m$, koje imaju grafove igre $G_1, \ldots, G_m$, respektivno.

Definicija 2.2 *Neka je $G_1, \ldots, G_m$ konačna disjunktna familija orgrafova $G_i = (V_i, E_i), 1 \leq i \leq m$. Tada je graf igre $G = Z(G_1, \ldots, G_m)$ od sume grafova G_i, orgraf $G = (V, E)$, gdje je*

$$V = \{(u_1, \ldots, u_m) | u_i \in V_i, 1 \leq i \leq m\}.$$

Ako je $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m) \in V$, tada je $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E$ ako i samo ako $(\exists j)(j \in \{1, \ldots, m\} \wedge (v_j \in S(u_j)))$, to jest $(u_j, v_j) \in E_j$ i $(\forall i)((i \neq j) \Rightarrow (u_i = v_i))$.

Sada možemo ocijeniti kardinalnost skupa vrhova grafa G. Ako su vrhovi $(u_1, \ldots, u_m)$ uređene m-torke, onda je $V = V_1 \times \ldots \times V_m$. U igri Nim vrhovi nisu uređene m-torke. Ako svaka od m gomila ima najviše n žetona, tada je broj vrhova jednak broju m-kombinacija sa ponavljanjem od $n+1$ objekata, po m puta za svaki objekat, pa iznosi $\binom{m+n}{m}$. Za $m = n$ suma-graf G ima $\binom{2n}{n} = \Theta(\frac{4^n}{\sqrt{n}})$ vrhova, pa je eksponencijalnog reda u odnosu na n.

Radi poređenja dajemo ocjenu broja vrhova grafa G koji odgovara igri šah. Ako se šah igra na tabli dimenzija $n \times n$, $(n \in \mathbb{N})$, a broj figura je kao u klasičnoj šahovskoj igri $\frac{n^2}{2}$, tada je broj mogućih konfiguracija $\binom{n^2}{\frac{n^2}{2}} = \Theta(\frac{2^{n^2}}{n})$. Usput napominjemo da je dokazano da strategija za šahovsku igru ima eksponencijalnu složenost, ali do danas niko nije našao tu strategiju.

Napominjemo da su, pri velikoj dužini ulaza, eksponencijalne strategije, kao i polinomijalne strategije kod kojih polinom složenosti ima dovoljno veliki stepen, ili neizvodljive na savremenim računarima, ili završavaju rad za vrijeme koje je neprihvatljivo u praktičnoj igri. Zbog toga igre sa takvim strategijama mogu u praksi i na popularnom nivou ostati zanimljive i kada je nađena njihova strategija.

2.3 Korištenje Sprague-Grandy funkcije

U teoremi 1.1 smo dokazali postojanje i jedinstvenost funkcija Sprague-Grandy za konačne, aciklične orgrafove. Pokazaćemo da se za ove grafove g-funkcija može sračunati u polinomijalnom vremenu u odnosu na standardni matrični zapis grafa.

Algoritam SG

1. Postavimo na listove labele 0.

2. Ako je u vrh bez labele, a njegovi sljedbenici $S(u)$ imaju labele, onda na vrh u postavljamo labelu $mex(l(S(u)))$. Ponavljamo korak 2.

3. Stavimo $g(u) \leftarrow l(u)$ za sve u za koje je labela $l(u)$ izračunata. Kraj.

Algoritam se implementira, koristeći pretraživanje u dubinu, slično kao i algoritam za postavljanje P, N labela. Slično kao i kod implementacije algoritma za P, N labele, pokazuje se da *Algoritam SG* ima vremensku složenost $O(|V|+|E|)$, pa je polinomijalan u odnosu na veličinu grafa, ako je graf $G=(V,E)$ ukodiran na standardan način.

Za dokaz da algoritam *AlgoritamSG* završava rad dokažimo da u svakoj fazi algoritma postoji nelabelisan vrh grafa čiji su svi sljedbenici već labelisani. Ako ne bi bilo tako, onda bi postojao nelabelisan vrh u_0 i vrh $u_1 \in S(u_0)$ koji nema labelu (inače bi u_0 imao labelu), zatim nelabelisan vrh u_2, $u_2 \in S(u_1)$, i tako dalje. Ovo je u suprotnosti sa pretpostavkom da je graf konačan i acikličan. Sada možemo zaključiti da *AlgoritamSG* završava rad sa labelama $g(u) = mex(S(u))$. Ako pretpostavimo da su labele u $S(u)$ jedinstvene, onda po indukciji zaključujemo da je i labela $g(u)$ jedinstvena.

Na početku sekcije smo pokazali na primjerima da informacija data sa P, N labelama nije dovoljna za nalaženje polinomijalne strategije za sume igara definisanih na konačno mnogo konačnih, acikličnih orgrafova. Pokazaćemo da koristeći g-funkciju možemo naći polinomijalnu strategiju.

Počećemo sa karakterisanjem skupova $\mathcal{P}$ i $\mathcal{N}$ pomoću g-funkcije.

Teorema 2.2 *Neka je $G=(V,E)$ konačan acikličan orgraf. Za normalnu igru sa jednim žetonom na G imamo*

$$\mathcal{P} = \{u \in V | g(u) = 0\}, \mathcal{N} = \{u \in V | g(u) \neq 0\}.$$

Dokaz. Neka je $Z_1 = \{u \in V | g(u) = 0\}$, $Z_2 = \{u \in V | g(u) \neq 0\}$. Svaka pozicija $u \in Z_1$ zadovoljava $S(u) \subseteq Z_2$, a svaka pozicija $u \in Z_2$ zadovoljava $S(u) \cap Z_1 \neq \emptyset$. Prema lemi 2.1 slijedi da je $Z_1 = \mathcal{P}$ i $Z_2 = \mathcal{N}$. □

Dalje ćemo slijediti ideje opisane u primjeru 1.1 i radu [7]. Cijeli broj $X \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ćemo pisati u binarnom obliku $X = \Sigma_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$, $(x_i \in \{0,1\})$. Ekskluzivnu disjunkciju ćemo označavati sa XOR, a njoj ekvivalentnu operaciju sabiranja binarnih brojeva po modulu 2, sa $\oplus$. Binarnu operaciju $\oplus$ zadajemo tabelom

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Sumu

$$Z = X \oplus Y \text{ dva broja } X, Y \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

po modulu 2, dobivamo tako što brojeve sabiramo po modulu dva, po ciframa u binarnom zapisu i dobivamo

$$z_i = x_i \oplus y_i,\ z_i \in \{0, 1\},\ i \geq 0.$$

Takvu sumu ćemo zvati Nim-suma. Nim-suma je asocijativna, a važi i $X \oplus X = 0$, za svaki $X \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Kada je Nim-suma broja kuglica na gomilama u igri Nim različita od nule, tada se može sa najveće gomile skinuti neki broj kuglica tako da Nim-suma preostalih kuglica u gomilama bude nula. Na primjer, ako u gomilama imamo 2, 3, 4 kuglice, respektivno, onda je

$$\begin{array}{ccccc} 2 & = & 0 & 1 & 0 \\ 3 & = & 0 & 1 & 1 \\ 4 & = & 1 & 0 & 0 \\ \hline \text{XOR(2,3,4)} & = & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Da bi XOR (zbir po modulu dva) bio nula, mijenjamo red sa četiri kuglice tako da u svakoj koloni binarnih reprezentacija dobijemo paran broj jedinica, pa dobivamo

$$\begin{array}{ccccc} 2 & = & 0 & 1 & 0 \\ 3 & = & 0 & 1 & 1 \\ 1 & = & 0 & 0 & 1 \\ \hline \text{XOR(2,3,1)} & = & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

jer smo iz reda sa 4 kuglice skinuli 3 kuglice. Sa druge strane, ako je Nim-suma broja kuglica u gomilama jednaka nuli, koji god broj kuglica skinemo sa neke gomile Nim-suma će prestati biti jednaka nuli, jer će nestati jedinice u binarnoj repezentaciji broja kuglica te gomile koje pri sabiranju po modulu dva daju nulu u kombinaciji sa drugim jedinicama iz binarne reprezentacije brojeva kuglica u drugim gomilama. Igrač koji počne sa Nim-sume različite od nule, pobjeđuje tako što uvijek skida sa najveće gomile onoliko kuglica da protivniku Nim-suma ostatka bude nula.

Ako obilježimo

$$\bigoplus_{i=1}^{m} X_i = X_1 \oplus \ldots \oplus X_m$$

Nim-sumu kuglica na m gomila, tada možemo uopštiti gornje razmatranje. U sljedećoj lemi formulišemo to uopštenje.

Lema 2.2 (Osnovna lema) *Neka su* $X_1, \ldots, X_m$, $(m \geq 1)$ *brojevi iz* $\mathbb{N} \cup \{0\}$, *takvi da je* $Z = \bigoplus_{i=1}^{m} X_i > 0$ *i neka je* $0 \leq B < Z$, $B \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Tada* $(\exists j)(\exists R)((0 \leq j \leq m) \wedge (R \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge (0 \leq R < X_j) \wedge (B = R \oplus \bigoplus_{i \neq j} X_i))$.

Dokaz. Neka je $k = max\{i | b_i \neq z_i\}$. Pošto je $B < Z$ slijedi da je $b_k = 0$ i $z_k = 1$. Zbog toga postoji $0 \leq j \leq m$ tako da u sabirku X_j imamo $x_k^{(j)} = 1$.

Ako stavimo $R = X_j \oplus B \oplus Z$, onda na svakoj poziciji $l > k$ imamo $r_l = x_l^{(j)}$, jer je $b_l = z_l$. Osim toga je i $x_k^{(j)} = 1$ i $r_k = 0$, pa slijedi da je $0 \le R < X_j$. Sada imamo $B = R \oplus Z \oplus X_j = R \bigoplus_{i \ne j} X_i$. $\square$

Koristeći lemu 2.2 dokazaćemo postojanje i jedinstvenost Sprague-Grundy funkcije za graf-sumu konačnih, acikličnih orgrafova.

Teorema 2.3 *Neka je $G = (V, E)$ graf-suma konačnih, acikličnih orgrafova $G_1, \ldots, G_m$ i neka je $\sigma(\mathbf{u}) = \bigoplus_{i=1}^{m} g(u_i)$ za svaki $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in V$. Tada je σ jedinstvena g-funkcija za G.*

Dokaz. Iz ranijeg izlaganja slijedi da za svako i, $(1 \le i \le m)$, svaki G_i ima jedinstvenu g-funkciju. Neka je $\mathbf{v} \in S(\mathbf{u})$. Prema definiciji sume grafova $\mathbf{v}$ je oblika $(u_1, \ldots, v_j, \ldots, u_m)$, gdje je v_j sljedbenik u_j u grafu G_j. Zbog toga je $g(v_j) \ne g(u_j)$ i dalje $\sigma(\mathbf{v}) \ne \sigma(\mathbf{u})$. Netrivijalan je slučaj $\sigma(\mathbf{u}) > 0$. Primijenićemo lemu 2.2 sa $X_i = g(u_i)$, $(1 \le i \le m)$ i $Z = \sigma(\mathbf{u})$.

Prema lemi 2.2, za svako $0 \le B < Z$, postoji odgovarajuće R, $0 \le R < g(u_j)$, tako da je $B = R \oplus \bigoplus_{i \ne j} g(u_i)$. Prema lemi i definiciji mex funkcije, postoji $v_j \in S(u_j)$ tako da je $R = g(v_j)$. To daje $B = \sigma(\mathbf{v})$, gdje je $\mathbf{v} = (u_1, \ldots, v_j, \ldots, u_m) \in S(\mathbf{u})$. Odavde je $\sigma(\mathbf{u}) = mex\, \sigma(S(\mathbf{u}))$.

Pošto je orgraf G konačan, sa putevima konačne dužine, slijedi da je g-funkcija σ jedinstvena. $\square$

Primjedba 2.1 *U dokazu jedinstvenosti g-funkcije σ u teoremi 2.3, korištena je činjenica da orgraf G ima konačno mnogo puteva i ti putevi su ograničeni. Teorema važi i u opštijem slučaju, za grafove sa lokalno konačnim putevima, pri čemu graf G ima lokalno konačne puteve ako su dužine orijentisanih puteva iz svakog vrha ograničene nekim cijelim brojem.*

Korolar 2.1 *Neka je $G = (V, E)$ suma orgrafova $G_1, \ldots, G_m$, $(m \ge 1)$, koji su konačni, imaju konačne puteve i nemaju izolovane vrhove. Tada su P, N labele grafa G za normalnu igru date sa*

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{u} \in V \,|\, \sigma(\mathbf{u}) = 0\},\ \ \mathcal{N} = \{\mathbf{u} \in V \,|\, \sigma(\mathbf{u}) \ne 0\}$$

i mogu biti izračunate u polinomijalnom vremenu u odnosu na veličine standardnih zapisa grafova $G_1, \ldots, G_m$.

Dokaz. Ispravnost P, N labelisanja slijedi iz teorema 2.2 i 2.3. Računanje g za G_i, $(1 \le i \le m)$ je polinomijalno prema $AlgoritamSG$, a računanje σ iz g je polinomijalno, jer suma grafova sadrži konačno mnogo, konačnih orgrafova. $\square$

Sada možemo formulisati strategiju za normalne igre na sumi konačnih, acikličnih orgrafova.

U polinomijalnom vremenu izračunamo P, ili N labelu pozicije $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ iz koje treba povući potez. Ako je $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$, onda XOR sumu treba dovesti na nulu. U sumi $\sigma(u)$ nađemo krajnju lijevu poziciju k sa bitom 1. Zatim nađemo komponentu G_j takvu da $g(u_j)$ ima bit 1 na k-toj poziciji. Prema definiciji mex funkcije za g, postoji sljedbenik v_j od u_j tako da je

$$g(v_j) = g(u_j) \oplus \sigma(u) = \bigoplus_{i \neq j} g(u_i) < g(u_j).$$

Potez u $\mathbf{v} = (u_1, \ldots, v_j, \ldots, u_m) \in S(\mathbf{u})$ je pobjedonosni potez, jer je $g(v_j) \oplus g(v_j) = 0$, što daje $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$.
Strategija za igruNim je specijalan slučaj navedene strategije, pošto se vrijednosti g-funkcije poklapaju sa brojem kuglica u gomili.

3 Primjeri

U sljedećim primjerima treba naći pobjedničku strategiju i u nekom od programskih jezika napisati program koji pobjeđuje u predloženoj igri.

1. **Igra F (Igra Fomin-a).** U gomili je n kuglica. Igrač na potezu razlaže svaku gomilu, koja sadrži više od jedne kuglice, na dva neprazna dijela. Gubi igrač koji je na potezu, a nema gomile koja se može razložiti.
   Uputa. Lako se vidi da je za ishod igre, na svakom koraku, bitna samo gomila sa najvećim brojem kuglica i da pozicije u kojima najveća gomila sadrži $2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ kuglica, imaju vrijednost Sprague-Grandy funkcije 0, dok pozicije u kojima broj kuglica u najvećoj gomili $|b|$ zadovoljava $2^k - 1 < |b| < 2^{k+1} - 1$, $k \in \mathbb{N}$, imaju vrijednost g-funkcije različitu od 0.
   Strategija: Ako početna gomila ima broj kuglica koji odgovara vrijednosti 0 g-funkcije, onda treba prepustiti prvi potez protivniku. Inače, gomilu treba razdijeliti tako da u većem dijelu bude broj kuglica koje odgovaraju vrijednosti 0 g-funkcije. Tada protivnik mora razdijeliti najveću gomilu tako da u većem dijelu bude broj kuglica različit od $2^k - 1$ i tako nam omogućiti da mu ponovo ostavimo poziciju u kojoj je vrijednost g-funkcije 0. Dokazujemo to indukcijom. Za broj kuglica $1 = 2^1 - 1$ i $3 = 2^2 - 1$, tvrdnja je tačna. Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za neko $k \in \mathbb{N}$. Za $k + 1 \in \mathbb{N}$ imamo da je $2^{k+1} - 1 = 2 * 2^k - 1 = 2^k + (2^k - 1)$, što znači da igrač na potezu kada je u najvećoj gomili broj kuglica koji odgovara vrijednosti 0 g-funkcije, mora pri dijeljenju napraviti jednu gomilu koja sadrži više od $2^k - 1$ kuglica.

2. Na stolu se nalazi gomila od 50 (opštije $n \in \mathbb{N}$) kuglica. Igrači alterniraju u uzimanju kuglica iz gomile, najmanje jednu, a najviše šest. Pobjeđuje onaj ko uzme posljednju kuglicu.
   Uputa. Za Sprague-Grandy funkciju imamo redom $SG(0) = 0$, $SG(1) = 1$, $SG(2) = 2$, $SG(3) = 3$, $SG(4) = 4$, $SG(5) = 5$, $SG(6) = 6$, $SG(7) =$

0, $SG(8) = 1, \ldots$ i uopšte, za $SG(7k + r) = r$, za $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < 7$.
Strategija. Ako broj kuglica nije djeljiv sa sedam, uzimamo potez i protivniku ostavljamo broj kuglica koji je djeljiv sa sedam. Ako igra počinje sa brojem kuglica koji je djeljiv sa sedam, dajemo prvi potez protivniku.

3. U igri se izabere prosta godina: februar ima 28 dana. Prvi igrač predlaže neki datum iz januara. Kada je na potezu, svaki igrač povećava datum, povećavajući dan u mjesecu, ili mjesec, ali ne oboje. Igrač koji prvi dođe do 31. decembra, pobjeđuje.
Uputa. $SG(31.\textit{decembar}) = 0$, jer je to list grafa na kojem se igra završava. $SG(30.\textit{decembar}) = 1$, jer se iz njega može dobiti $31.\textit{decembar}$, povećavajući dan. Slično $SG(29.\textit{decembar}) = 2$, jer se iz njega mogu dobiti $30.\textit{decembar}$ i $31.\textit{decembar}$ i tako dalje za datume iz decembra. Sa druge strane, iz svakog 31. nekog mjeseca, može se dobiti svaki 31. mjeseci koji slijede iza njega, povećavajući broj mjeseca. Zbog toga je $SG(31.\textit{oktobar}) = 1$, $SG(31.\textit{avgust})) = 2 \ldots$
Strategija. Treba naći klase ekvivalencije koje odgovaraju pojedinim vrijednostima SG-funkcije, a onda je lako igrati na način koji obezbjeđuje pobjedu.

4. Na stolu su karte sa brojevima od 1 do 6, pri čemu se „kec” broji kao jedinica i boja nema uticaja na vrijednost karte. Svaki igrač uzima sa stola kartu i sabira je sa sumom karata koje su već bile na stolu. Pobjeđuje igrač koji prvi dostigne zbir 50. Ako igrač koji je na potezu, sa bilo kojom kartom što je ostala na stolu, mora prebaciti 50, on gubi igru.
Uputa. Za poziciju uzeti sastav karata na stolu zajedno sa njihovim vrjednostima, to jest opisati koliko je jedinica, koliko dvojki, ... Suma koja je na raspolaganju se dobije ako se od 84 odbije zbir karata na stolu. Nakon što se nađu pozicije igre, lako je naći njihovu SG-funkciju i odrediti strategiju.

5. **Igra** Nim. Dato je $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gomila kuglica. Svaki igrač izabira jednu nepraznu gomilu i sa nje skida pozitivan broj kuglica, to jest najmanje jednu, a najviše sve kuglice iz gomile. Naći pobjedničku strategiju za normalnu igru.
Uputa. Ako je Nim-suma gomila jednaka 0, onda treba prepustiti prvi potez protivniku. Inače, sa Nim-sumom koja je različita od 0, prema osnovnoj lemi 2.2, treba sa gomile sa najvećim brojem kuglica, skinuti neke kuglice, tako da Nim-suma preostalih kuglica bude 0.

6. **Igra Marienbad.** U francuskom igranom filmu „Prošle godine u Marienbadu” osoba A nagovori osobu B da odigraju igru koju danas zovemo Marienbad-ska igra. Osoba A posloži karte na sto kao na slici 3, pri čemu redovi igraju ulogu gomila. Marienbad-ska igra je mizerni Nim, to jest, gubi igrač koji uzima posljednju kartu.
Uput. Treba igrati na Nim-*sumu* 0, kao i u običnom $Nimu$, dok ne ostane samo jedna gomila sa više od jedne kuglice. Tada treba uzeti sve,

ili ostaviti samo jednu kuglicu. Dokazati da je opisana strategija pobjednička.

7. **(Igra** $Nim2$.) Igra se kao i Nim, s'tim što je dozvoljeno igraču da uzima i sa dvije gomile i to sa jedne 1 kuglicu, a sa druge 2 kuglice.

8. **(Igra** $Cut-Throat-Nim$.**)** Igra se kao Nim osim što je igraču dozvoljeno da nakon uzimanja kuglica sa gomile tu gomilu podijeli na dva dijela, ako to želi.

9. **Igra Northcott-a** se igra na tabli $m \times n$, $(m, n \in \mathbb{N})$. Jedan igrač ima bijele žetone, a drugi crne. U početku se crni žetoni nalaze na krajnjim lijevim poljima, a bijeli na krajnjim desnim poljima redova table. Kada je na potezu, igrač pomjera jedan svoj žeton, lijevo ili desno, za onolko polja koliko on hoće. Pri tome ne može prelaziti van table i ne može proći polje ispred protivničkog žetona. Žetoni ne „jedu" jedan drugog i ne mogu prelaziti preko zauzetog polja. Gubi igrač koji ne može pomjeriti žeton, jer su mu svi žetoni zarobljeni između kraja table i protivničkih žetona.
Uputa. Broj mjesta između dva žetona u svakom redu predstavlja veličine Nim gomila. Igrati igru Nim i nastojati da Nim-suma broja mjesta (odgovara veličini gomile igre Nim) između žetona, izračunata za sve redove, postane 0.

10. Kuglice su postavljene u jednoj liniji. Svaki igrač na svom potezu uzima jednu kuglicu iz linije ili dvije susjedne kuglice iz linije. Naći pobjedničku strategiju u normalnoj igri za opisanu igru i za uopštenu igru, kada se igra na više linija, pri čemu igrač bira liniju i sa izabrane linije uzima jednu ili dvije susjedne kuglice.
Uputa. Za određivanje pobjedničke strategije treba izračunati *Nim-sume* grupa kuglica preostalih u liniji.

Primjedba 3.1 $SG(0)$, $SG(1)$, $SG(2), \ldots$ *vrijednosti su redom*

$$0, 1, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 2, 6 \ldots.$$

Interesantno je da dati niz postaje periodičan, počevši od 71, *sa periodom* 12. *Napišite program koji će to provjeriti nakon što mu zadate niz početnih vrijednosti* SG-$funkcije$ *i* Nim-*sumu.*

11. **Ramsey-eva „igrica".** U ravni su date šest tačaka koje su tjemena pravilnog šestougla. Jedan igrač ima plavu olovku, a drugi crvenu. Igrač koji je na potezu crta duž koja spaja dva tjemena šestougla. Gubi igrač koji prvi nacrta trougao svojom bojom.

12. Na stolu je gomila od šezdeset kuglica. Svaki igrač, na svom potezu, uzima najmanje jednu, a najviše dupli broj kuglica u odnosu na broj koji je uzeo njegov prethodnik. Pobjeđuje igrač koji uzme zadnju kuglicu.

13. **Igru „master-mind”** predlažemo u
lakoj varijanti: 4 kombinacije od 6 figura i 6 pogađanja
srednjoj varijanti: 6 kombinacija od 8 figura i 8 pogađanja.
Jedan igrač postavi figure u liniju, a drugi igrač pogađa vrstu i redosljed figura. Poslije pogađanja, igrač koji je postavio figure, daje liniju u kojoj za pogođenu figuru na pravom mjestu štampa crveni krug, a za pogođenu figuru i nepogođeno mjesto štampa žuti krug. Jedna varijanta ove igre trenutno se koristi u takmičarskoj emisiji na TV.

14. U gornjem lijevom uglu šahovske table postavljen je crni top, a u donjem desnom uglu bijeli top. Na poljima table postavljeno je 13 žetona. Topovi se kreću kao u šahu i mogu „jesti” žetone ili jedan drugoga. Gubi igrač kojem je „pojeden” top, a ako ni jedan top nije „pojeden”, onda gubi igrač koji je „pojeo” manje žetona. Probajte i varijantu igre u kojoj je top zamijenjen nekom drugom figurom.

15. **Igra nule i plusevi.** Na tabli sa 5 redova 7 kolona jedan igrač ispisuje o, a drugi $+$. pobjeđuje igrač koji prvi uspije postaviti četiri svoja znaka horizontalno, ili uspravno ili po dijagonali table.

16. **Igra ParNeSveNeparSve.** Imamo jednu gomilu žetona sa koje se mogu ukloniti
(1) bilo koji paran broj žetona, ali ne cijela gomila, ili
(2) cijela gomila pod uslovom da ima neparan broj žetona.
Uputa. Primijetimo da graf igre ima dva lista, sa gomilama veličine nula i dva, respektivno. Ako sa x označimo broj kuglica u gomili, a sa $g(x)$ odgovarajuću SG funkciju, onda imamo sljedeću tabelu:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
g(x)	0	1	0	2	1	3	2	4	3	5	4	...

Prema tabeli naslućujemo opšti oblik SG funkcije:

$$g(2k) = k - 1$$

i

$$g(2k-1) = k \text{ za } k \geq 1.$$

Jasno je da za listove grafa imamo $g(0) = g(2) = 0$. Dalje imamo $g(1) = 1$, jer je 0 jedina pozicija na koju se možemo pomjeriti sa 1.
Dokazaćemo formule indukcijom po k. Pretpostavimo da je $k > 1$. Korištenjem induktivne hipoteze i osobine mex funkcije imamo:

$$g(2k) = mex\{g(2k-2), g(2k-4), ..., g(2)\}$$

$$= mex\{k-2, k-3, ..., 0\} = k - 1.$$

$$g(2k-1) = mex\{g(2k-3), g(2k-5), ..., g(1), g(0)\}$$

$$= mex\{k-1, k-2, ..., 0\} = k.$$

Pretpostavimo da se igra sa tri gomile veličine 10, 13, 20. Odgovarajuće *SG-vrijednosti* su $g(10) = 4$, $g(13) = 7$, $g(20) = 9$, pa imamo $4 \oplus 7 \oplus 9 = 10 \neq 0$. Pobjednički potez predstavlja izmjenu veličine treće gomile sa *SG-vrijednosti* 9 na *SG-vrijednost* 3. To možemo postići uklanjanjem 12 žetona iz gomile 20 ostavljajući u gomili 8, jer je pri tome $g(8) = 3$. Sada je *Nim-suma* broja žetona na gomilama jednaka $4 \oplus 7 \oplus 3 = 0$.

17. **Prevrtanje novčića.** Neka je u jednom redu postavljeno $n \in \mathbb{N}$ novčića, slučajnim izborom okrenutih na pismo ili glavu. Potez u igri se sastoji od okretanja jednog od novčića od glave (G) na pismo (P), a pored toga, po želji, okreće se još jedan novčić, lijevo od prvog, od glave na pismo ili obrnuto. Navedimo primjer:

G	G	P	P	G	P	P	P	G	G	P	G	P
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Jedan od validnih poteza je okrenuti novčić na mjestu 12 od glave na pismo, a novčić na mjestu 3 sa pisma na glavu. Pobjeđuje igrač koji okrene posljednji novčić od glave na pismo.
Uputa. Igra je u osnovi ista kao Nim. Treba numerisati novčiće sa lijeva na desno oznakama $1, 2, ..., n$. Pozicije za okretanje su one pozicije na kojima su novčići okrenuti na glavu. Ako su te pozicije date sa $a, b, ..., z$, onda su one ekvivalentne pozicijama *Nima* sa gomilama veličina $a, b, ..., z$. U korenspondenciji sa potezima *Nima*, uklanjanje gomile veličine a odgovara okretanju novčića na mjestu a sa glave na pismo. Smanjenje gomile sa a na b, za b okrenut na pismo, odgovara okretanju novčića numerisanog oznakom a sa glave na pismo i okretanju novčića numerisanog oznakom b, sa pisma na glavu. Sučaj kada je b okrenut na glavu odgovara slučaju kada smanjujemo gomilu veličine a na veličinu b, a gomila veličine b je već postojala.

18. **Igra 21.** Igra počinje sa gomilom od 21 žeton. Igrači naizmjenično uzimaju od jedan do tri žetona. Pobjeđuje igrač koji uzme zadnji žeton.
Uputa. Slično kao u zadatku 2. Činiti veličinu gomile uvijek 0 po modulu 4. Uopšte, ako igrači mogu uzeti najviše $k \in \mathbb{N}$ žetona, treba pokušati učiniti veličine gomile $0(mod\,(k+1))$, uzimajući potreban broj žetona.

19. **Nimble.** Nimble se igra na ploči koja se sastoji od niza povezanih kvadrata označenih sa: $0, 1, 2, 3, \ldots$ Na polja je stavljen konačan broj novčića, pri čemu na jednom polju može stajati više od jednog novčića. Potez se sastoji od uzimanja jednog novčića i njegovog prebacivanja lijevo od nekog novčića, pri čemu je dozvoljeno da pređemo preko polja na kojem je novčić ili da ga postavimo na polje koje sadrži jedan ili više novčića. Igrači alterniraju pri vučenju poteza. Igra završava kada se svi novčići nađu u polju označenom sa 0. Pobjeđuje igrač koji je zadnji vukao potez.
Uputa. Novčići na polju k mogu se posmatrati kao gomile igre *Nim* veličine k.

20. **Bogus Nim.** Igra se sa konačnim brojem žetona, na traci koja je neogranična na desnoj strani. Traka je izdijeljena na polja i svaki žeton se nalazi na različitom polju. Dopustiv potez je pomicanje žetona ulijevo, prema konačnom kraju trake, ne prelazeći pri tome preko drugog polja popunjenog žetonom. Dakle, nema preskakanja jednog žetona preko drugog. Igra završava kada jedan od igrača nema mogućnost da odigra dopustiv potez jer su svi žetoni blokirani na kraju trake.
Uputa. Polazeći od krajnje desnog žetona izbrojimo broj mogućih polja za smještanje njega samog. Dobivene brojeve uzmemo za veličine Nim gomila.

4 Programi

Programe, u programskom jeziku *Pascal*, za igre F i Nim, napisao je, G-din Slavko Brdar, dok je bio student prve godine na Odsjeku za matematiku i informatiku PMF u Banjoj Luci.
Igra F (Fomina).

```
program igra_F;
type po=^element;
     element=record
              b: word;
              sl: po
             end;
var n:word;
    p: po;

                Procedure kom(var p: po); forward;

  Function kraj(p: po): boolean;        {provjerava da li je kraj igre}
  begin
    while not(p=nil) and (p^.b=1) do p:=p^.sl;
    if p=nil then kraj:=true else kraj:=false
  end;

  Procedure ispis(p: po);               {ispisuje sadrzaj liste}
  begin
    repeat
      write('  ',p^.b);
      p:=p^.sl
    until p=nil;
    writeln
  end;

  Procedure odbaci(var p: po);           {brise listu na kraju igre}
  var q: po;
```

```
begin
  repeat
    q:=p^.sl;
    dispose(p);
    p:=q
  until p=nil
end;

Function oblik(n: word): boolean;       {provjerava da li je argument}
begin                                  { oblika 2^k-1}
  n:=n+1;
  while (n mod 2=0) do n:=n div 2;
  if n=1 then oblik:=true else oblik:=false
end;

Procedure pro(var p :po);         {implementira igru protivnika}
var q,prvi: po;
begin
  writeln('VI STE NA POTEZU:':30);
  prvi:=p;
  repeat
    if p^.b>1 then
     begin
       new(q);
       repeat
       write('Unesi prvi dio gomile od ',p^.b,' kuglica: '); readln(q^.b)
       until (q^.b>0) and (q^.b<p^.b);
       p^.b:=p^.b-q^.b; q^.sl:=p^.sl; p^.sl:=q; p:=q^.sl
     end else p:=p^.sl
  until p=nil;
  p:=prvi; writeln('Trenutno stanje poslije vaseg poteza je: '); ispis(p);
  kom(p)
end;

Procedure kom(var p: po);    {implementira pobjednicku igru kompjutera}
var s: word; q,prvi: po;
    Function nadji(p: po): word;
    var a: word;
    begin
      a:=1;
      repeat
        while a<p^.b do a:=2*(a+1)-1;
        p:=p^.sl
      until p=nil;
      nadji:=(a+1) div 2 - 1
    end;
```

```
  begin
    writeln('JA SAM NA POTEZU.':30);
    prvi:=p;
    s:=nadji(p);
    repeat
      if p^.b>1 then
       begin
         new(q);
         if p^.b<=s then
          begin
            q^.b:=1;
            p^.b:=p^.b-1; q^.sl:=p^.sl; p^.sl:=q;
          end else
           begin
             q^.b:=p^.b-s; p^.b:=s;
             q^.sl:=p^.sl; p^.sl:=q
           end;
         p:=q^.sl;
       end else p:=p^.sl;
    until p=nil;
    p:=prvi;
    writeln('Trenutno stanje poslije mog poteza je: ');
    ispis(p);
    if not kraj(p) then pro(p) else
      begin
       writeln;
       write('K R A J - Izgubili ste...'); readln
      end
  end;

begin                                              {glavni program}
  write('Unesi broj na gomili: '); readln(n);
  new(p); p^.b:=n; p^.sl:=nil;
  if oblik(n) then pro(p) else kom(p)
end.
```

Igra *Nim.*

```
program IGRA_NIM;
const maxbroj=100;
type Tn2=record
           n: array [1..maxbroj] of 0..1;
           d: 0..maxbroj
         end;
     niz=record
           n: array [1..maxbroj] of word;
           d: 1..maxbroj
```

```
        end;
     nizb=array [1..maxbroj] of Tn2;
var i,maxb: word;
    n1: niz;
    n2: nizb;

          Procedure kom(var n1:niz; var n2:nizb; maxb: word); forward;

     Procedure ispis(n1:niz);
     var i:word;
     begin
       for i:=1 to n1.d do write('  ',n1.n[i]);
       writeln
     end;

     Procedure unesi(var n1:niz);
     var n,i: word;
     begin
       write('Unesite broj gomila: '); readln(n);
       for i:=1 to n do
        begin
          write('Unesite broj ',i,'. gomile: '); readln(n1.n[i])
        end;
       n1.d:=n
     end;

     Procedure pretvori(a:word; var b:Tn2);
     var j: word;
     begin
       for j:=1 to maxbroj do b.n[j]:=0;
       j:=1;
       while a>0 do
        begin
          b.n[j]:=a mod 2;
          a:=a div 2;
          j:=j+1
        end;
       b.d:=j-1
     end;

     Function xoruj(a:word; n2:nizb; brkol,maxb:word):boolean;
     var q:boolean;
         i:word;
     begin
       q:=true;
       for i:=1 to a do
```

```
    if n2[i].n[maxb+1-brkol]=1 then
     if q then q:=false else q:=true;
  xoruj:=q
end;

Function kraj(n1:niz):boolean;
var i:word;
begin
  i:=1;
  while (n1.n[i]=0) and (n1.d>=i) do i:=i+1;
  if i=n1.d+1 then kraj:=true else kraj:=false
end;

Procedure pro(var n1:niz; var n2:nizb; maxb:word);
var n,s:word;
begin
  writeln(' ':7,'VI STE NA POTEZU');
     write('Odaberite redni broj kolone (slijeva na desno): ');
     readln(n);
     write('Koji je broj kugica koji uzimate s ove gomile: ');
     readln(s);
  n1.n[n]:=n1.n[n]-s;
  pretvori(n1.n[n],n2[n]);
  writeln('Nakon vaseg poteza: ');
  ispis(n1);
  kom(n1,n2,maxb)
end;

Procedure kom(var n1:niz; var n2:nizb; maxb:word);
var h,i,j,k,m:word;
begin
  writeln(' ':7,'JA SAM NA POTEZU');
  i:=1; while xoruj(n1.d,n2,i,maxb) and (i<maxb) do i:=i+1;
  j:=1; while (n2[j].n[maxb+1-i]=0) and (j<n1.d) do j:=j+1;
  for m:=i to maxb do
   if not xoruj(n1.d,n2,m,maxb) then
     begin
       h:=1;
       for k:=1 to maxb-m do h:=h*2;
       if n2[j].n[maxb+1-m]=0 then n1.n[j]:=n1.n[j]+h
        else n1.n[j]:=n1.n[j]-h;
       pretvori(n1.n[j],n2[j])
     end;
  writeln('Nakon mog poteza: ');
  ispis(n1);
  if kraj(n1) then
```

```
        write('K R A J - Izgubili ste...') else
         pro(n1,n2,maxb)
     end;

begin
  unesi(n1); maxb:=0;
  for i:=1 to n1.d do
   begin
    pretvori(n1.n[i],n2[i]);
    if n2[i].d>maxb then maxb:=n2[i].d
   end;
  i:=1;
  while xoruj(n1.d,n2,i,maxb) and (i<=maxb) do i:=i+1;
  if i=maxb+1 then pro(n1,n2,maxb) else kom(n1,n2,maxb);
  readln
end.
```

5 Zaključak

Rad predstavlja osnove Nim-teorije, centralne oblasti u teoriji kombinatornih igara, sa posebnim osvrtom na igre na konačnim orijentisanim grafovima. Želimo da rad korisno posluži predavačima i specijalistima koji namjeravaju predavati ili dalje istraživati opisane kombinatorne igre, ili kombinatorne igre na cikličnim grafovima, koje dopuštaju i završnice tipa (pat, pat) i (remi, remi). Nadamo se da dio rada može biti koristan rukovodiocima priprema srednjoškolaca za takmičenja iz matematike i informatike.

Zahvalnica

Autori se zahvaljuju anonimnim recezentima čije primjedbe i sugestije su pomogle da popravimo znatan broj grešaka i da značajno poboljšamo rad.

Literatura

[1] J. Arsac, *Jeux et casse - tête a programmer,* Dunod, 1985

[2] J. Beck, *Combinatorial Games. Tic-Tac-Toe Theory,* Cambridge, 2008.

[3] C. Berge, *Théorie générale de jeux n personnes,* Paris, 1957.

[4] C. Berge, *Graphs and hypergraphs,* North-Holland, 1973.

[5] C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications,* Dunod, Paris, 1958.

[6] E.R. Berlekamp, J.H. Conway and R. K. Guy, *Winning Ways,* (two volumes), Academic Press, 1982. [5]

[7] C.L Bouton, *Nim, a game with complete mathematical theory*, Ann. of Math, **3**(2), 35 - 39.

[8] S. Eichhorn, J. Wilkinson, *Game Simulation and Analysis,* University of California, Irvine, 2014.

[9] T. S. Ferguson, *Game Theory,* 2012.

[10] A. S. Fraenkel, *Adventures in Complexity and Game Theory,* Amer Mathematical Society, 2014.

[11] A. S. Fraenkel, *Planar kernel and Grundy with* $d \leq 3$, $d_{out} \leq 2$, $d_{in} \leq 2$ *are* NP*-complete,* Discrete Appl. Math. 3, 257-262, 1981.

[12] M. Gardner, *The Colossal Book of Mathematics,* New York: Norton and Company, 2001.

[13] D. Gries, *The science of programming,* Springer, 1981

[14] Jing Li, Theory of Impartial Games, 2011

[15] I. Lalović, *Elementi teorije algoritama i struktura podataka,* PMF, Banja Luka, 2014.

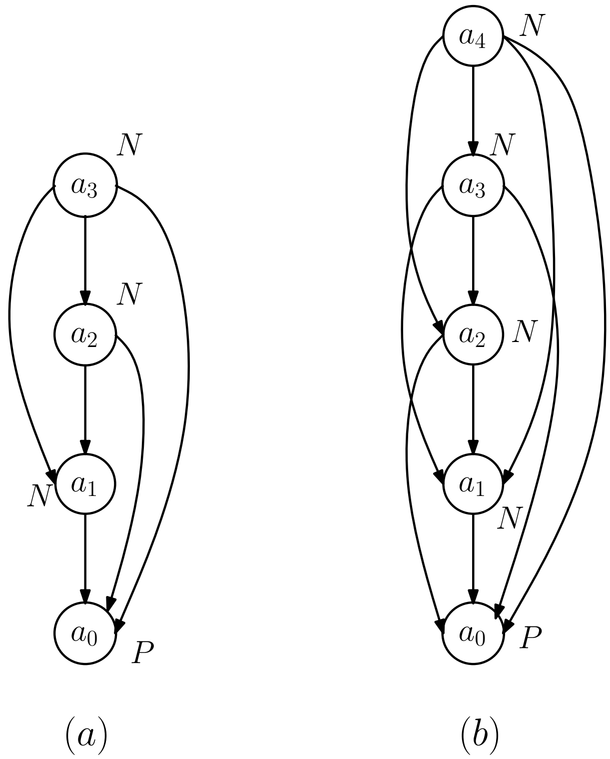
[16] N. Nisan et al. *Algorithmic Game Theory,* Cambridge UP, 2007.

[17] M. Oltean, *Evolving winning strategies for Nim-like games*, 2004

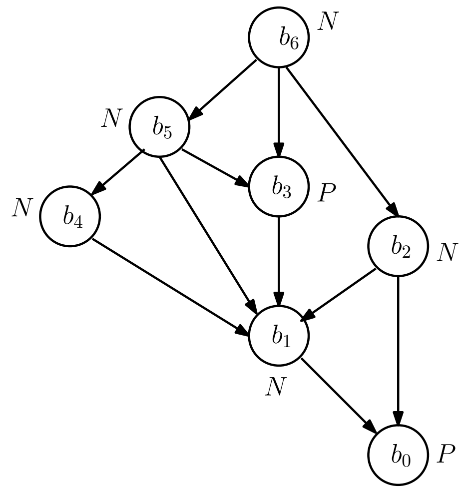
[18] M. J. Osborne, A. Rubinstein, *A course in game theory,* MIT, 1998.

Primljeno u redakciju 19.08.2014; Revidirana verzija 30.01.2015;
Dostupno online 03.02.2015.

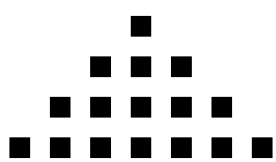
[5] Postoji novo izdanje u četiri knjige



Slika 1: Igra nim na grafu



Slika 2: Još jedan primjer igre na grafu



Slika 3: Raspored karata na stolu