MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XXI (2)(2015), 83-95 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm doiSrpska: 10.7251/MK150283M

Osnovna teorema o propelerima

Jovan Mikić [1]

Sažetak. Asimetrična teorema o propelerima je jedna od najlepših teorema iz geometrije u ravni. Asimetrična teorema o propelerima sadrži niz teorema. Prva teorema o propelerima je takođe poznata kao osnovna teorema o propelerima. U ovom istraživanju, dajemo tri različita dokaza osnovne teoreme o propelerima. Prvi dokaz zasniva se na kompleksnim brojevima. Drugi dokaz je preko elementarne geometrije.Treći dokaz je takođe geometrijski i, uz nešto napora, može se iskoristiti za dokazivanje svih generalizacija osnovne teoreme o propelerima. Postoji mogućnost da su neki od ovih dokaza (po mom znanju) originalni.

Ključne reči: Asimetrična teorema o propelerima, osnovna teorema o propelerima, kompleksni brojevi, jednakostranični trougao, elementarna geometrija

Abstract. Asymmetric propeller theorem is one of the most beautiful theorem in plane geometry. Asymmetric propeller theorem contains a sequence of theorems. First propeller theorem is also known as a basic propeller theorem. In this research, we give three diferent proofs of a basic propeller theorem. First proof relies on complex numbers. Second proof is via elementary geometry. Third proof is also of geometric nature and, with some effort, it can be used for proving all generalizations of basic propeller theorem. There is a possibility that some of this proofs (up to my knowledge) are original.

Keywords and pgrases: Asymmetric propeller theorem, basic propeller theorem, complex numbers, equilateral triangle, elementary geometry

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

1. Uvod

Asimetrična teorema o propelerima poznata je i kao Bankoffova teorema, po Leonu Bankoffu, američkom matematičaru i zubaru. O istoriji asimetrične teoreme o propelerima možete pogledati u [1] i [4] . U ovom istraživanju, bavimo se samo sa

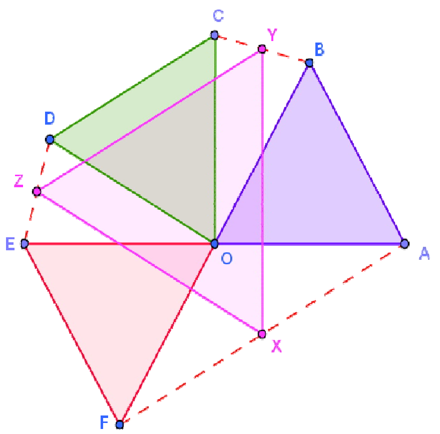
[1] Ul. Savska br.5., 74480 Modriča, Bosna i Hercegovina, e-mail: jnmikic@gmail.com

prvom ili osnovnom teoremom o propelerima. O generalizacijama osnovne teoreme o propelerima možete pogledati u [2] i [3] .

2. Osnovna teorema o propelerima

Neka su data tri podudarna jednakostranična trougla ΔOAB , ΔOCD i ΔOEF , koji imaju zajedničko teme O. Neka su tačke, X ,Y i Z središta stranica AF, BC i DE respektivno. Onda je, trougao XYZ jednakostranični trougao.

.



Slika 1

2.1. Prvi dokaz osnovne teoreme o propelerima
(*preko kompleksnih brojeva*)

Neka su oznake kao na slici 2. Trouglove smo smestili u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, tako da se tačka O poklapa sa koordinatnim početkom, te tačka A nalazi na x-osi. Neka su Z_X, Z_Y, Z_Z kompleksni brojevi koji su afiksi tačaka X , Y i Z respektivno. Želimo da pokažemo

$$|Z_X - Z_Y| = |Z_Y - Z_Z| = |Z_X - Z_Z|;$$

odnosno

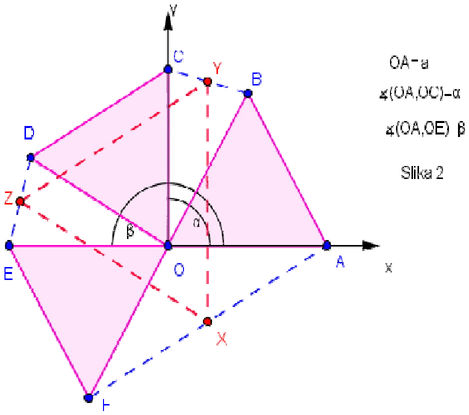
$$|Z_X - Z_Y|^2 = |Z_Y - Z_Z|^2 = |Z_X - Z_Z|^2.$$

U tom cilju koristićemo dobro poznate formule iz kompleksne analize,

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + \mathrm{Re}(2z\overline{w});$$

kao i

$$|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - \mathrm{Re}(2z\overline{w}).$$



Slika 2

Na početku imamo:

$$Z_X = \frac{Z_A + Z_F}{2},\ Z_Y = \frac{Z_B + Z_C}{2} \ \text{i}\ Z_Z = \frac{Z_D + Z_E}{2}.$$

Na osnovu toga, sledi :

$$Z_X = \frac{a}{2}(e^{io} + e^{i(\beta+\frac{\pi}{3})}),\ Z_Y = \frac{a}{2}(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\alpha}) \ \text{i}\ Z_z = \frac{a}{2}(e^{i(\alpha+\frac{\pi}{3})} + e^{i\beta}).$$

Prvo,

$$|Z_X|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{Re}\left[1 + e^{i(\beta+\frac{\pi}{3})}\right],\quad |Z_Y|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{Re}\left[1 + e^{i(\frac{\pi}{3}-\alpha)}\right]$$

i

$$|Z_Z|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{Re}\left[1 + e^{i(\alpha+\frac{\pi}{3}-\beta)}\right]$$

Zatim,

$$Z_X\overline{Z_Y} = \frac{a^2}{4}\left[e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}\right]$$

$$Z_Y\overline{Z_Z} = \frac{a^2}{4}\left[e^{-i\alpha} + e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)} + e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i(\alpha-\beta)}\right]$$

$$Z_X\overline{Z_Z} = \frac{a^2}{4}\left[e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{3})} + e^{-i\beta} + e^{i(\alpha-\beta)} + e^{i\frac{\pi}{3}}\right]$$

Koristimo formulu: $\left|Z_X - Z_Y\right|^2 = \left|Z_X\right|^2 + \left|Z_Y\right|^2 - \mathrm{Re}(2Z_X\overline{Z_Y})$. Posle sređivanja, dobijamo:

$$\left|Z_X - Z_Y\right|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{Re}(S_1),$$

gde je

$$S_1 = 2 + e^{i(\beta+\frac{\pi}{3})} + e^{i(\frac{\pi}{3}-\alpha)} - e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\alpha} - e^{i\beta} - e^{i(\beta+\frac{\pi}{3}-\alpha)}.$$

Slično,

$$\left|Z_Y - Z_Z\right|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{Re}(S_2),$$

gde je

$$S_2 = 2 + e^{i(\frac{\pi}{3}-\alpha)} + e^{i(\alpha+\frac{\pi}{3}-\beta)} - e^{-i\alpha} - e^{i(\frac{\pi}{3}-\beta)} - e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i(\alpha-\beta)}.$$

Kao i

$$\left|Z_X - Z_Z\right|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{Re}(S_3),$$

gde je

$$S_3 = 2 + e^{i(\beta+\frac{\pi}{3})} + e^{i(\alpha+\frac{\pi}{3}-\beta)} - e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{3})} - e^{-i\beta} - e^{i(\beta-\alpha)} - e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Da bi pokazali $\left|Z_X - Z_Y\right|^2 = \left|Z_Y - Z_Z\right|^2$ potrebno i dovoljno je da pokažemo $\mathrm{Re}(S_1) = \mathrm{Re}(S_2)$ ili što je isto $\mathrm{Re}(S_2 - S_1) = 0$.

$$\mathrm{Re}(S_2 - S_1) =$$

$$\mathrm{Re}\Big(\left[2 + e^{i(\frac{\pi}{3}-\alpha)} + e^{i(\alpha+\frac{\pi}{3}-\beta)} - e^{-i\alpha} - e^{i(\frac{\pi}{3}-\beta)} - e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i(\alpha-\beta)}\right] -$$

$$\left[2 + e^{i(\beta+\frac{\pi}{3})} + e^{i(\frac{\pi}{3}-\alpha)} - e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\alpha} - e^{i\beta} - e^{i(\beta+\frac{\pi}{3}-\alpha)}\right]\Big)$$

$$\mathrm{Re}(S_2 - S_1) =$$
$$\mathrm{Re}\left(e^{i(\alpha+\frac{\pi}{3}-\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)}\right) - \mathrm{Re}\left(e^{i(\frac{\pi}{3}-\beta)}\right) - \mathrm{Re}\left(e^{i(\beta+\frac{\pi}{3})}\right) + \mathrm{Re}\left(e^{i\beta}\right) + \mathrm{Re}\left(e^{i(\beta+\frac{\pi}{3}-\alpha)}\right).$$

Uočavamo da ,

$$\mathrm{Re}\left(e^{i(\alpha+\frac{\pi}{3}-\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)}\right) =$$
$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{3} - \beta) - \cos(\alpha - \beta) =$$
$$\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\alpha-\beta) - \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta) =$$
$$-\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\alpha-\beta) - \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\alpha-\beta) =$$
$$-\cos(\frac{\pi}{3} - (\alpha-\beta)) =$$
$$-\cos(\beta + \frac{\pi}{3} - \alpha) =$$
$$-\mathrm{Re}(e^{i(\beta+\frac{\pi}{3}-\alpha)})$$

Stoga,

$$\mathrm{Re}\left(e^{i(\alpha+\frac{\pi}{3}-\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)}\right) = -\mathrm{Re}\left(e^{i(\beta+\frac{\pi}{3}-\alpha)}\right).$$

Uvrštavanjem, dobijamo:

$$\mathrm{Re}(S_2 - S_1) = -\mathrm{Re}\left(e^{i(\beta+\frac{\pi}{3}-\alpha)}\right) - \mathrm{Re}\left(e^{i(\frac{\pi}{3}-\beta)}\right) - \mathrm{Re}\left(e^{i(\beta+\frac{\pi}{3})}\right) + \mathrm{Re}\left(e^{i\beta}\right) + \mathrm{Re}\left(e^{i(\beta+\frac{\pi}{3}-\alpha)}\right),$$

pa

$$\mathrm{Re}(S_2 - S_1) = -\mathrm{Re}\left(e^{i(\frac{\pi}{3}-\beta)}\right) - \mathrm{Re}\left(e^{i(\beta+\frac{\pi}{3})}\right) + \mathrm{Re}\left(e^{i\beta}\right).$$

Dalje,

$$\mathrm{Re}(S_2 - S_1) = -\cos(\frac{\pi}{3} - \beta) - \cos(\frac{\pi}{3} + \beta) + \cos(\beta)$$

ili

$$\mathrm{Re}(S_2 - S_1) =$$
$$-\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\beta) - \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\beta) - \cos(\frac{\pi}{3})\cos(\beta) + \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\beta) + \cos(\beta)$$

$$\mathrm{Re}(S_2 - S_1) = -2\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\beta) + \cos(\beta)$$

$$\mathrm{Re}(S_2 - S_1) = -\cos(\beta) + \cos(\beta) = 0.$$

Konačno, dobili smo $\mathrm{Re}(S_2 - S_1) = 0$, odnosno $\mathrm{Re}(S_1) = \mathrm{Re}(S_2)$.

Obzirom da je $\left|Z_X - Z_Y\right|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{Re}(S_1) = \frac{a^2}{2}\mathrm{Re}(S_2) = \left|Z_Y - Z_Z\right|^2$, proizlazi $\left|Z_X - Z_Y\right|^2 = \left|Z_Y - Z_Z\right|^2$ ili, što je ekvivalentno, $\left|Z_X - Z_Y\right| = \left|Z_Y - Z_Z\right|$.

Dokažimo još $\left|Z_Y - Z_Z\right|^2 = \left|Z_X - Z_Z\right|^2$. Da bismo to uradili potrebno i dovoljno je pokazati da $\mathrm{Re}(S_2) = \mathrm{Re}(S_3)$ ili $\mathrm{Re}(S_3 - S_2) = 0$.

$$\mathrm{Re}(S_3 - S_2) =$$
$$\mathrm{Re}\left(\left[2 + e^{i(\beta+\frac{\pi}{3})} + e^{i(\alpha+\frac{\pi}{3}-\beta)} - e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{3})} - e^{-i\beta} - e^{i(\beta-\alpha)} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right] - \right.$$
$$\left.\left[2 + e^{i(\frac{\pi}{3}-\alpha)} + e^{i(\alpha+\frac{\pi}{3}-\beta)} - e^{-i\alpha} - e^{i(\frac{\pi}{3}-\beta)} - e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i(\alpha-\beta)}\right]\right)$$

$$\mathrm{Re}(S_3 - S_2) =$$
$$\mathrm{Re}(e^{i(\beta+\frac{\pi}{3})} - e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{3})} - e^{-i\beta} - e^{i(\beta-\alpha)} - e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i(\frac{\pi}{3}-\alpha)} + e^{-i\alpha} + e^{i(\frac{\pi}{3}-\beta)} + e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i(\alpha-\beta)})$$

$$\mathrm{Re}(S_3 - S_2) =$$
$$\left[\mathrm{Re}(e^{i(\beta+\frac{\pi}{3})}) + \mathrm{Re}(e^{i(\frac{\pi}{3}-\beta)}) - \mathrm{Re}(e^{-i\beta})\right] + \left[\mathrm{Re}(e^{-i\alpha}) - \mathrm{Re}(e^{-i\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}) - \mathrm{Re}(e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)})\right] +$$
$$\left[\mathrm{Re}(e^{i(\alpha-\beta)}) - \mathrm{Re}(e^{i(\beta-\alpha)})\right] + \left[\mathrm{Re}(e^{-i\frac{\pi}{3}}) - \mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{3}})\right]$$

$$\mathrm{Re}(S_3 - S_2) =$$

$$\left[\cos(\beta + \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{3} - \beta) - \cos(\beta)\right] + \left[\cos(-\alpha) - \cos(-(\alpha + \frac{\pi}{3})) - \cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)\right] +$$

$$\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\beta - \alpha)\right] + \left[\cos(-\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{3})\right]$$

$$\mathrm{Re}(S_3 - S_2) =$$

$$[\cos(\beta) - \cos(\beta)] + [\cos(\alpha) - \cos(\alpha)] +$$

$$[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta)] + \left[\cos(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{3})\right]$$

Konačno, pokazali smo $\mathrm{Re}(S_3 - S_2) = 0$, odnosno $\mathrm{Re}(S_3) = \mathrm{Re}(S_2)$.

S obzirom na

$$|Z_Y - Z_Z|^2 = \frac{a^2}{2}\mathrm{Re}(S_2) = \frac{a^2}{2}\mathrm{Re}(S_3) = |Z_X - Z_Z|^2,$$

proizlazi

$$|Z_Y - Z_Z|^2 = |Z_X - Z_Z|^2$$

ili, što je ekvivalentno, da je

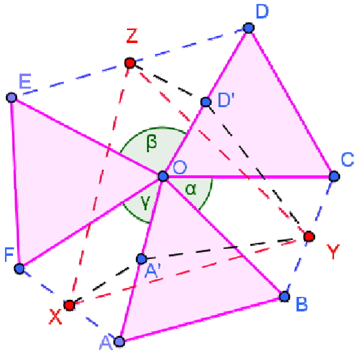
$$|Z_Y - Z_Z| = |Z_X - Z_Z|.$$

Pokazali smo $|Z_X - Z_Y| = |Z_Y - Z_Z|$, kao i $|Z_Y - Z_Z| = |Z_X - Z_Z|$. Sledi, trougao XYZ je jednakostraničan. Q.E.D.

2.2. Drugi dokaz osnovne teoreme o propelerima

(*preko elementarne geometrije*)

Neka je ugao $\angle BOC = \alpha$, ugao $\angle AOF = \gamma$ i ugao $\angle DOE = \beta$. Neka je tačka A' središte duži OA, a tačka D' središte duži od duži OD; kao na slici 3.



Slika 3

Da bismo dokazali da je trougao XYZ jednakostraničan, dokazaćemo da je YX=YZ , kao i da je $\angle XYZ = 60°$.

Prvo ćemo pokazati da je trougao YA'D' jednakostraničan.

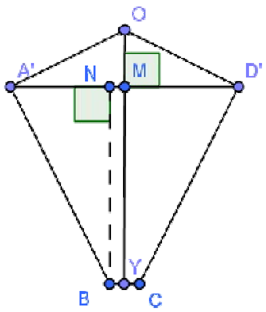
Četverougao ABCD je tetivan i AB=CD. Iz elementarne geometrije, poznato je da je onda ABCD jednakokraki trapez. Stoga, BC || AD.

S druge strane, duž A'D' je srednja linija trougla OAD, pa A'D'|| AD.

Sledi, A'D' || BC. Četverougao BCD'A' je trapez i to jednakokraki , jer je BA'=CD'(visine podudarnih jednakostraničnih trouglova)

Iz $\Delta BYA' \cong \Delta CYD'$ (BA'=CD',BY=CY i $\angle YBA' = \angle YCD'$) sledi YA'=YD'. Još treba pokazati da YA'=A'D'.

Uglovi $\angle BA'D'$ i $\angle YOA'$ su uglovi sa normalnim kracima. Kako su oba oštri, sledi
$\angle BA'D' = \angle YOA'$. Uočimo sliku 4.



Slika 4

Imamo $\Delta MA'O \sim \Delta A'BN$ .Sledi $\frac{A'M}{BN} = \frac{OA'}{BA'}$, odnosno $A'M = \frac{OA'}{BA'} \cdot BN$. Dalje,

$A'M = \frac{\frac{OA}{2}}{\frac{OA\sqrt{3}}{2}} \cdot BN \Rightarrow A'M = \frac{BN}{\sqrt{3}}$. Ili $BN = A'M\sqrt{3}$. Kako je $A'D' = 2A'M$,

dobijamo $BN = A'D'\frac{\sqrt{3}}{2}$. Uočimo li pravougli trougao YMA',

$YM = BN = A'D'\frac{\sqrt{3}}{2}$. Primenom Pitagorine teoreme u trouglu YMA', sledi

$YA'^2 = YM^2 + MA'^2$. Dalje, $YA'^2 = (A'D'\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{A'D'}{2})^2$. Dobijamo, $YA'^2 = A'D'^2$; odnosno ono što smo i trebali, $YA' = A'D'$. Konačno, $\Delta YA'D'$ je jednakostraničan**.**

Znamo $\angle YA'D' = 60°$ i YA'=YD'. Dokažimo sad da je $\Delta A'YX \cong \Delta D'YZ$ **.**

Imamo, $XA' = ZD' = \frac{AB}{2}$ (kao srednje linije trouglova AOF i DOE , respektivno). Zatim, znamo da YA'=YD'. Dokažimo da $\angle YA'X = \angle YD'Z$. Imamo redom:

$$\angle XA'A = \gamma \text{ i } \angle OD'Z = 180° - \beta .$$

$$\angle AA'Y = \pi - \angle OA'Y \text{ i } \angle OA'Y = \frac{\pi}{3} + \angle OA'D' = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}), \text{ pa}$$

$\angle OA'Y = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Prema tome, $\angle AA'Y = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$. Koristili smo činjenicu da je $\angle YA'D' = \frac{\pi}{3}$. Onda

$$\angle OD'Y = \frac{\pi}{3} + \angle OD'A' = \frac{\pi}{3} + (\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \;;$$

prema tome $\angle OD'Y = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

U stvari, $\angle OA'Y = \angle OD'Y$; to možemo videti i iz deltoida $OA'D'Y$!

Dalje, $\angle YA'X = \angle YA'A + \angle AA'X = 90° + \frac{\alpha}{2} + \gamma$. Slično,

$$\angle ZD'Y = \angle ZD'O + \angle OD'Y = (180° - \beta) + 90° - \frac{\alpha}{2} .$$

Znajući da je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, sledi $\angle ZD'Y = \frac{\alpha}{2} + \gamma + 90°$. Napokon, $\angle YA'X = \angle YD'Z$! Sada lako sledi, $\Delta XYA' \cong \Delta YZD'$ (XA'=ZD', YA'=YD' i

$\angle YA'X = \angle YZD'$). Iz te podudarnosti proizlazi: YX=YZ , te $\angle XYA' = \angle ZYD'$.

Na kraju,

$$\angle XYZ = \angle XYA' + \angle A'YZ = \angle A'YZ + \angle XYA' = \angle A'YZ + \angle ZYD' = \angle A'YD' .$$

Stoga, $\angle XYZ = \angle A'YD'$. Pokazali smo ranije da je $\angle A'YD' = 60°$. Prema tome,

znamo $\angle XYZ = 60°$ i YX=YZ. Zaključujemo, trougao ΔXYZ je

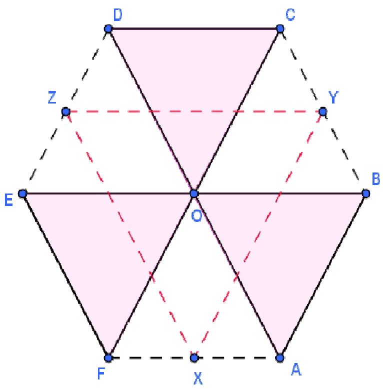
jednakostraničan. Q.E.D.

2.3. Treći dokaz osnovne teoreme o propelerima
(*geometrijski dokaz*)

Dokaz se sastoji iz tri dela**.**

Prvi deo: Naći ćemo odgovarajući položaj trouglova OAB,OCD i OEF, tako da najlakše pokažemo da je trougao XYZ jednakostraničan. Takav položaj trouglova zvaćemo osnovnim položajem.

Za osnovni položaj trouglova OAB, OCD i OEF izabraćemo onaj položaj gde je $\angle BOC = \angle DOE = \angle FOA = 60°$, kao na slici 5.



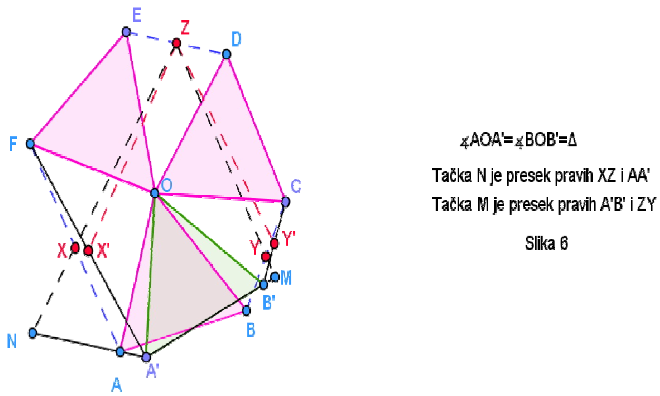
Slika 5

Specijalno, tada je mnogougao ABCDEF pravilni šestougao.

Četverougao BCDE je trapez i duž ZY je srednja linija tog trapeza. Kako je BE=2a i CD=a, sledi $ZY = \frac{BE + CD}{2}$, to jest $ZY = \frac{3a}{2}$.

Slično, XY i XZ su srednje linije trapeza FABC i AFED respektivno.Opet je FC=2a i AB=a; odnosno AD=2a i EF=a. Sledi, $XY = \frac{FC + AB}{2} = \frac{3a}{2}$; odnosno $XZ = \frac{AD + EF}{2} = \frac{3a}{2}$. Prema tome, pokazali smo da je XY=XZ=YZ ; trougao XYZ je jednakostraničan.

Drugi deo: Neka su dati podudarni jednakostranični trouglovi OAB, OCD i OEF ; te neka su tačke X, Y i Z središta duži AF, BC i DE respektivno. Pretpostavićemo da je trougao XYZ jednakostraničan.(Na osnovu prvog dela dokaza, tako je , ako su trouglovi OAB, OCD i OEF u osnovnom položaju). Zarotirajmo sad jedan od tri početna trougla, dok druga dva ostaju fiksna. Recimo, zarotirajmo trougao OAB za ugao Δ, kao na slici 6. Trouglovi OCD i OEF ostaju fiksni, tačke A i B „pomeraju „ se u tačke A' i B' respektivno. Neka je tačka X' središte duži A'F i Y' središte duži B'C. Dokažimo da je trougao X'Y'Z jednakostraničan takođe. Drugim rečima, pokazujemo da osnovna teorema o propelerima važi za trouglove OA'B',OCD i OEF, ako važi za trouglove OAB, OCD i OEF.



Slika 6

Imamo, $\Delta OAA' \cong \Delta OBB'$ (OA=OB, OA'=OB', $\angle AOA' = \angle BOB' = \Delta$). Iz te podudarnosti sledi $AA' = BB'$.

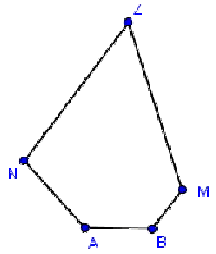
Duž XX' je srednja linija trougla $\Delta AA'F$. Odatle $XX' = \dfrac{AA'}{2}$ i $XX' \parallel AA'$.

Duž YY' je srednja linija trougla $\Delta BB'C$. Odatle $YY' = \dfrac{BB'}{2}$ i $YY' \parallel BB'$.

Iz AA'= BB' sledi XX'=YY'.

Dokažimo $\Delta ZXX' \cong \Delta ZYY'$! Znamo da ZX=ZY (pretpostavili smo da je ΔXYZ jednakostraničan). Upravo smo pokazali da je XX'=YY'.

Pokažimo još da je $\angle ZXX' = \angle ZYY'$. Uočimo petougao ZNABM kao na slici 7.



Slika 7

Imamo $\angle NZM = \angle XZY = 60°$. Zatim, $\angle ZNA = ZXX'$ (uglovi sa paralelnim kracima i oba oštri.) Dalje, $\angle ZMB = 180° - \angle ZYY'$.

$\angle NAB = 180° - \angle A'AB = 180° - \left[\left(90° - \frac{\Delta}{2}\right) - 60°\right]$, pa je $\angle NAB = 150° + \frac{\Delta}{2}$.

Slično,

$$\angle ABM = \angle ABO + \angle OBM = 60° + (90° - \frac{\Delta}{2});$$

pa je $\angle ABM = 150° - \frac{\Delta}{2}$.

Zbir unutrašnjih uglova u konveksnom petouglu je $540°$. Prema tome :

$$\angle NZM + \angle ZNA + \angle NAB + \angle ABM + \angle ZMB = 540°.$$

Posle uvrštavanja, sledi

$$60° + \angle ZXX' + (150° + \frac{\Delta}{2}) + (150° - \frac{\Delta}{2}) + 180° - \angle ZYY' = 540°.$$

Odnosno,

$$540° + \angle ZXX' - \angle ZYY' = 540°.$$

Na kraju, dobijamo**,** $\angle ZXX' = \angle ZYY'$**.**

Prema tome,

$\Delta ZXX' \cong \Delta ZYY'$ (ZX=ZY, XX'=YY', $\angle ZXX' = \angle ZYY'$; stav SUS).

Iz zadnje podudarnosti, sledi $ZX' = ZY'$, kao i $\angle XZX' = \angle YZY'$. No, onda

$$\angle X'ZY' = \angle X'ZY + \angle YZY' = \angle X'ZY + \angle XZX' = \angle XZY = 60^\circ.$$

Proizlazi $\angle X'ZY' = 60^\circ$.

S obzirom da je $ZX' = ZY'$, te $\angle X'ZY' = 60^\circ$, zaključujemo da je trougao $\Delta X'ZY'$ jednakostraničan. To smo i trebali dokazati. S ovim smo završili drugi deo dokaza.

Treći deo: Neka su dati podudarni jednakostranični trouglovi OAB, OCD i OEF u proizvoljnom položaju.Neka su tačke X,Y i Z središta stranica AF, BC i DE respektivno. Dokažimo da je trougao XYZ jednakostraničan!

Polazimo od njima podudarnih jednakostraničnih trouglova OA'B', OC'D' i OE'F' koji su u osnovnom položaju. Neka su tačke X',Y'i Z' središta stranica A'F', B'C' i D'E' respektivno.

Na osnovu prvog dela dokaza, znamo da je trougao X'Y'Z' jednakostraničan.

Rotacijom Δ_1 preslikamo trougao OA'B' u trougao OAB. Posmatramo trouglove OAB,OC'D' i OE'F'. Neka su tačke X_1, Y_1 i Z' središta stranica AF', BC' i D'E'. Na osnovu drugog dela dokaza, trougao X_1Y_1Z' je jednakostraničan.

Rotacijom Δ_2 preslikamo trougao OC'D' u trougao OCD. Posmatramo trouglove OAB,OCD i OE'F'. Neka su tačke X_2, Y i Z_2 središta stranica AF, BC i DE'. Na osnovu drugog dela dokaza, trougao X_2YZ_2 je jednakostraničan.

Na kraju, rotacijom Δ_3 preslikamo trougao OE'F' u trougao OEF. Posmatramo trouglove OAB,OCD i OEF. Tačke X, Y i Z su središta stranica AF, BC i DE. Na osnovu drugog dela dokaza, trougao XYZ je jednakostraničan.

Q.E.D.

Literatura:

[1] Gardner, M.: *The Asymmetric Propeller*. College Math. J. **30** (1)(1999), 18-22.

[2] J. H. McKay: *The William Lowell Putnam Mathematical Competition,* The American Mathematical Monthly, Vol. 75, No. 7 (Aug. - Sep., 1968), pp. 732-739.

[3] Bankoff, L.; Erdös, P.; Klamkin, M.: *The asymmetric propeller.* Math. Mag. **46** (1973), 270-272

[4] G. L. Alexanderson, *A conversation with Leon Bankoff*, College Mathematics Journal, 23:2 (1992), 98-117.

[5] Gardner, M., *A Gardner's workout, training the mind and entertaining the spirit,* A K Peters, Ltd. Natick, 2001.

[6] Michael Hendle and Brain Hopkins (eds.): *Martin Gardner in the twenty-first century*, MAA,