MAT-KOL (Banja Luka)
XXI (2)(2015), 81--82
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)
doiSrpska: 10.7251/MK150281M

JOŠ JEDNO UOPŠTENJE NESBITTOVE NEJEDNAKOSTI

(Yet a generalization of Nesbitt's inequality)

Dragoljub Milošević

Sažetak. U ovom radu dokazujemo sljedeće uopštenje Nesbittove nejednakosti

$$\frac{a}{ka+b+c}+\frac{b}{a+kb+c}+\frac{c}{a+b+kc}\geq\frac{3}{k+2}\,;\ (a,b,c>0\ i\ 0\leq k<1).$$

Ključne riječi: pozitivni brojevi, Nesbittova nejednakost, uopštenje, aritmetičko-geometrijska nejednakost.

Abstract. In this paper we shown the following generalization of Nesbitt's inequality

$$\frac{a}{ka+b+c}+\frac{b}{a+kb+c}+\frac{c}{a+b+kc}\geq\frac{3}{k+2}\,;\ (a,b,c>0\ i\ 0\leq k<1).$$

Key words: positive numbers, Nesbitt's inequality, generalization, arithmetic-geometric inequality.

AMS Subject Classification (2010): **97F50**
ZDM Subject Classification (2010): **F50**, **N50**

U [1] i [2] dato je nekoliko uopštenja sljedeće nejednakosti poznate u literaturi kao **Nesbitt**ova nejednakost:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\,. \tag{1}$$

Ovdje dajemo dokaz još jednog uopštenja te nejednakosti:

$$\frac{a}{ka+b+c}+\frac{b}{a+kb+c}+\frac{c}{a+b+kc}\geq\frac{3}{k+2}\,;\ (a,b,c>0\ i\ 0\leq k<1). \tag{2}$$

Dokaz. Ako stavimo

$$x=ka+b+c,\ y=a+kb+c\ \ i\ \ z=a+b+kc,$$

imamo

$$y + z - (k+1)x = a + kb + c + a + b + kc - k(k+1)a - (k+1)b - (k+1)c$$

$$= 2a + (k+1)b + (k+1)c - k(k+1)a - (k+1)b - (k+1)c$$

$$= (2 - k^2 - k)a,$$

pa je

$$a = \frac{(k+1)x-y-z}{k^2+k-2} = \frac{(k+1)x-y-z}{(k+2)(k-1)}.$$

Na sličan način dobijamo

$$b = \frac{(k+1)y-z-x}{(k+2)(k-1)} \quad i \quad c = \frac{(k+1)z-x-y}{(k+2)(k-1)}.$$

Ako lijevu stranu u (2) obilježimo sa L, imamo

$$\mathrm{L} = \frac{1}{(k+2)(k-1)}\left(\frac{(k+1)x-y-z}{x} + \frac{(k+1)y-z-x}{y} + \frac{(k+1)z-x-y}{z}\right)$$

$$= \frac{1}{(k+2)(1-k)}\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) - 3(k+1)\right).$$

Odavde, zbog

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2 \ \text{ i } \ \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2,$$

slijedi

$$\mathrm{L} \geq \frac{1}{(k+2)(1-k)}(2+2+2-3k-3)$$

$$= \frac{3}{k+2}, \text{ za } 0 \leq k < 1.$$

Ovim je dokaz nejednakosti (2) okončan.

Napomena. Specijalno, za $k = 0$ dobijamo nejednakost (1).

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić, *Jedno poboljšanje Nesbittove nejednakosti i neke njene generalizacije, MAT-KOL (*Banja Luka), XVII (1) (2011), 5-11.
[2] D. Milošević, *O jednoj algebarskoj nejednakosti,* MAT-KOL (Banja Luka), XVII (2)(2011), 5-7.