**MAT-KOL (Banja Luka)**
**XXI (2)(2015),** 73--79
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

**ISSN 0354-6969 (o)**
**ISSN 1986-5828 (o)**
doiSrpska: 10.7251/MK150273M

# O JEDNOJ TEOREMI ZA PRAVILAN PETOUGAO

# (About one theorem for the regular pentagon)

**Dragoljub Milošević[1] i Aleksandar Sredojević[2]**

**Sažetak.** Dajemo još dvanaest dokaza teoreme o pravilnom petouglu iz [1].

**Ključne reči:** pravilan petougao, stranica i dijagonala pravilnog petougla, jednakokraki trougao, slični trouglovi, simetrala unutrašnjeg ugla, Pitagorina, Talesova i Stjuartova teorema, sinusna i kosinusna teorema, Molvajdove formule.

**Abstract.** We give twelve new proofs of a theorem for the regular pentagon in [1].

**Key words:** regular pentagon, side and diagonal of regular pentagon, isosceles triangle, similar triangle, angle – bisector, Pythagorean, Thales and Stewart's theorem, sine and cosine law,Mollweid's formulas.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

U [1] je dato jedanaest dokaza sljedećeg teorema:

**Teorem.** *U pravilnom petouglu stranice* $a$ *i dijagonale* $d$ *vrijedi jednakost*

$$\frac{d}{a}-\frac{a}{d}=1. \qquad (*)$$

Ovdje dajemo još dvanaest raznih dokaza ovog teorema.

**Dokaz 1.** Petougao $ABCDE$ je pravilan (slika 1). Njegov unutrašnji ugao $\angle ABC$ je jednak $108^\circ$, pa je u jednakokrakom trouglu $ABC\left(AB=BC=a\right)$:

[1] 17.NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija
[2] Nikole Milićevića Lunjevice 7/2/7, 32300 Gornji Milanovac, Srbija

$\angle BAC = \angle ABC = (180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$. S obzirom da je $a = 2R\sin 36^\circ$ i $d = 2R\sin 108^\circ$ ($R$ - poluprečnik kružnice opisane oko datog petougla, a samim tim i oko $\Delta ABC$), jednakost $(*)$ je ekvivalentna sa $\dfrac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} - \dfrac{\sin 36^\circ}{\sin 108^\circ} = 1$, tj. sa

$$\sin^2 108^\circ - \sin^2 36^\circ = \sin 36^\circ \cdot \sin 108^\circ, \tag{1}$$

Korištenjem trigonometrijske identičnosti

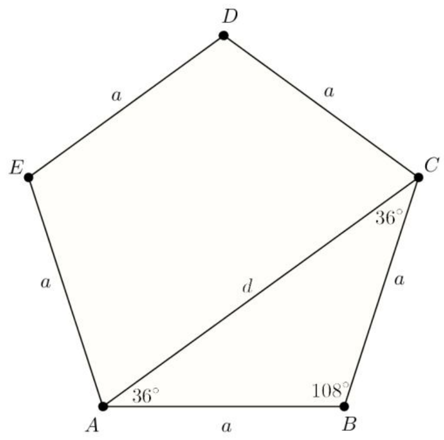
$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\cdot \sin(x-y), \quad (x, y \in R)$$

dobijamo

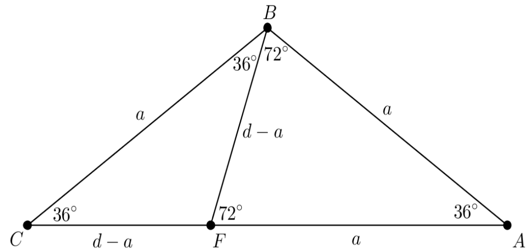
$$\begin{aligned}\sin^2 108^\circ - \sin^2 36^\circ &= \sin(108^\circ + 36^\circ)\cdot \sin(108^\circ - 36^\circ)\\ &= \sin 144^\circ \sin 72^\circ.\end{aligned}$$

Kako je $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, iz posljednje jednakosti slijedi

$$\begin{aligned}\sin^2 108^\circ - \sin^2 36^\circ &= \sin(108^\circ - 36^\circ)\cdot \sin(108^\circ - 108^\circ)\\ &= \sin 36^\circ \sin 108^\circ, \text{ tj. } (1).\end{aligned}$$




Slika 1




Slika 2

**Dokaz 2.** S obzirom das u stranica $a$ i dijagonala $d$ pravilnog petougla $ABCDE$ elementi jednakokrakog trougla $ABC$ sa uglom pri vrhu od $108^\circ$, to nadalje možemo razmotriti taj trougao (slika 2). Na stranici $CA$ odredimo tačku $F$ tako da je $AF = a$, pa je $CF = d - a$. Trougao $ABF$ je jednakokraki $(AF = AB = a)$, što znači da je $\angle AFC = \angle ACF = (180^\circ - 36^\circ) : 2 = 72^\circ$. Također, i $\Delta BCF$ je jednakokraki, zbog $\angle BCF = \angle FBC = 36^\circ$. Zbog toga je $BF = CF = d - a$.

Primjenom kosinusne teoreme na $\Delta ABC$ i $\Delta BCF$ imamo

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos(\angle CAB)$$

i

$$BF^2 = BC^2 + CF^2 - 2BC\cdot CF\cdot\cos(\angle BCF),$$

ili

$$a^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos 36^\circ$$

i

$$(d-a)^2 = a^2 + (d-a)^2 - 2a(d-a)\cos 36^\circ,$$

odakle je

$$2\cos 36^\circ = \frac{d}{a} \text{ i } 2\cos 36^\circ = \frac{a}{d-a}.$$

Iz posljednje dvije jednakosti slijedi

$$\begin{aligned} \frac{d}{a} = \frac{a}{d-a} &\Rightarrow d(d-a) = a^2 \\ &\Rightarrow d^2 - a^2 = ad \quad /: ad \\ &\Rightarrow \frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

**Dokaz 3.** Odredimo tačku $F$ kao u prethodnom rješenju (slika 2). Trouglovi $ABC$ i $BCF$ imaju jednake uglove, pa su slični. Na osnovu te sličnosti imamo $AC : BC = BC : CF$, odnosno $d : a = a : (d-a)$. Odavde je $d(d-a) = a^2$, ili $d^2 - a^2 = ad$. Dijeljenjem lijeve i desne strane posljednje jednakosti sa $ad$ dobijamo traženu jednakost $(*)$.

**Dokaz 4.** Najprije odredimo tačku $F$ kao u dokazu 2, a potom konstruišemo polupravu $Ap$ paralelno sa $BF$. Njen presjek sa pravom $CB$ obilježimo sa $P$ (slika 3). Tada ybog $AP \| BF$, imamo $\angle BPA = \angle FBC = 36^\circ$. Kako je $\angle ABP = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ i $\angle BPA = 36^\circ$, u trouglu $APB$ je $\angle BAP = 180^\circ - (72^\circ + 36^\circ) = 72^\circ$. To, pak, znači da je $\Delta APB$ jednakokraki. I $\Delta APC$ je jednakokraki ( $\angle CPA = \angle PCA = 36^\circ$ ), pa je $AP = AC = d = BP$.

Koristićemo Molvajdove formule

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \text{i} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

gdje su $a, b, c$ stranice i $\alpha, \beta, \gamma$ unutrašnji uglovi proizvoljnog trougla $ABC$.

Primjenom prve formule na $\Delta APB$ (slika 3), imamo

$$\frac{d+a}{d}=\frac{\cos\frac{72^\circ-36^\circ}{2}}{\sin\frac{72^\circ}{2}}=\frac{\cos 18^\circ}{\sin 36^\circ},$$

a primjenom druge formule na $\Delta ABC$:

$$\frac{d-a}{a}=\frac{\sin\frac{108^\circ-36^\circ}{2}}{\cos\frac{36^\circ}{2}}=\frac{\sin 36^\circ}{\cos 18^\circ}.$$

Tada je

$$\frac{d+a}{d}\cdot\frac{d-a}{a}=\frac{\cos 18^\circ}{\sin 36^\circ}\cdot\frac{\sin 36^\circ}{\cos 18^\circ}=1 \Rightarrow \frac{d^2-a^2}{ad}=1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a}-\frac{a}{d}=1, \text{ q.e.d.}$$

**Dokaz 5.** Odredimo tačku $P$ kao u dokazu 4 (slika 3). Primjenom Stjuartovog teorema na $\Delta APC$ dobijamo

$$CP\cdot\left(CB\cdot BP+AB^2\right)=CA^2\cdot BP+AP^2\cdot BC \Rightarrow (a+d)\cdot\left(ad+a^2\right)=d^2\cdot d+d^2\cdot a$$

$$\Rightarrow (a+d)\left(ad+a^2\right)=d^2(d+a) \quad /:(a+d)$$

$$\Rightarrow ad+a^2=d^2, \text{itd.}$$

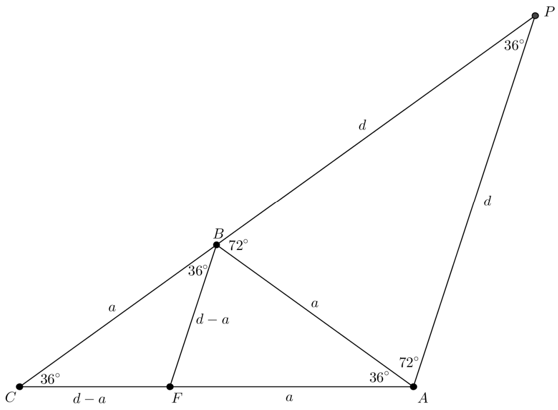
**Dokaz 6.** Tačke $F$ i $P$ odredimo kao u dokazu 4 (slika 3). S obzirom da je $PA \| BF$, možemo primjeniti Talesov teorem:

$AF:FC=PB:BC$, ili $a:(d-a)=d:a$. Odavde lako dobijamo traženu jednakost $(*)$.

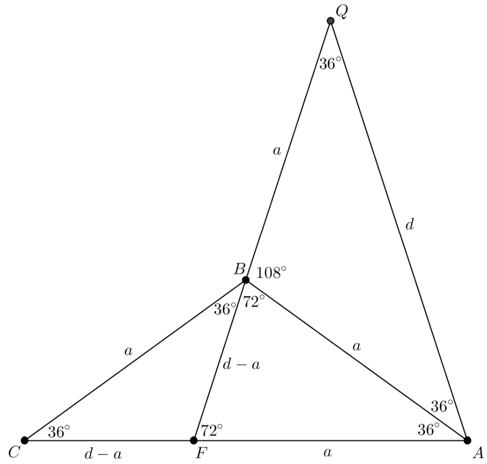
**Dokaz 7.** Koristićemo sljedeću lemu (pomoćni teorem) iz $[2]$: Ako je u trouglu $ABC$ $\alpha=2\beta$, onda je $a^2=b(b+c)$. Na osnovu te leme primijenjene na $\Delta ABF$

(slika 2) je $AB^2 = BF(BF + AF)$ ili $a^2 = (d-a)((d-a)+a)$, tj. $a^2 = (d-a)d$. Odavde lako dobijamo jednakost $(*)$.

**Dokaz 8.** Tačku $P$ odredimo kao u dokazu 4 (slika 3). Trouglovi $ABC$ i $APC$ imaju jednake uglove pa su slični. Zbog toga je $AC : AB = CP : AP$ ili $d : a = (a+d) : d$. Otuda je $d^2 = a^2 + ad$, odnosno $d^2 - a^2 = ad$, odakle slijedi tražena jednakost $(*)$.




Slika 3




Slika 4

**Dokaz 9.** Odredimo tačku $F$ kao kod dokaza 2, pa produžimo duž $FB = d - a$ do tačke $Q$ tako da $BQ = a$. Na bazi Stjuartovog teorema imamo:

$$FQ \cdot \left(FB \cdot BQ + AB^2\right) = AF^2 \cdot BQ + AQ^2 \cdot BF \Rightarrow d\left((d-a)a + a^2\right) = a^2 \cdot a + d^2(d-a)$$

$$\Rightarrow ad^2 = a^3 + d^3 - ad^2$$

$$\Rightarrow 0 = \left(a^3 - ad^2\right) + \left(d^3 - ad^2\right)$$

$$\Rightarrow 0 = a\left(a^2 - d^2\right) + d^2(d-a)$$

$$\Rightarrow 0 = -a(d-a)(d+a) + d^2(d-a) \quad / : (d-a)$$

$$\Rightarrow 0 = -a(d+a) + d^2$$

$$\Rightarrow ad = d^2 - a^2 \quad / : (ad)$$

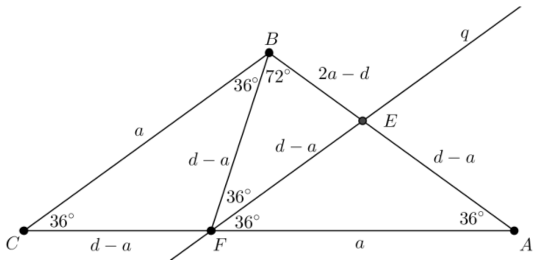
$$1 = \frac{d}{a} - \frac{a}{d}, \quad \text{q.e.d.}$$

**Dokaz 10.** Tačke $F$ i $Q$ odredimo kao kod prethodnog dokaza (slika 4). Kako je $\angle FAB = \angle BAQ = 36^\circ$, prava $AB$ je simetrala unutrašnjeg ugla $FAQ$ u $\Delta AOB$, pa možemo primijeniti teorem o simetrali unutrašnjeg ugla za ovaj trougao:

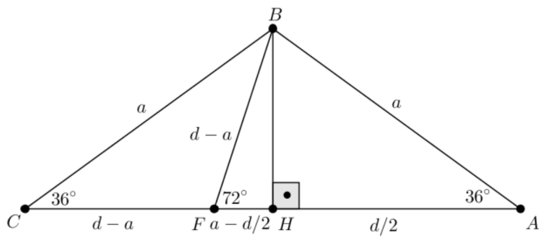
$$FB : BQ = AF : AQ \text{, odnosno } (d-a) : a = a : d .$$

Iz posljednje jednakosti lako dobijamo traženu jednakost $(*)$.

**Dokaz 11.** Najprije odredimo tačku $F$ kao kod dokaza 2 (slika 5). Neka prava $q$ koja sadrži tačku $F$ i paralelna je sa $BC$ siječe stranicu $AB$ u tački $E$. Tada je $\angle AFE = \angle FAE = \angle BCA = 36^\circ$, pa je $\Delta AEF \cong \Delta BCF$ (pravilo USU). Zbog toga je $AE = CF = d - a$, što znači da je $BE = BA - AE = a - (d-a) = 2a - d$. Na osnovu Talesovog teorema je $AF : FC = AE : EB$ ,ili $a : (a-b) = (d-a) : (2a-d)$. Odavde je $a(2a-d) = (d-a)^2$, odnosno $2a^2 - ad = d^2 - 2ad + a^2$, tj. $ad = d^2 - a^2$. Nakon dijeljenja sa $ad$ iz posljednje jednakosti implicira tražena jednakost $(*)$.




Slika 5




Slika 6

**Dokaz 12.** Odredimo tačku $F$ ( v.dokaz 2). S obzirom da je dati trougao $ABC$ jednakokraki, podnožje $H$ njegove visine $BH$ je središte njegove osnovice $CA$ (slika 6). Zbog toga je $AH = HC = \frac{d}{2}$ i $FH = CH - CF = \frac{d}{2} - (d-a) = a - \frac{d}{2}$.

Primjenom Pitagorinog teorema na pravougle trouglove $BFH$ i $ABH$ dobijamo $BH^2 = BF^2 - FH^2$ i $BH^2 = AB^2 - AH^2$, odakle je $BF^2 - FH^2 = AB^2 - AH^2$, ili $(d-a)^2 - \left(a - \frac{d}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$. Odavde je

$$d^2 - 2da + a^2 - \left(a^2 - ad + \frac{d^2}{4}\right) = a^2 - \frac{d^2}{4} \Rightarrow d^2 - ad = a^2$$

$$\Rightarrow d^2 - a^2 = ad$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1 \text{, q.e.d.}$$

## LITERATURA

[1] Š. Arslanagić i D. Milošević, *Različite metode dokazivanja jedne teoreme u geometriji*, MAT – KOL (Banja Luka), XVII (1) (2011), 13 – 24.

[2] D. Milošević, *Razni dokazi jedne teoreme iz geometrije*, MAT – KOL (Banja Luka), XVII (1) (2011), 49 – 54.

Primljeno u Redakciju 26.06.2014. Dostupno na internetu 07.07.2014.