MAT-KOL (Banja Luka)
XXI (2)(2015), 131--142
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

ISSN 0354-6969 (o)
ISSN 1986-5828 (o)

Комплементарне неједнакости неједнакости троугла

Павле М. Миличић[1]

Сажетак. Истиче се значај *неједнакости троугла* за целокупну математику. Указује се на друге неједнакости које у основи свог доказа имају неједнакост троугла.Многе од њих потичу од српских математичара, што се види у Митриновићевим књигама [7], [8], [9]. Даје се посебан приказ *комплементарних неједнакости неједнакости троугла.*

Кључне речи: *Хилбертова аксиоматика, Колмогоревљева аксиоматика, неједнакост троугла, комплементарна неједнакост троугла*

Нека основна тврђења euклидске геометрије (*ЕГ*) није једноставно доказати помоћу Хилбертових аксиома (*ХА*). На пример, увођење појама ***дужине дужи*** и појам ***мере угла*** је тежак задатак, у настави геометрије и на математичким факултетима, а да не говорим у средњошколском дедуктивном излагању геометрије. Али, још елементарнија тврђења, на којима почивају највећи део дедукција (*ЕГ*) није једноставно доказати помоћу Хилбертових аксиома, а да доказ буде лак и разумљив за средњошколце. Таква су на пример тврђења: егзистенција тачке ***између*** две дате тачке (притом, немамо дефиницију појма „***бити између две тачке***“), егзистенција ***средишта дужи***, тврђење да су ***прави углови*** међусобно подударни, тврђење о ***неједнакости троугла*** и друга тврђења Зато се она у настави средње школе обично претпостављају као позната и не доказују се. Еуклид је нека од ових тврђења узимао као аксиоме а неке је доказивао.На пример, доказивао је тврђење о неједнакости троугла. За доказ он је користио следећа тврђења (у нашим уџбеницима се и сада

[1] pavle.milicic@gmail.com

користи ова схема доказа): 1) Спољашњи угао троугла је већи од било ког несуседног угла, 2) Наспрам веће стране лежи већи угао, 3) Наспрам већег угла лежи већа страна. А сва ова тврђења у савременом дедуктивном заснивању геометрије се доказују на основу аксиома, па се тешко долази до правог доказа. Због немогућности да се еуклидска геометрија у средњим школама дедуктивно заснује на основама *ХА*, методичари и педагози математике, у бившем Совјеском Савезу, су у другој половини двадесетог века, написали више наменских средњошколских уџбеника у којима се наводе и посебни системи аксиома *ЕГ*, које могу бити основе за дедуктивно усвајање осталог градива из *ЕГ*. Први такав систем аксиома потиче од А.Н. Колмогорова[2]. Он дужину дужи узима као основни појам а тврђење неједнакости трогла је аксиома (видети, на пример [15]).

Од свих побројаних горе особина *ЕГ* од посебног је значаја тврђење о **неједнакости троугла** (***једна страница троугла није већа од збира друге две странице.*** То важи и за дужине страница: ако су a,b и c дужине страница троугла онда је

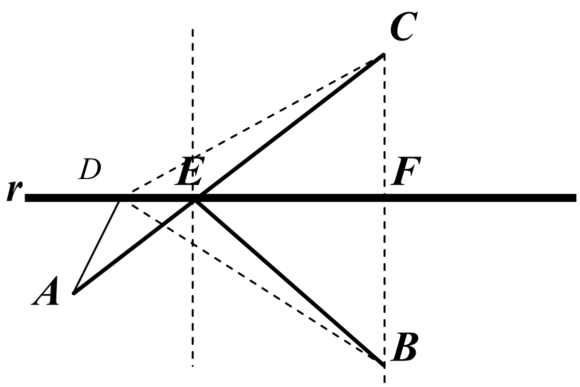
$$(*)\qquad a \le b + c \wedge b \le a + c \wedge c \le a + b.$$

Важи и обратно: за три дужи чије су дужине a,b,c које испањавају горњи услов постоји троугао чије су странице те дужи.

Неједнакост троугла је једна од интуитивних особина појма растојања између две тачке. На њему се заснива наша интуитивна представа о најкраћем растојању између две тачке, о најкраћем растојању једне тачке од одређеног скупа тачака, о ортогоналностима у разним апстрактним просторима (на пример, у нормираном простору). Ово тврђење је користио још Ахимед кад је израчунавао дужину лука параболе. Међутим, у настави срдње школе, не истиче се довољно значај овог тврђења, тако да, и данас, многи учиници не знају зашто је дужина дужи најкраће растојање између крајних тачака те дужи, зашто је дужина кружног лука већа од дужине одговарајуће тетиве итд.

Неједнакост троугла се често директно користи (поготову њене последице) при решавању разних задатака из геометрије па и физике. Наведимо један добро познат пример: Са једне стране реке r налазе се два села, село A и село B. Наћи место на обали реке где треба поставити пумпу која ће напајати водом оба села али да дужина укупних водоводних цеви буде минимална. Решење тог задатка директно користи неједнакост троугла.То је тачка E, видети слику, ($BF = FC$, $BF \perp FC$). Овим решењем се објашњава закон одбијања светлости од огледала.

[2] (1903 —1987)



Напоменимо да је о неједнакости троугла расправљао и наш познати математичер **М. Петровић**[3]. У румунском часопису Bulletin Mathématique de la la Société Roumaine des Sciences[4], tom 40, он је добио узгредни резултат: Ако су a,b,c дужине од којих се може образовати троугао, онда је

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq 2,$$

Овај резултат су касније неки математичари уопштили на $n-$ тоугао.

Колики је значај у математици тврђење неједнакости троугла говоре многе његове последице.

Помоћу неједнакости троугла доказује се тврђење у геометрији: Једна страна триедра (било да се ради о страни као делу равни или се ради о његовој мери, мери угла) је мања или једнака од друге две стране а већа од разлике друге две стране.

Неједнакост троугла је једна од основни неједнакости у теорији реалних бројева, тврђење: за све реалне бројве a и b важи

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

(***апсолутна вредност збира два реална броја није већа од збира апсолутних вредности тих бројева).***

Тврђење важи за било који коначан број сабирака, а у одређеним случајевима, и за бесконачни број сабирака.

Ово тврђење се лако доказује ако се користи следећа дефиниција апсолутне вредноси

---

[3] Михајло Петровић (1868. -1943.)

[4] http://www.rms.unibuc.ro/bulletin/

$$|x| := x \operatorname{sgn} x = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases} .$$

$$(|a+b| = (a+b)\operatorname{sgn}(a+b) = a\operatorname{sgn}(a+b) + b\operatorname{sgn}(a+b) \le |a| + |b|)$$

Ова неједнакост (неједнакост роугла) важи и за модуле комлексних бројева, за интезитете вектора, за норме вектора у нормираним просторима итд.

Према неједнакости троугла, за реалну функцију $f(x) = |x|$ важи неједнакост

$$f(\frac{a+b}{2}) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Отуда потиче тзв. **Јенсенова**[5] дефиниција конвексних функција. Ми обично кажемо да је то конвексна функција „на доле“, јер се користи и појам конвексне функције f „на горе“ дефинисане са

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{f(a)+f(b)}{2}, \quad a, b \in D_f.$$

А са конвексним функцијама постоји веома много суптилних неједнакости које се користе у реалној математичкој анализи. На пример, за конвексну функцију (на горе), $f(x) = \log x$, важи

$$\log\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{\log a + \log b}{2}, \quad (a, b > 0).$$

Одавде добијамо однос геометријске и аритметичке средине за реалне бројеве

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

(аритметичка средина није већа од геометријске средине позитивних бројева).

Добро су позната многа уопштења ових неједнакости које у основи користе неједнакост троугла. У монографији од **Д. С. Митриновића**[6] и **Ј. Е. Печарића**[7] „**Неједнакости и норме**“,1991. ([9]) прво и треће поглавље посвећено је неједнакости троугла. Напоменимо да је тзв. ***Митриновићева школа***, шездесетих година прошлог века, била права творница уопштавања или рафинирања разних неједнакости о конвексним функцијама и математичким срединама. Ти резултати су остали записани

---

[5] Johan Jensen, (1859 – 1925)
[6] Драгослав С. Митриновић (1908-1995)
[7] Јосип Е. Печарић (1948 -)

у веома значајној Митриновићевој књизи **Аналитичке неједнакости** из 1970.г. ([8]). Многи српски математичари имају своје прилоге у овој књизи. Поменућемо само неке: М. Петровић, Ј.Карамата, С. Аљанчић, В.Авакумовић, Б. Бајшански, Д. Марковић, С. Курепа, М. Томић, С. Фемпл, М. Марјановић, Д.Адамовић, С. Прешић, Ч. Станојевић, Д. Ђоковић, П. Васић, Ј. Кечкић, Р. Јањић, Г. Калајџић, И. Лазаревић и др.

Напоменимо да је проф. Митриновић са сарадницима издао још једну књигу чији је основ неједнакост троугла, то је књига **Геометријске неједнакости** [7], и још неке књиге о неједнакостима које су превођене и на стране језике.

И многе друге познате неједнакости у математичкој анализи су уопштења неједнакости троугла за реалне бројеве. А можда не постоји ни једна која у свом доказу не користи неједнакост троугла или неку њену варијанту?

Илустрације ради наведимо две добро познате неједнакости, из тзв. више математике, које су уопштења неједнакости троугла.

Ппозната неједнакост за одређене интеграле

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

за интеграбилне функције f (реалне или комплексне) на сегменту $[a,b]$, често се, са правом, зове неједнакост троугла, јер се за $f(x)=1, \quad a,b>0$ и ако се уместо a стави $-a$, своди на неједнакост $|b+a| \le b+a$.

Стављајући разне конкретне интеграбилне функције у горњу неједнакост и израчунавајући одговарајуће интеграле добијамо мноштво нетривијалних неједнакости. То је права фабрика за добијање разних неједнакости.

Позната неједнакост Минковског је такође уопштење неједнакости троугла. Наиме, из

$$\left(\sum_1^n (a_k+b_k)^r\right)^{1/r} \le \left(\sum_1^n a_k^{\,r}\right)^{1/r} + \left(\sum_1^n b_k^{\,r}\right)^{1/r} \quad (a_i, b_i \ge 0,\ r>1),$$

За $a_1 = a,\ b_1 = b,\ r=2,\ n=1$ добијамо $|a+b| \le |a| + |b|$.

Иначе, неједнакост троугла се користи при дефинисању разних појмова савремене математичке анализе као што су дефиниција

Римановог интеграла и дефиниција дужине криве линије, односно, тзв. ректификација кривих. Затим, неједнакост троугла је омогућила да се дефинишу нове савремене области математике. Помоћу тог појама се дефинишу **метрички простори** и **нормирани простори**. Појам разних мера скупова користи неједнакост троугла. Користи га и Колмогоров за аксиоматско увођење појма вероватноће, итд.

Једна од аксиома метричког простора M (аксиома неједнакости троугла) је тврђење да за било која три елемента тог простора x, y, z важи

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z),$$

где је $d(x,y)$ растојање између елемената (тачака) x и y из M. Према дефиницији растојања у метричком простору, лако је видети да је $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ једно растојање у метричком простору реалних бројева R. Ако се за ово растојање примени неједнакост троугла онда се добија нетривијална неједнакост са апсолутним вредностима. А постоје и друге метрике у R.

У нормираном простору сваки вектор x има своју норму $\|x\|$ па је лако показати да је нормирани простор метрички простор са метриком $d(x,y) = \|x-y\|$. У Хилбертовим просторима важи још $\|x\|^2 = (x,x)$, где је $(\cdot,\cdot)$ ознака скаларног производа.

У Хилбертовим просторима, неједнакост троугла је еквивалентна са чувеном неједнакости **Коши-Буњаковски-Шварца**

$$|(x,y)| \le \|x\|\|y\|.$$

Наиме, с обзиром на особине скаларног производа, имамо тврђења:

$$\|x \pm y\| \le \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x \pm y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2 \Leftrightarrow$$

$$\|x\|^2 \pm 2(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \Leftrightarrow$$

$$|(x,y)| \le \|x\|\|y\|.$$

Задња неједнакост је основно тврђење у теорији Хилбертових и нормираних простора.

Напоменимо, да се (у метричким просторима), поред горње ***неједнакости троугла*** употребљава и тзв. ***јака неједнакост троугла***

$$d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(y,z)\},$$

која са прве три аксиоме метричког простора дефинише тзв. ултраметрику и ***ултраметричке просторе.***

Истакнућемо сада једну посебну врсту значајних неједнакости које су у вези са неједнакости троугла. То су тзв. ***комплементарне неједнакости неједнакости троугла.***

Шта је одредница тих неједнакости? Код нејднакости троугла (у терминима апсолутних вредности) апсолутна вредност збира има за мајоранту збир апсолутних вредности, симболично

$$\left|\sum a_k\right| \leq \sum |a_k|.$$

Комплементарна неједнакост неједнакости троугла је неједнакост типа

$$c\sum |a_k| \leq \left|\sum a_k\right|,$$

ако постоји такав позитиван број c . (Апсолутна вредност збира има неку тежинску миноранту збира апсолутних вредности).

Неједнакости овог типа су релативно новијег датума. Ми ћемо се сада њима бавити.

У књизи **„**Topologie générale**“**, од ***N. Burbaki***, Paris 1955., наилазимо тврђење: За комплексне бројеве $z_1, \cdots, z_m$ постоји подскуп $I \subset \{1, \cdots, m\}$ такав да је

(a) $$\left|\sum_{k\in I} z_k\right| \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m} |z_k|.$$

Ово тврђење је 1970. уопштио наш ***Д.Ж.Ђоковић***[8] у [8] (видети 3.8.35). Његово уопштење гласи:

Ако су $a_k \in R^n$ $(k = 1, \cdots, m)$ тада постоји $I \subset \{1, \cdots, m\}$ такав да је

(b) $$\left\|\sum_{k\in I} a_k\right\| \geq \frac{1}{2nK_n}\sum_{k=1}^{m} \|a_k\|,$$

где је $K_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta d\theta.$ За $n = 2$ ова неједнакост се своди на неједнакост (a). Ова Ђоковићева неједнакост је цитирана у више страних монографија и цитирана је у страним часописима (на пример: [16], [17] и [18]).

[8] Драгомир Ж. Ђоковић

Од посебног интереса је случај када је $I = \{1,\cdots,m\}$ и када се за комплексне бројеве $z_1,\cdots,z_m$ морају претпоставити допунски услови.

У том смислу се прво 1963. појавила. тзв. ***Вајлфова*** (H.S.Wilf [9]) ***неједнакост*** у значајном америчком часопису Proc. Amer. Math. Soc.[10] ([5]). Она гласи:

Нека је a реалан број и нека је $0 < \theta < \pi/2$. За комплексне бројеве $z_1, z_2,\cdots, z_n$, услов

(1) $$a - \theta < \arg z_i < a + \theta \quad (i = 1,\cdots,n)$$

имплицира неједнакост

(2) $$(\cos\theta)(|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|) \le |z_1 + z_2 + \cdots z_n|.$$

Ова неједнакост има следећу геометријску интерпретацију: ако су комплексни бројеви у углу величине 2θ са врхом у координатном почетку онда важи неједнакост (1)

Једна од првих последица овог тврђења је да се збир $z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ не може анулирати ако је $\cos\theta > 0$ и бар један $z_k \ne 0$

Проф. ***Митриновић*** је открио да је ову неједнакост, неједнакост (2), у специјалном случају кад је $a = \theta = \pi/4$, доказао ***М. Петровић 1917,*** [1]. И општи случај, неједнакости налази се у каснијем Петровићевом раду [2]. Тако, наш Мика Петровић има предност на ауторство ове неједнакости у односу на Вајлфа. Да ли је ову неједнакост неко користио и пре М. Петровића, то се не зна.

У ***Караматиној*** књизи ([3])***, „Теорија и пракса Стиелтјесова[11] интеграла“,*** такође се налази неједнакост (2). У овој књизи се налази још једна неједкоаст, другог типа, комплементарна са одговарајућом неједнакошћу троугла. Наиме, ту имамо тврђење:

Ако је f комплексна интеграбилна функција на сегменту $[a,b]$ и ако је

$$-\theta \le \arg f(x) \le \theta \quad (0 < \theta < \pi/2)$$

онда је

[9] Herbert Saul Wilf (1931 – 2012)
[10] http://www.ams.org/publications/journals/journalsframework/proc
[11] Thomas Jan Stieltjes (1956-1894)

(3) $$(\cos\theta)\int_a^b |f(x)|dx \le \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Неједнакост (2) су уопштили на векторе у комплексном Хилбертовом простору ***Диаз (J.B.Diaz) и Меткалфа (F.T.Metcalf) 1966.,*** ([4]).

Наводимо њихова два уопштења неједнакости (2).

Теорема 1. Нека је e јединични вектор у комплексном Хилбертовом простору H са скаларним производом$(\cdot,\cdot)$ и нека вектори $x_1, x_2, \cdots, x_n \in H \setminus \{0\}$ испуњавају услове

(4) $$0 \le r \le \frac{R_e(e, x_k)}{\|x_k\|} \quad (k = 1, \cdots, n).$$

Тада је

(5) $$r\sum_1^n \|x_k\| \le \|\sum_1^n x_k\|,$$

где једнакост важи ако и само ако је

$$\sum_1^n x_k = r\left(\sum_1^n \|x_k\|\right)e.$$

Будући да у Хилбертовом простору израз $\frac{R_e(e, x_k)}{\|x_k\|}$ претставља $\cos\theta_k$ где је θ_k угао између вектора e и вектора x_k, то услов (4) показује да се вектори x_k налазе у конусу са врхом у тачки нула, чија је оса одређена вектором e и чија је величина угла θ где је $\cos\theta = r$. Према томе неједнакост (5) уопштава неједнакост (2).

И Караматина неједнакост (3) је специјалан случај Теореме 1 јер и скуп комплексних функција интеграбилних на сегменту $[a,b]$ је један Хилбертов простор.

Теорема 2. Нека је (e_{ki}) $(k = 1, \cdots, n)$ ортонормирани низ вектора у H и нека вектори $x_1, \cdots, x_n \in H \setminus \{0\}$ задовољавају неједнакости

(6) $$0 \le r_k \le \frac{R_e(e_k, x_j)}{\|x_j\|} \quad (j = 1, \cdots, n; k = 1, \cdots, m).$$

Тада је

(7) $$\left(\sum_{1}^{m} r_k^{\,2}\right)^{1/2} \sum_{1}^{n} \left\| x_j \right\| \le \left\| \sum_{1}^{n} x_j \right\|$$

где једнакост важи ако и само ако је

$$\sum_{1}^{n} x_j = \sum_{1}^{n} \left\| x_j \right\| \left(\sum_{1}^{m} r_k e_k \right).$$

Да би се схватило како неједнакост (7) уопштава неједнакост (2) треба разумети да је скуп комплексних бројева Z са операцијом сабирања и модулом $|\cdot|$ као нормом један Хилбертов простор. У произвољном комплексном Хилбертовом простору израз $\dfrac{R_e(e, x_k)}{\|x_k\|}$ представља $\cos\theta_k$ где је θ_k угао између вектора e и x_k. Осим тога услов $0 \le r \le \dfrac{R_e(e, x_k)}{\|x_k\|}$ повлачи неједнакост $0 \le r \le 1$ па постоји угао θ такав да је $\cos\theta = r$. То је конусни угао конуса са осом конуса коју одређује јединични вектор e. Тако се овај услов (6) у простору Z своди на услов (1) а неједнакост (7) на неједнакост (2).То значи да је неједнакост (2) специјални случај неједнакости (5).

И Караматина неједнакост (3) је специјалан случај Теореме 1 јер и скуп комплексних функција интеграбилних на сегменту $[a,b]$ је један Хилбертов простор.

П. М. Миличић је 1989., [13] , уопштио Теорему 1. и Теорему 2. на векторе произвољног комплексног нормираног простора X. (У таквом простору не мора да постоји скаларни производ, видети у [14]). Он је уместо скаларног производа, кога у произвољном нормираном простору нема, користио функционале

$$\tau_{\pm}(x, y) := \lim_{t \to \pm 0} t^{-1}\left(\|x + ty\| - \|x\|\right) \quad \left(x, y \in X, x \ne 0, t \in R\right),$$

$$g(x, y) := \left(\|x\|/2\right)\left(\tau_{-}(x, y) + \tau_{+}(x, y)\right)$$

који постоје у сваком нормираном простору ([13] и [14]).

Показује се да, ако у нормираном комплексном простору постоји скаларни производ $(\cdot,\cdot)$ сагласан са нормом, да је тада

$$\tau_{-}(x,y)=\frac{R_e(x,y)}{\|x\|},\quad g(x,y)=R_e(x,y),$$

односно да је

$$(x,y)=g(x,y)-ig(x,iy),\quad x,y\in X.$$

Иначе, у произвољном нормираном простору важи

$$|g(x,y)|\le\|x\|\|y\|$$

па се са

$$\cos\theta:=\frac{g(x,y)}{\|x\|\|y\|}$$

може дефинисати угао између вектора x и y [14].

Наводимо сада Миличићеву Теорему А. која одговара горњој Теореми 1:

Теорема А. Нека је X комплексан (или реалан) нормиран простор, e јединични вектор тог простора и $x_k\in X\setminus\{0\}$, $k=1,2,\cdots,n$ и нека је

(8) $$0\le r\le\frac{\tau_{-}(e,x_k)}{\|x_k\|}$$

онда је

(9) $$r\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|\right)\le\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|$$

где је једнакост испуњена ако исамо ако је

$$\tau_{-}(e,x_1+\cdots+x_n)=r(\|x_1\|+\cdots+\|x_n\|)\wedge$$
$$\tau_{-}(e,x_1+\cdots+x_n)=\|x_1+\cdots+x_n\|.$$

Ако дакле, у X постоји и скаларни производ $(\cdot,\cdot)$ сагласан са нормом видели смо да важи

$$\tau_{-}(x,y)=\frac{R_e(x,y)}{\|x\|},(x\ne 0,y\in X),$$

онда се услов (8) у нормираном простору X своди на услов (4) а неједнакост (9) постаје неједнакост (5). Тако ова теорема уопштава Диаз-Меткалфову Теорему 1.

На сличан начин Миличић је доказао и Теорему В. која је уопштење Теореме 2 предходних аутора.

Дакле, Миличићеве Теорема А. и Теорема В. у случају да у $\boldsymbol{X}$ постоји скаларни производ своде се на горе наведену Теорему 1 и Теорему 2. Тако тврђења Миличићевих Теорема А. и Теорема В. уопштавају неједакости (2), (3), (5) и (7).

Литература

[1] M.Petrovitch, *Modul d'une somme*, Enseignement Math. 19(1917), 53–56

[2] M.Petrovitch, *Théorème sur les integrals curvilignes*, Publ. Math. Univ. Belgade, 2(1933), 45-59

[3] J.Karamata, *Teorija i praksa Stieltjesovog integrala*, Beograd 1949.

[4] J.B. Diaz and F.T.Metcalf, *A complementary triangle inequality in Hilbert and Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc, 17(1)(1966), 88–97

[5] H.S.Wilf, Some *applications of the inequality of arithmetic and geometric means to polynomial equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 14(2)(1963), 263-265

[6] S. Kurepa, *On an inequlity*, Glasnik Matematički, 3(23)(2)(1968), 193-196

[7] D.S. Mitrinović (sa saradnicima: P.M.Vasić, R.Z.Đorđević, R.R. Janić), *Geometrijske nejednakosti*, Matematička biblioteka 31, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd 1966

[8] Д.С. Митриновић, сарадник П.М. Васић, *Аналитичке неједнакости*, Грађевинска књига, Београд 1970.

[9] D.S.Mitrinović, J.E.Pečarić, *Nekednakosti i norme*, Naučna knjiga 1991.

[10] P.M.Vasić, R.R.Janjić, J.D.Kečkić, *A complementary triangle inequality,* Univ. Beograd, Publ. ETF, Ser.Mat.Fiz., No 338-352 (1971), 77-81.

[11] Z.D.Stojanović, *A complementary triangle inequality,* Univ. Beograd, Publ. ETF, Ser.Mat.Fiz., No No 381-409 (1972), 111-112

[12] J.E. Pečarić and P.R. Beesack , *On Jensens Inequality for Covex Functions II,* J.Math.Anal.Apl., 118 (1)(1986), 125-144.

[13] P. M. Miličić, *Sur une inégalité complémentaire de l'inegalité triangulaire*, Matematički Vesnik 41(2)(1989), 83 - 88

[14] П. М. Миличић, *Десет тема из математике*, Завод за уџбенике, Београд, 2010.

[15] Ә.З. Шувалова, В.И.Каплун, *ГЕОМЕТРИЯ*, Высшая школа, Москва 1980.

[16] I. Netuka and J. Veselý, An inequality for finite sums in $\boldsymbol{R}^n$,Časopiś Pěst.Mat. 103(1978),73-77

[17] M.S.Marinov, *On an inequality with respect to norm*. God. Vissh. Uchben. Zaved., Prilozhna Mat. 16(980), No 4(1981), 99-108

[18] Y.Hirashita, *Periodicityand inequality*, J.Math. Soc. Japan, 26(1974), 440-446

Примљено у редакцију 02.01.2015. Рецидирана верзија 12.01.2015.
Доступно на интернету 19.01.2015.