MAT–KOL (Banja Luka)
ISSN 0354–6969 (p), ISSN 1986–5228 (o)
Vol. XXI (2)(2015), 105–115
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

PRIPADNOST RJEŠENJA KVADRATNE JEDNAČINE DANOM INTERVALU

Bernadin Ibrahimpašić[1], **Senka Ibrahimpašić**[2]

Sažetak. Za danu kvadratnu jednačinu (kvadratnu funkciju) $ax^2+bx+c=0$ ($f(x)=ax^2+bx+c$) se može postaviti zadatak da se odrede koeficijenti a, b i c tako da njena rješenja (nultačke), obje, jedna ili nijedna, pripadaju danom intervalu (α, β), gdje su $\alpha < \beta$ realni brojevi.

Ključne riječi i fraze: rješenje kvadratne jednačine, nultačka kvadratne funkcije.

Abstract. It's often required to determine the coefficients of the quadratic equation (function) $ax^2+bx+c=0$ ($f(x)=ax^2+bx+c$) so that both or one or none of roots (null points) of the quadratic equation (function) belong to the interval (α, β), where $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 00A05, 97H30

Key words and phrases: root of the quadratic equation, null point of the quadratic function.

1 Uvod

Jednačina oblika

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

gdje su $a \neq 0$, b i c realni brojevi, se naziva kvadratna jednačina. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava jednačinu (1) se naziva rješenje kvadratne jednačine. Rješenja kvadratne jednačine se određuju pomoću formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \tag{2}$$

gdje je $D = b^2 - 4ac$ diskriminanta kvadratne jednačine.

Iz (2) vidimo da priroda rješenja jednačine (1) zavisi od vrijednosti diskriminante D. Tako imamo da vrijedi:

[1]Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću, Luke Marjanovića bb, 77000 Bihać, Bosna i Hercegovina, e-mail: bernadin@bih.net.ba

[2]Opća gimnazija "Bosanska Krupa", Gimnazijska 1, 77240 Bosanska Krupa, Bosna i Hercegovina, e-mail: senkai@bih.net.ba

a) Ako je $D > 0$ onda jednačina (1) ima dva različita realna rješenja koja određujemo prema formuli (2).

b) Ako je $D = 0$ onda jednačina (1) ima jedno (dvostruko) realno rješenje

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}.$$

a) Ako je $D < 0$ onda jednačina (1) ima dva konjugovano − kompleksna rješenja

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Napomenimo da se analiza kvadratne jednačine (1) može poistovjetiti s analizom kvadratne funkcije

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

pa tako imamo da se određivanje rješenja kvadratne jednačine (1) može poistovjetiti s određivanjem nultačaka kvadratne funkcije (3).

Grafik kvadratne funkcije (3) je osnosimetrična parabola, čija je osa simetrije pravac $x = -b/2a$, s tjemenom u tački $T(x_0, y_0)$, gdje je

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \qquad \text{i} \qquad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}.$$

Ukoliko je $a > 0$ onda je u tjemenu minimum, a ukoliko je $a < 0$ onda je u tjemenu maksimum.

2 Položaj rješenja kvadratne jednačine

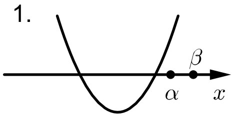
Nas će interesovati položaj rješenja kvadratne jednačine (1), odnosno nultačaka kvadratne funkcije (3), u odnosu na zadane realne brojeve α i β, gdje je $\alpha < \beta$. Analizirat ćemo slučaj kada je $D > 0$, tj. kada kvadratna jednačina (1) ima dva različita realna rješenja x_1 i x_2, te ćemo pretpostaviti da je $x_1 < x_2$.

Za kvadratnu jednačinu (funkciju) se može postaviti zadatak da se odrede koeficijenti a, b i c tako da njena realna rješenja (nultačke), jedna ili obje, budu u danom intervalu (α, β). Posmatrat ćemo 3 slučaja, i to kada u intervalu (α, β):

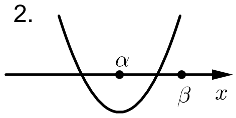
1. Leži samo jedna nultačka;
2. Leže obje nultačke;
3. Ne leže nultačke.

Ako analiziramo sve moguće položaje parabole u odnosu na α i β, onda imamo 12 slučajeva koje, prije nego li ih analiziramo analitički, možemo vidjeti na sljedećim slikama.

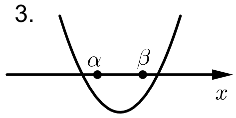
1.



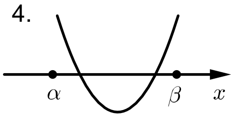
2.



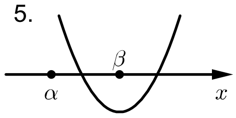
3.



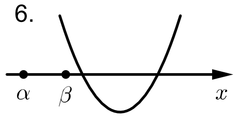
4.



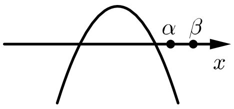
5.



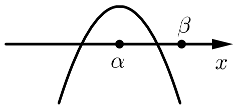
6.



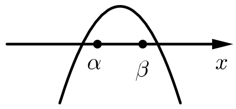
7.



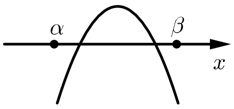
8.



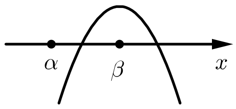
9.



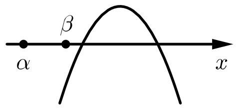
10.



11.



12.



Napravimo sada analizu koja obuhvata:

- Predznak vodećeg koeficijenta a;
- Predznak vrijednosti kvadratne funkcije $f(x)$ u tačkama α i β, tj. predznak od $f(\alpha)$ i $f(\beta)$;
- Položaj apscise tjemena $x_0 = -b/2a$ u odnosu na interval (α, β). Oznaka L će nam značiti da se x_0 nalazi lijevo od intervala $(x_0 < \alpha)$, oznaka D će nam značiti da se x_0 nalazi desno od intervala $(x_0 > \beta)$, oznaka S će nam značiti da se x_0 nalazi unutar intervala $(\alpha < x_0 < \beta)$, dok će nam oznaka $\star$ značiti da je taj položaj neodređen;
- Broj nultačaka (NT) koje se nalaze unutar intervala (α, β).

Napomenimo da predznak ordinate y_0 tjemena ne trebamo analizirati, jer je on suprotan predznaku vodećeg koeficijenta a.

Ako analizirane podatke predstavimo tabelom, imamo sljedeću tabelu.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−
$f(\alpha)$	+	−	−	+	+	+	−	+	+	−	−	−
$f(\beta)$	+	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−
$-\frac{b}{2a}$	L	$\star$	$\star$	S	$\star$	D	L	$\star$	$\star$	S	$\star$	D
broj NT	0	1	0	2	1	0	0	1	0	2	1	0

Nakon uvida u sve do sada analizirano, možemo iskazati analitičke uslove kojima izražavamo pripadnost rješenja kvadratne jednačine (1), odnosno nultačaka kvadratne funkcije (3), intervalu (α, β) u zavisnosti od vrijednosti koeficijenata a, b i c.

Također treba napomenuti da treba biti ispunjen i uslov

$$D = b^2 - 4ac > 0, \tag{4}$$

kako bismo bili sigurni da postoje dva rješenja (nultačke).

1°) Tačno jedno rješenje kvadratne jednačine (1), odnosno tačno jedna nultačka kvadratne funkcije (3), pripada intervalu (α, β) (slučajevi 2, 5, 8 i 11) ako je

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0. \tag{5}$$

Preciznije, imamo da je $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$ (slučajevi 2 i 8) ako je

$$af(\alpha) < 0 \quad \text{i} \quad af(\beta) > 0, \tag{6}$$

dok je $\alpha < x_1 < \beta < x_2$ (slučajevi 5 i 11) ako je

$$af(\alpha) > 0 \quad \text{i} \quad af(\beta) < 0. \tag{7}$$

2°) Oba rješenja kvadratne jednačine (1), odnosno obje nultačke kvadratne funkcije (3), pripadaju intervalu (α, β) (slučajevi 4 i 10) ako je

$$a > 0, \quad f(\alpha) > 0, \quad f(\beta) > 0, \quad \alpha < -\frac{b}{2a} < \beta \tag{8}$$

ili

$$a < 0, \quad f(\alpha) < 0, \quad f(\beta) < 0, \quad \alpha < -\frac{b}{2a} < \beta. \tag{9}$$

3°a) Oba rješenja kvadratne jednačine (1), odnosno obje nultačke kvadratne funkcije (3), pripadaju intervalu $(-\infty, \alpha)$ (slučajevi 1 i 7) ako je

$$a > 0, \quad f(\alpha) > 0, \quad -\frac{b}{2a} < \alpha \tag{10}$$

ili

$$a < 0, \quad f(\alpha) < 0, \quad -\frac{b}{2a} < \alpha. \tag{11}$$

$3°b$) Oba rješenja kvadratne jednačine (1), odnosno obje nultačke kvadratne funkcije (3), pripadaju intervalu $(\beta, +\infty)$ (slučajevi 6 i 12) ako je

(12) $$a > 0, \quad f(\beta) > 0, \quad -\frac{b}{2a} > \beta$$

ili

(13) $$a < 0, \quad f(\beta) < 0, \quad -\frac{b}{2a} > \beta.$$

$3°c$) Jedno rješenje kvadratne jednačine (1), odnosno jedna nultačka kvadratne funkcije (3), pripada intervalu $(-\infty, \alpha)$, a druga intervalu $(\beta, +\infty)$ (slučajevi 3 i 9) ako je

(14) $$a > 0, \quad f(\alpha) < 0, \quad f(\beta) < 0$$

ili

(15) $$a < 0, \quad f(\alpha) > 0, \quad f(\beta) > 0.$$

3 Primjeri

Primjer 3.1 *Odrediti vrijednost realnog parametra k tako da tačno jedna realna nultačka kvadratne funkcije*

$$f(x) = kx^2 + (3k+5)x + 2k + 1$$

pripada intervalu $(-3, 3)$.

Rješenje: Imamo da mora biti

(16) $$D > 0$$

i

(17) $$f(-3) \cdot f(3) < 0.$$

Kako je

$$D = k^2 + 26k + 25,$$

to je uslov (16) ispunjen za

(18) $$k \in (-\infty, -25) \cup (-1, +\infty).$$

Kako je

$$f(-3) = 2k - 14 \qquad \text{i} \qquad f(3) = 20k + 16,$$

to je

$$f(-3) \cdot f(3) = (2k - 14) \cdot (20k + 16),$$

pa je uslov (17) ispunjen za

$$k \in \left(-\frac{4}{5}, 7\right). \tag{19}$$

Konačno rješenje dobijamo kao presjek skupova (18) i (19), pa je

$$k \in \left(-\frac{4}{5}, 7\right).$$

$\diamondsuit$

Primjer 3.2 *Odrediti vrijednost realnog parametra m tako da za kvadratnu funkciju*

$$f(x) = mx^2 - (4m+3)x + 3m + 1$$

vrijedi:

a) veća realna nultačka funkcije pripada intervalu $(5, 6)$, a manja ne;

b) manja realna nultačka funkcije pripada intervalu $(-2, 2)$, a veća ne.

Rješenje: Kako je

$$D = 4m^2 + 20m + 9,$$

to je uslov $D > 0$ ispunjen za

$$m \in \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right). \tag{20}$$

a) Imamo da mora biti

$$D > 0 \tag{21}$$

i

$$a \cdot f(5) < 0 \qquad \wedge \qquad a \cdot f(6) > 0. \tag{22}$$

Kako je

$$f(5) = 8m - 14 \qquad \Rightarrow \qquad af(5) = m(8m - 14),$$
$$f(6) = 15m - 17 \qquad \Rightarrow \qquad af(6) = m(15m - 17),$$

to je $af(5) < 0$ ispunjeno za

$$m \in \left(0, \frac{7}{4}\right), \tag{23}$$

dok je $af(6) > 0$ ispunjeno za

$$m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{17}{15}, +\infty\right). \tag{24}$$

Dobijamo da je uslov (22) ispunjen u presjeku skupova (23) i (24), tj. za

$$m \in \left(\frac{17}{15}, \frac{7}{4}\right), \tag{25}$$

pa se konačno rješenje dobija kao presjek skupova (20) i (25) i vrijedi

$$m \in \left(\frac{17}{15}, \frac{7}{4}\right).$$

b) Mora vrijediti (21) i

$$a \cdot f(-2) > 0 \qquad \wedge \qquad a \cdot f(2) < 0. \tag{26}$$

Kako je

$$\begin{aligned} f(-2) = 15m + 7 \qquad &\Rightarrow \qquad af(-2) = m(15m+7), \\ f(2) = -m - 5 \qquad &\Rightarrow \qquad af(2) = -m(m+5), \end{aligned}$$

to je $af(-2) > 0$ ispunjeno za

$$m \in \left(-\infty, -\frac{7}{15}\right) \cup (0, +\infty), \tag{27}$$

dok je $af(2) < 0$ ispunjeno za

$$m \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty). \tag{28}$$

Dobijamo da je uslov (26) ispunjen u presjeku skupova (27) i (28), tj. za

$$m \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty) \tag{29}$$

pa se konačno rješenje dobija kao presjek skupova (20) i (29) i vrijedi

$$m \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty).$$

♢

Primjer 3.3 *Odrediti vrijednost realnog parametra m tako da oba realna rješenja kvadratne jednačine*

$$(2m+1)x^2 - (m+2)x + m - 3 = 0$$

pripadaju intervalu $(-1, 2)$.

Rješenje: Pripadna kvadratna funkcija je $f(x) = (2m+1)x^2 - (m+2)x + m - 3$. Kako moraju biti ispunjeni uslovi (4) i ((8) ili (9)), te kako je

$$\begin{aligned} D &= -7m^2 + 24m + 16, \\ a &= 2m + 1, \\ f(-1) &= 4m, \\ f(2) &= 7m - 3 \\ -\frac{b}{2a} &= \frac{m+2}{2(2m+1)}, \end{aligned}$$

to, osim što mora biti

$$-7m^2 + 24m + 16 > 0, \tag{30}$$

mora vrijediti

$$2m + 1 > 0 \quad \wedge \quad 4m > 0 \quad \wedge \quad 7m - 3 > 0 \quad \wedge \quad -1 < \frac{m+2}{2(2m+1)} < 2 \tag{31}$$

ili

$$2m + 1 < 0 \quad \wedge \quad 4m < 0 \quad \wedge \quad 7m - 3 < 0 \quad \wedge \quad -1 < \frac{m+2}{2(2m+1)} < 2. \tag{32}$$

Uslov (30) je ispunjen za

$$m \in \left(-\frac{4}{7}, 4\right). \tag{33}$$

Vrijedi da je $2m + 1 > 0$ za

$$m \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right), \tag{34}$$

da je $2m + 1 < 0$ za

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \tag{35}$$

da je $4m > 0$ za

$$m \in (0, +\infty), \tag{36}$$

da je $4m < 0$ za

$$m \in (-\infty, 0), \tag{37}$$

da je $7m - 3 > 0$ za

$$m \in \left(\frac{3}{7}, +\infty\right), \tag{38}$$

da je $7m - 3 < 0$ za

$$m \in \left(-\infty, \frac{3}{7}\right), \tag{39}$$

dok je $-1 < (m + 2)/2(2m + 1) < 2$ za

$$m \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(-\frac{2}{7}, +\infty\right). \tag{40}$$

Imamo da je uslov (31) ispunjen u presjeku skupova (34), (36), (38) i (40), tj. za

$$m \in \left(\frac{3}{7}, +\infty\right), \tag{41}$$

dok je uslov (32) ispunjen u presjeku skupova (35), (37), (39) i (40), tj. za

$$m \in \left(-\infty, -\frac{4}{5},\right). \tag{42}$$

Na kraju zaključujemo da je konačno rješenje jednako presjeku skupa (33) i unije skupova (41) i (42), pa je

$$m \in \left(\frac{3}{7}, 4\right).$$

$\diamondsuit$

Primjer 3.4 *Odrediti vrijednost realnog parametra p tako da oba realna rješenja kvadratne jednačine*

$$px^2 + (2p-1)x + 1 = 0$$

pripadaju intervalu $(-\infty, 1)$.

Rješenje: U ovom slučaju je $f(x) = px^2 + (2p-1)x + 1$. Kako je $D = 4p^2 - 8p + 1$, to je uslov (4) ispunjen za

$$p \in \left(-\infty, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right). \tag{43}$$

Mora biti ispunjen uslov (4), te jedan od uslova (10) ili (11). Iz činjenice da je

$$a = p, \qquad f(1) = 3p, \qquad -\frac{b}{2a} = \frac{1-2p}{2p},$$

dobijamo da je uslov (10) ispunjen u skupu

$$p \in (0, +\infty) \cap (0, +\infty) \cap \left((-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)\right) = \left(\frac{1}{4}, +\infty\right), \tag{44}$$

dok je uslov (11) ispunjen u skupu

$$p \in (-\infty, 0) \cap (-\infty, 0) \cap \left((-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)\right) = (-\infty, 0). \tag{45}$$

Konačno rješenje je skup koji je jednak skupu (43) $\cap$ ((44) $\cup$ (45)), tj.

$$p \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right).$$

$\diamondsuit$

Primjer 3.5 *Odrediti vrijednost realnog parametra m tako da obje realne nultačke kvadratne funkcije*

$$f(x) = (m-1)x^2 - 2(m+2)x + m$$

budu pozitivne.

Rješenje: Da su obje nultačke pozitivne znači da obje nultačke pripadaju skupu $(0, +\infty)$, pa imamo da mora biti ispunjen uslov (4), te jedan od uslova (12) ili (13). Kako je $D = 20m + 16$, to je uslov (4) ispunjen za

$$m \in \left(-\frac{4}{5}, +\infty\right). \tag{46}$$

Kako je

$$a = m - 1, \qquad f(0) = m, \qquad -\frac{b}{2a} = \frac{m+2}{m-1},$$

to imamo da je uslov (12) ispunjen za

$$m \in (1, +\infty) \cap (0, +\infty) \cap ((-\infty, -2) \cup (1, +\infty)) = (1, +\infty), \tag{47}$$

dok je uslov (13) ispunjen za

$$m \in (-\infty, 1) \cap (-\infty, 0) \cap ((-\infty, -2) \cup (1, +\infty)) = (-\infty, -2). \tag{48}$$

Konačno rješenje je skup koji je jednak skupu $(46) \cap ((47) \cup (48))$, tj.

$$m \in (1, +\infty).$$

$\diamondsuit$

Primjer 3.6 *Odrediti vrijednost realnog parametra k tako da jedna realna nultačke kvadratne funkcije*

$$f(x) = (k-1)x^2 - 2(k+1)x + k - 3$$

bude manja od -1*, a da druga bude veća od* 3.

Rješenje: Imamo da je $D = 24k - 8$, pa je uslov (4) ispunjen za

$$k \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right). \tag{49}$$

Kako je

$$a = k - 1, \qquad f(-1) = 4k - 2, \qquad f(3) = 4k - 18,$$

to je uslov (14) ispunjen za

$$k \in (1, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cap \left(-\infty, \frac{9}{2}\right) = \emptyset, \tag{50}$$

dok je uslov (15) ispunjen za

$$k \in (-\infty, 1) \cap \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \cap \left(\frac{9}{2}, +\infty\right) = \emptyset. \tag{51}$$

Konačno rješenje je skup koji je jednak skupu (49) $\cap$ ((50) $\cup$ (51)), tj.

$$k \in \emptyset.$$

Zaključujemo da ne postoji realan broj k za koji je jedna realna nultačke kvadratne funkcije $f(x) = (k-1)x^2 - 2(k+1)x + k - 3$ manja od -1, a druga veća od 3.

◊

Literatura

[1] B. Ibrahimpašić: *Elementarna matematika*, Pedagoški fakultet, Bihać, 2014.

[2] B. Ibrahimpašić: *Predavanja iz predmeta Elementarna matematika*, Pedagoški fakultet, Bihać, 2014.

[3] Đ. Vukomanović i dr.: *Zbirka zadataka i testova iz matematike za pripremanje prijemnog ispita za upis na tehničke i prirodno – matematičke fakultete*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1994.