MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XX(3)(2014), 161--167 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

DEVET NAČINA ZA RJEŠAVANJE JEDNOG ZADATKA O TROUGLU

(Nine ways to solve a problem on the triangle)

Bratislav Sredojević[1] i Dragoljub Milošević[2]

Sažetak. U ovom radu je dato devet raznih rješenja jednog zadatka iz geometrije koji se odnosi na jednakokraki trougao.

Ključne riječi: jednakokraki trougao, slični trouglovi, Pitagorina i Stjuartova teorema, sinusna i kosinusna teorema, adicione formule za sinus.

Abstract. In this paper we give nine different ways of one geometrical problem for the isosceles triangle.

Key words: isosceles triangle, similar triangles, Pythagorean and Stewart' s theorem, sine and cosine law, addition formulas for sine.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

Ljepota matematike, između ostalog, ogleda se u različitim putevima za rješavanje zadataka. Ako znamo više različitih metoda, dati zadatak možemo "napasti" sa raznih strana- pozicija, te su nam stoga veće šanse da ga savladamo. Rješavanje nekog zadatka na više načina veoma lijepo ilustruje bogatstvo ideja, dosetki, inventivnosti i dosta doprinosi razvoju kvalitetnog razmišljanja i matematičke intuicije. Ovaj članak smatramo poučnim i korisnim za mlade matematičare- srednjoškolce i nastavnike koji rade sa nadarenim učenicima.

Prikazat ćemo 9 različitih načina za rješavanje jednog zadatka koji se odnosi na jednakokraki trougao. U ovim načinima korišteno je mnoštvo činjenica iz geometrije trougla, trigonometrije, itd. Riječ je o sljedećem zadatku:

Neka je $AB = a$ dužina osnovice (baze) i $BC = b$ dužina kraka jednakokrakog trougla ABC čiji je ugao pri vrhu C jednak 20°. Dokazati da važi jednakost:

$$a^3 + b^3 = 3ab^2 \qquad (*)$$

[1] Popovića put 19, 32300 Gornji Milanovac, Srbija
[2] 17.NOU divizije 43, 32300 Gornji Milanovac, Srbija

Rješenje 1. Neka je trougao ΔABE jednakostraničan, $AF = AC, CD = h$ i $CH = h_1$ pri čemu su h i h_1 visine trougla ABC i ACF redom (sl. 1). Ako površinu trougla ΔABC izrazimo na dva načina, dobijamo da je $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bh_1$, odakle je $h_1 = \frac{ah}{b}$. Pravougli trougao ΔHCE ima ugao od $30^0 (\angle CEH)$ pa je $CE = 2CH = 2h_1 = \frac{2ah}{b}$ i $\frac{1}{2}a\sqrt{3} = DE = CD - CE = h - \frac{2ah}{b}$, tj.

$$\frac{1}{2}a\sqrt{3} = h(1 - \frac{2a}{b}). \tag{1}$$

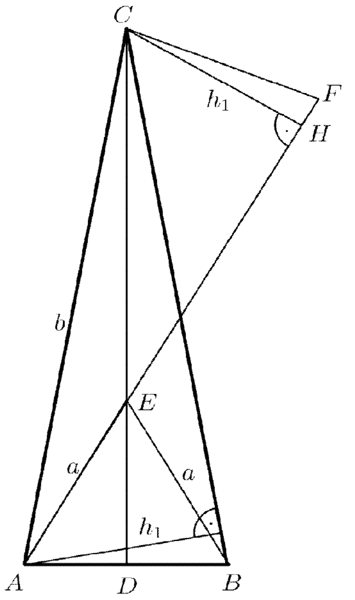
Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ΔACD imamo $h^2 = b^2 - (\frac{a}{2})^2$, pa kvadriranjem jednakosti (1) dobijamo

$$\frac{3}{4}a^2 = (b^2 - \frac{a^2}{4})(1 - \frac{2a}{b})^2 . \tag{2}$$

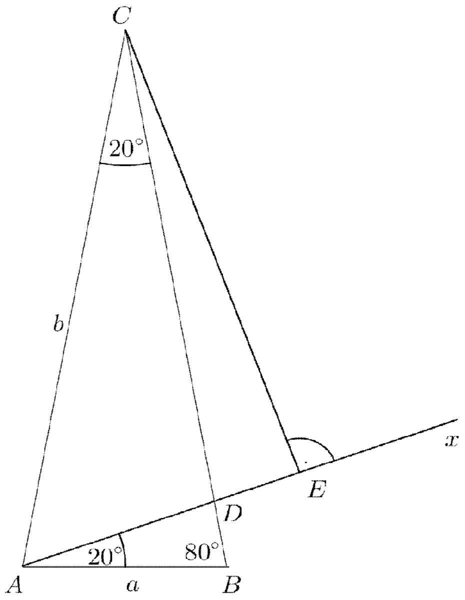
Ako u (2) stavimo $a = k \cdot b$, imamo

$$k^4 - k^3 - 3k^2 + 4k - 1 = (k-1)(k^3 - 3k + 1) = 0,$$

a ova jednakost je, zbog $k \neq 1$, ekvivalentna sa $k^3 - 3k + 1 = 0$. Posljednja jednakost je ekvivalentna dalje sa $a^3 + b^3 = 3ab^2$ jer je $k = \frac{a}{b}$.



Slika 1



Slika 2

Rješenje 2. Konstruišimo polupravu Ax tako da je $\angle xAa = 20^\circ$ i na njoj odaberimo tačke D i E tako da $D \in BC$ i $CE \perp AE$ (sl. 2). Trouglovi ΔABC i ΔBAD su slični, pa je $BD : a = a : b$ tj. $BD = \frac{a^2}{b}$, što znači da je

$$CD = b - \frac{a^2}{b}. \tag{3}$$

S obzirom da je $\angle CAE = 60^\circ$, u pravouglom trouglu ΔACE je $AE = \frac{1}{2}b$ i $CE = \frac{1}{2}b\sqrt{3}$ (prema Pitagorinoj teoremi). Iz pravouglog trougla ΔCDE, zbog $CE = \frac{1}{2}b\sqrt{3}$ i $DE = \frac{1}{2}b - a$, dobijamo

$$CD^2 = (\frac{b}{2} - a)^2 + \frac{3}{4}b^2. \tag{4}$$

Na osnovu jednakosti (3) i (4) dobijamo traženu relaciju (*).

Rješenje 3. Na kraku BC odredimo tačku D tako da je $\angle CAD = \angle ACB = 20^\circ$. (sl. 3). Trougao ΔADC je jednakokraki, pa je $AD = CD = x$. Zbog toga je $BD = b - x$. Primjenom **Stjuartove** teoreme[3] na trougao ΔABC imamo:

$$\begin{aligned} & BC \cdot (BD \cdot DC + AD^2) = AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD \\ & \Rightarrow b(x(b-x) + x^2) = a^2 x + b^2(b-x) \\ & \Rightarrow b^2 x = a^2 x + b^3 - b^2 x \\ & \Rightarrow x(2b^2 - a^2) = b^3, \end{aligned}$$

tj.

$$x = \frac{b^3}{2b^2 - a^2}. \tag{5}$$

Koristit ćemo kosinusnu teoremu i primjenit ćemo je na trougao ΔABD :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD) \quad \text{ili}$$

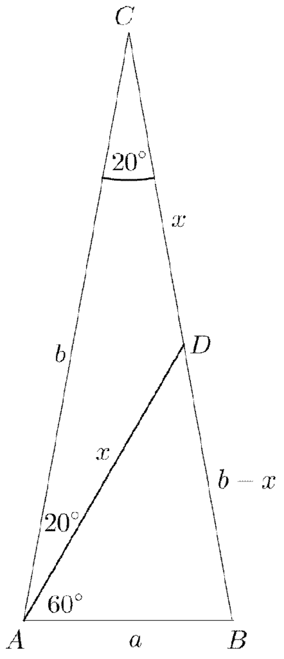
$$(b-x)^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos 60^\circ, \text{ tj.}$$

$$x = \frac{b^2 - a^2}{2b - a}. \tag{6}$$

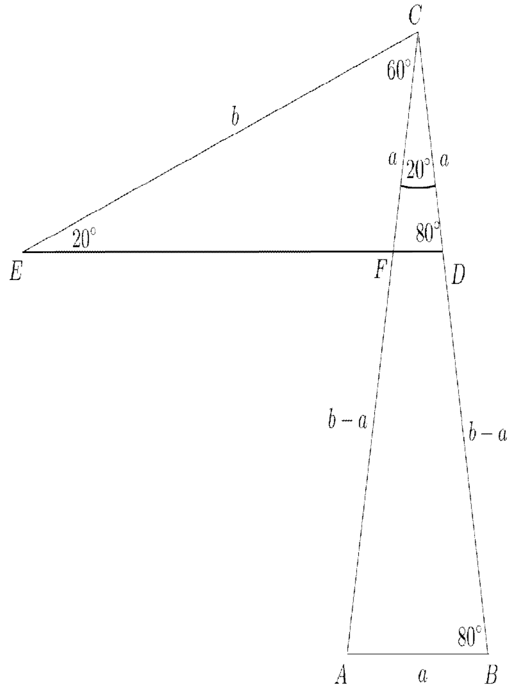
[3] Matthew Stewart (1717-1785), škotski matematičar

Iz jednakosti (5) i (6) slijedi

$$\frac{b^3}{2b^2-a^2}=\frac{b^2-a^2}{2b-a}$$
$$\Leftrightarrow a^4-3a^2b^2+ab^3=0\,/:a\neq 0$$
$$\Leftrightarrow a^3+b^3=3ab^2, q.e.d.$$



Slika 3



Slika 4

Rješenje 4. Na kraku BC odredimo tačku D tako da je $CD = a$, a potom konstruišemo trougao ΔDCE podudaran sa ΔABC (sl. 4). Tada je $PD \parallel AB$ i $\Delta ABC \sim \Delta CDP$. Iz te sličnosti slijedi $PD : AB = CD : BC$ ili $PD : a = a : b$, tj. $PD = \frac{a^2}{b}$, pa je $EP = b - \frac{a^2}{b}$.

Na osnovu kosinusne teoreme primijenjene na trougao ΔCEP je

$EP^2 = CP^2 + CE^2 - 2CP \cdot CE \cdot \cos 60^\circ$ ili $(b-\frac{a^2}{b})^2 = a^2+b^2-ab$. Nakon sređivanja posljednje jednakosti dobijamo traženu jednakost (*).

Rješenje 5. Na osnovu kosinusne teoreme primijenjene na trougao ΔACE (sl. 1) imamo

$$b^2 = a^2 + x^2 + ax\sqrt{3}, \tag{7}$$

jer je $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Produžimo stranicu AE sa $AG = b$ (tačka A je između tačaka G i E). Trouglovi ΔACE i ΔCGE su slični (sl. 5), pa je $(a+b) : x = x : a$, tj.

$$x^2 = a(a+b). \tag{8}$$

Smjenom (8) i (7) dobijamo

$$x = \frac{1}{a\sqrt{3}}(a+b)(b-2a), \tag{9}$$

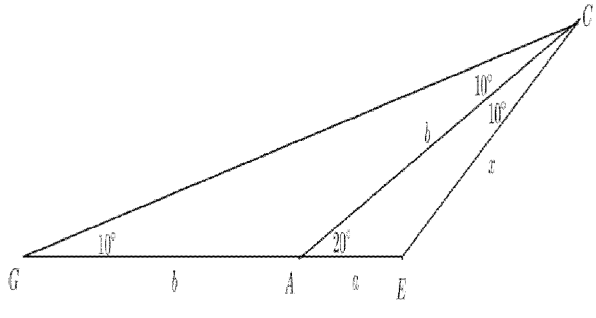
a odavde, nakon kvadriranja i

$$x^2 = \frac{1}{3a^2}(a+b)^2(b-2a)^2. \tag{10}$$

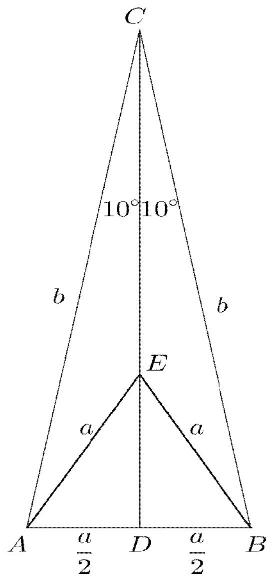
Iz jednakosti (8) i (10) slijedi

$$a = \frac{1}{3a^2}(a+b)(b-2a)^2,$$

što je ekvivalentno traženoj jednakosti (*).



Slika 5



Slika 6

Rješenje 6. Na visini CD trougla ΔABC odredimo tačku E tako da je $AE = a$ (sl. 6) . Trougao ΔABC je očigledno sastavljen od jednog jednakostraničnog trougla ΔABE i dva podudarna trougla ΔACE i ΔBCE, pa je

$P_{ABC} = P_{ABE} + 2P_{ACE}$, tj. $\frac{1}{2}b^2 \sin 20^\circ = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} + ab\sin 20^\circ$, odnosno

$$\sin 20^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2b(b-2a)}. \tag{11}$$

Primjenom kosinusne teoreme na trougao ΔABC imamo

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos 20^\circ,$$

odnosno

$$\cos 20^\circ = 1 - \frac{a^2}{2b^2},$$

odakle, nakon kvadriranja i primjene osnovne trigonometrijske identičnosti,

dobijamo $\sin^2 20^\circ = 1 - (1 - \frac{a^2}{2b^2})^2$, odnosno

$$\sin^2 20^\circ = \frac{a^2}{4b^4}(4b^2 - a^2). \tag{12}$$

Iz jednakosti (11) i (12) slijedi $3a^2b^2 = (4b^2 - a^2)(b-2a)^2$, tj.

$a^4 - b^4 - a^3b + 4ab^3 - 3a^2b^2 = 0$, a otuda, zbog $a \neq b$ i $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Rješenje 7. Na osnovu kosinusne teoreme primijenjene na trougao ΔACD (sl. 2) je

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos 60^\circ,$$

što je zbog (3), ekvivalentno sa

$$(b - \frac{a^2}{b})^2 = b^2 + a^2 - ab,$$

a odavde dobijamo i jednakost $a^3 + b^3 = 3ab^2$, tj. (*).

Rješenje 8. Kako je $a = 2b\sin 10^\circ$ i

$$a^2 = 4b^2 \sin^2 10^\circ = 4b^2 \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 20^\circ)$$

$$= 2b^2(1 - \cos 20^\circ),$$

to množenjem ovih dviju jednakosti dobijamo

$$a^3 = 4b^3(\sin 10^\circ - \sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ).$$

Zbog

$$\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ = \frac{1}{2}(\sin(20^\circ + 10^\circ) - \sin(20^\circ - 10^\circ)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 30^\circ - \sin 10^\circ) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 10^\circ,$$

prethodna jednakost postaje $a^3 = 2b^3(3\sin 10^\circ - \frac{1}{2})$,a odavde imamo

$a^3 + b^3 = 6b^3 \sin 10^\circ = 3 \cdot (2b\sin 10^\circ) \cdot b^2$, tj. $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Rješenje 9. S obzirom da važi $a = 2b\sin 10^\circ$, to je tražena jednakost (*) ekvivalentna sa $1 + 8\sin^3 10^\circ = 6\sin 10^\circ$, odnosno sa

$$\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ.$$

Posljednja jednakost je tačna, jer je poseban slučaj opšte i poznate trigonometrijske formule $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t, t \in R$.

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić i D. Milošević**,** *Različite metode dokazivanja jedne teoreme u geometriji*, MAT-KOL (Banja Luka), XVII(1)(2011), 13-24.
[2] D. Milošević, *Razni dokazi jedne teoreme*, Prosvetni pregled (rubrika Pedagoška praksa, XVII-420), decembar 1999.
[3] M. Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

Pristiglo u Redakciju 25.09.2013; Revidirana verzija 08.10.2013.
Dostupno online 14.10.2013.