MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), ISSN 1986-5228 (o)
Vol. XX(3)(2014), 153-159
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

Korigovana Šapiroova nejednakost

(Corrected Shapiro Inequality)

Nenad O. Vesić[1]

Sažetak: Ovaj članak se bavi popravljanjem Šapiroove nejednakosti koja nije tačna za proizvoljnih n pozitivnih brojeva. Nakon teoreme koja popravlja pomenuti nedostatak Šapiroove nejednakosti dokazano je još nekoliko zanimljivih činjenica koje su posledice te teoreme.

Ključne reči i fraze: jednakost, nejednakost, pozitivan realan broj

Abstract. Correctness of Shapiro's inequality is presented in this paper. Some interesting properties based on corrected Shapiro's inequality are proved also.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 26E60, 26D15

ZDM Subject Classification (2010): F50, H30

Key words and phrases: equality, inequality, positive real number

1 Uvod

U praksi najčešće korišćene nejednakosti među pozitivnim realnim brojevima $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jesu nejednakosti između harmonijske, geometrijske, aritmetičke i kvadratne sredine zadate sa

$$\begin{aligned}(1)\qquad \overbrace{\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}}^{\mathcal{H}(x_1,x_2,\ldots,x_n)} &\leq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\\ \leq \underbrace{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}_{\mathcal{A}(x_1,x_2,\ldots,x_n)} &\leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}\end{aligned}$$

Odgovarajuće jednakosti važe ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Nejednakosti (1) su detaljnije ispitane i proširene u [1].

[1] Prirodno-matematički fakultet Niš i projekat 174012 Ministarstva nauke u Vladi Republike Srbije, 18000 Niš, Višegradska 33. Srbija, e-mail: vesic.specijalac@gmail.com

1.1 O Nesbitovoj nejednakosti

Nesbitova nejednakost [2] utvrđuje odnos među pozitivnim realnim brojevima a, b i c jednačinom

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \tag{2}$$

Postoji oko dvadesetak različitih dokaza nejednakosti (2).

1.2 O Šapiroovoj nejednakosti

Opštija verzija Nesbitove nejednakosti je Šapiroova nejednakost [3], koja pokazuje odnos između pozitivnih realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zadata sa

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}. \tag{3}$$

Šapiro je imao dokaz da ta nejednakost važi za $n = 4$ pa je, u časopisu *American Mathematical Monthly* 1956. godine, postavio zadatak da se dokaže ta nejednakost za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.

Dve godine nakon toga, u istom časopisu u članku [4], dat je kontraprimer u kome je pokazano da ta nejednakost nije zadovoljena za proizvoljnih 20 pozitivnih realnih brojeva.

Remark 1.1 *U Nesbitovoj i Šapiroovoj nejednakosti pretpostavljeno da je važi $n + k = k$, za $k = 1, 2$.*

1.3 Motivacija

U ovom članku je prikazana generalizacija Šapiroove nejednakosti koja će važiti za proizvoljnih n pozitivnih realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, n$ gde je n proizvoljan prirodan broj. Pored toga, dato je nekoliko primera kada u korigovanoj Šapiroovoj nejednakosti važi jednakost. Detaljniji rad o korigovanoj Šapiroovoj nejednakosti, u kome je prikazano kada važi jednakost u korigovanoj Šapiroovoj nejednakosti, biće upućen na recenziju u naučni časopis.

2 Korekcija i uopštenje Šapiroove nejednakosti

Neka je, za pozitivne realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$, skup

$$
\begin{aligned}
&(4) & S_k^l &= \{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l-1}\}; \\
&(5) & m_k &= Min(S_k); \\
&(6) & M_k &= Max(S_k); \\
&(7) & m &= Min\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}; \\
&(8) & M &= Max\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}.
\end{aligned}
$$

Nije teško dokazati da je

$$
\begin{aligned}
&(9) & m &= Min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}; \\
&(10) & M &= Max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.
\end{aligned}
$$

Primera radi, ukoliko je

$$m^0 \quad = \quad Min\{x_1, \ldots, x_n\}$$

to je m^0 element bar jednog od skupova S_k^l. Samim tim, broj m^0 učestvuje u izračunavanju broja m odakle sledi da je

$$m = m^0.$$

Analogno se pokazuje i drugi slučaj.

Dokažimo narednu teoremu.

Teorema 2.1 *Neka su r i l proizvoljni prirodni brojevi. Pozitivni realni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zadovoljavaju nejednakost*

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=0}^{r-1} x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+r+j}} \quad \geq \quad \frac{r}{l} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M_{r+i}} \quad \geq \quad n \frac{r}{l} \frac{m}{M},$$

gde je $x_{kn+d} = x_d, m_{kn+d} = m_d, M_{kn+d} = M_d$, za $1 \leq d \leq n$.

Dokaz. Uočimo najpre da elementi x_i skupova S_k^r i S_{k+r}^l sa odgovarajućim minimumom m_k i maksimumom M_{k+r} zadovoljavaju nejednakost

$$\frac{x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{k+r-1}}{x_{k+r} + x_{k+r+1} + \ldots + x_{k+r+l-1}} \quad \geq \quad \frac{r}{l} \cdot \frac{m_k}{M_{k+r}}.$$

Zaista, s obzirom na to kako su m_k i M_{k+r} definisani (vidi (4, 5)), to je

$$
\begin{aligned}
\frac{x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{k+r-1}}{x_{k+r} + x_{k+r+1} + \ldots + x_{k+r+l-1}} \quad &\geq \quad \frac{\overbrace{m_k + m_k + \ldots + m_k}^{r}}{\underbrace{M_{k+r} + M_{k+r} + \ldots + M_{k+r}}_{l}} \\
&= \quad \frac{r}{l} \frac{m_k}{M_{k+r}}.
\end{aligned}
$$

Sada je jasno da je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=0}^{r-1} x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+r+j}} \quad \geq \quad \frac{r}{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M_{r+i}}$$

S obzirom na definiciju m i M jasno sledi da je

$$\frac{m_i}{M_{r+i}} \geq \frac{m}{M} \tag{*}$$

a odatle je jasno da je

$$\frac{r}{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M_{r+i}} \quad \geq \quad n \frac{r}{l} \frac{m}{M},$$

čime je ova teorema dokazana. □

Ispitajmo neke specijalne slučajeve kada će važiti jednakosti u nejednakostima (11).

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & x_2 & = & \dots & = & x_r & = & m \\ x_2 & = & x_3 & = & \dots & = & x_{r+1} & = & m \\ & & & & \ddots & & & & \\ x_n & = & x_1 & = & \dots & = & x_{r-1} & = & m \end{array} \tag{12}$$

Iz (12) jasno sledi da, ukoliko je $r \geq 2$, onda je

$$x_1 \quad = \quad x_2 \quad = \quad \dots \quad = \quad x_n. \tag{13}$$

Iz prethodnog sledi da je

$$\begin{array}{ccccccccccc} m_1 & = & m_2 & = & \dots & = & m_n & = & m & = & x_1 \\ M_1 & = & M_2 & = & \dots & = & M_n & = & M & = & x_1 \end{array} \tag{14}$$

pa je

$$m_k = m = M_k = M = x_1. \tag{15}$$

Ovim je dokazana naredna lema.

Lema 2.1 *Neka je r prirodan broj veći od 1. Pozitivni realni brojevi $x_1, x_2, \dots, x_n$ zadovoljavaju jednakost*

$$\frac{r}{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M_{r+i}} \quad = \quad n \frac{r}{l} \frac{m}{M} \tag{16}$$

ako je

$$x_1 \quad = \quad x_2 \quad = \quad \dots \quad = \quad x_n. \quad \diamond$$

Posledica 2.1 *U prethodno analiziranom slučaju važiće jednakost i u prvoj od nejednakosti (11) i to*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=0}^{r-1} x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+r+j}} = \frac{r}{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M_{r+i}} = n \frac{r}{l} \frac{m}{M} = n \frac{r}{l} \tag{17}$$

Razmotrimo slučaj kada je $l = s \cdot n, s \in \mathbb{N}$. U tom slučaju suma u imeniocima svakog sabirka jednaka je $s(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ pa je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=0}^{r-1} x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+r+j}} = \frac{r(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{s(x_1+x_2+\ldots+x_n)} = \frac{r}{s}. \tag{18}$$

U narednoj lemi ispitan je slučaj kada je $r = s \cdot n, s \in \mathbb{N}$.

Lema 2.2 *Ukoliko je $r = s \cdot n, s \in \mathbb{N}$ i $l = 1$ onda pozitivni realni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zadovoljavaju nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=0}^{r-1} x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+r+j}} \geq sn^2, \tag{19}$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Dokaz. Brojilac svakog od sabiraka u sumi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=0}^{r-1} x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+r+j}}$$

jednak je $s(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Odavde je jasno da je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=0}^{r-1} x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+r+j}} &= s(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+j}} \\
&= s \cdot n \cdot \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \right) \\
&= s \cdot n \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot n \frac{1}{\mathcal{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n).}
\end{aligned}$$

S obzirom na to da je

$$\mathcal{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

to je

$$\frac{\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathcal{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \geq 1,$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Iz prethodnih nejednakosti jasno sledi da je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=0}^{r-1} x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+r+j}} \geq sn^2,$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, čime je ova lema dokazana. $\diamond$

Treba još odozgo ograničiti vrednost

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=0}^{r-1} x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+r+j}}. \tag{20}$$

Analogno dokazu Teoreme 2.1, vrlo jednostavno se dokazuje sledeća teorema.

Teorema 2.2 *Neka su r i l prirodni i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Važe nejednakosti*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=0}^{r-1} x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+r+j}} \leq \frac{r}{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{m_{r+i}} \leq n\frac{r}{l}\frac{M}{m}. \tag{21}$$

Leme i posledice analogne prethodno dokazanim lemama i posledicama vrlo je jednostavno moguće dokazati, što autor ostavlja čitaocu kao zadatak. Kao završno tvrđenje predstavimo narednu teoremu.

Teorema 2.3 *Neka su r i l proizvoljni prirodni a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ proizvoljni pozitivni realni brojevi. Važe nejednakosti*

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{r}{l} \cdot \frac{m}{M} &\leq \frac{r}{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M_{r+i}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=0}^{r-1} x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1} x_{i+r+j}} \\ \leq \frac{r}{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{m_{r+i}} &\leq n \cdot \frac{r}{l} \cdot \frac{M}{m}. \quad \square \end{aligned} \tag{22}$$

3 Zaključak

U ovom radu predstavljena je ispravka i generalizacija Šapiroove nejednakosti. Nesbitova nejednakost, koja je samo specijalan slučaj ove nejednakosti, je takođe uopštena na n pozitivnih realnih brojeva.

U Teoremi 2.1 je prikazana korigovana verzija Šapiroove nejednakosti. Nakon te teoreme dokazane su dve leme koje daju posebne rezultate u specijalnim slučajevima.

Teorema 2.2 predstavlja dalju generalizaciju korigovane Šapiroove nejednakosti. Poseban dokaz te teoreme kao i odgovarajućih lema analognim Lemama

2.1 i 2.2 nisu dokazivane. To je zadatak ostavljen čitaocu da posmatrajući princip dokazivanja Teoreme 2.1 i Lema 2.1 i 2.2 sam dokaže odgovarajuće analogne leme.

Teorema 2.3, koja je direktna posledica Teorema 2.1 i 2.2, daje dva ograničenja vrednosti $\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{k=0}^{r-1}x_{i+k}}{\sum_{j=0}^{l-1}x_{i+r+j}}$. Ta ograničenja mogu biti od koristi u rešavanju praktičnih problema.

I konačno, korigovana Šapiroova nejednakost $(r=1, l=2)$ glasi

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}\frac{m}{M}, \tag{23}$$

gde je $x_i > 0, m = Min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $M = Max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Acknowledgement

This paper is financially supported by project 174012 of Serbian Ministry of Science.

Author wishes to thank editor Šefket Arslanagić for useful advices about correction of print errors in this paper and further research in this subject.

Literatura

[1] D. J. Simjanović, N. O. Vesić, *Uopštenja nekih algebarskih nejednakosti*, MAT-KOL XIX (3)(2013), 23-29

[2] Dr. Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 5*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo 2013

[3] H. S. Shapiro, *Advanced Problem 4603*, Amer. Math. Monthly, 61(8)(1954), 571-572

[4] H. S. Shapiro, F. H. Northover, *Solution 4603*, Amer. Math. Monthly, 63(3)(1956), 191-192

[5] T. Ando, *A New Proof of Shapiro's Inequality*, Available in http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~ando/Shapiro.pdf

Peistiglo u redakciju 19.07.2013; Dostupno online 01.10.2013.