MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XX(3)(2014), 145--151 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

PRILOG O PROŠIRIVANJU I UOPŠTAVANJU ZADATAKA IZ GEOMETRIJE TROUGLA

(Some attachment on the expansion and generalization problems to the triangle geometry)

Milorad Beljić[1]

Sažetak. U ovom članku date su neke geometrijske nejednakosti koje se nadovezuju na zadatke iz redovne nastave matematike u srednjoj školi.

Ključne riječi i izrazi: trougao, aritmetička, geometrijska i kvadratna sredina, geometrijske nejednakosti.

Abstract. In this article are presented some geometric inequalities that relate to the problems of regular teaching mathematics in high school.

Key words and phrases: triangle, arithmetic mean, geometric mean, squared mean, geometric inequalities.

AMS Subject Classification (2010): **51M04, 97G40**
ZDM Subject Classification (2010): **G40**

Oduvjek je geometrija zaokupljala pažnju mnogih matematičara, nadahnjivala brojne generacije od drevnih vremena do današnjih dana, da bi tako nastala današnja moderna geometrija.

Programski zahtjevi u redovnoj srednjoškolskoj nastavi geometrije ne poklanjaju dovoljno pažnje geometrijskim nejednakostima. Ta pitanja su pokrivena sa sljedeće tri teoreme:

1. Spoljašnji ugao trougla veći je od bilo kog nesusjednog unutrašnjeg ugla;

2. Stranica a trougla $\triangle ABC$ veća je od stranice b ako i samo ako je naspramni ugao α veći od ugla β;

3. U svakom trouglu zbir dvije stranice je veći od treće, a razlika dvije stranice manja je od treće stranice (nejednakost trougla).

[1] Vlade Jovanovića 32, 15000 Šabac, Srbija.

Zbog svog značaja i ozbiljnosti ova tema više se razrađuje na časovima dodatne nastave, pripremama za takmičenja, i dr.

U ovom članku[2] bit će riječi o nekim geometrijskim nejednakostima koje se prirodno nadovezuju na zadatke iz redovnog školskog programa i skupa čine jednu interesantnu cjelinu, te daje primjer kako se može raditi i sa drugim temama.

Ovakav način rada i usmjeravanja naprednijih učenika preko redovne nastave u *produbljivanje, proširivanje, povezivanje i generalizaciju postojećih problema,* gdje god je to prirodno moguće i gdje ima smisla, od posebnog je značaja za rad sa nadarenim učenicima kroz vannastavne aktivnosti kao prirodnog pratioca redovne nastave. Na taj način mladim matematičarima, preko tako osmišljenih mini istraživanja, se otvara novi put u nepoznato i nagoveštava da istraživanje u nauci nije završeno. Takav oblik rada može povećati interesovanje za bavljenje matematikom i uputiti ih u ozbiljiji naučni rad, uz jednu opreznost. Naime, na početku rada sa njima ne smiju se zadavati preteški zadaci, nego nivo opterećenosti i povećavanje zahtjeva treba da ide postepeno, jer bi u suprotnom došlo do gubljenja samopouzdanja i demoralisanja.

Pravilno vođenje dodatne nastave, priprema za takmičenja i drugi vidovi rada kod mladih matematičara pokreće logično mišljenje, maštu i intuiciju što sve skupa izaziva „rođenje“ ideja i povećava interesovanje za matematiku, a u širem smislu za nauku uopšte. Kod poširivanja, povezivanja, produbljivanja i uopštavanja geometrijskih zadataka, koriste se:

a. metode logičkog zaključivanja (*dedukcija, indukcija i indirektno zaključivanje);*

b. misaoni postupci i metode naučnog istraživanja (*analiza, sinteza, analogija, konkretizacija i specijalizacija, apstrakcija i generalizacija*).

U postupku rješavanja zadataka[3] često se dodaju dopunski uvjeti datog zadatka, ispituju se granični uvjeti, mijenja se dimenzija sistema u kome se radi i sl.

Ovaj članak ima za cilj da pokaže neke *performanse* zadataka na primjeru trougla. Naime, na školskom času, kao vremenskom resursu, treba postići maksimum iskorištenosti a minimum gubitka vremena.

Obrada nastavnog materijala je predviđena nastavnim planom i programom. Međutim, na nastavnom času pri rješavanju nekog problema mogu se učenici usmjeriti, uz dodatno variranje uvjeta, u daljnje istraživanje šireg problema nego što je rješavan na času redovne nastave. Tako od zadatka do zadatka učenici se neosjetno uvode u mini istraživanje, stalno postavljajući pitanje: - Šta bi bilo kad bi bilo?

S druge strane takav pristup nastavi da se uobičajenim zadacima dodaju novi uvjeti je od izuzetne važnosti, jer se tako dobijaju zadaci značajniji od prvobitnih. Neretko, taj prvobitni zadatak se shvati kao specijalni slučaj nekog opštijeg

[2] Isti je namijenjen za rad sa srednjoškolcima koji pokazuju povećano interesovanje za matematiku.

[3] Od izuzetne važnosti je traženje *više rješenja nekog zadatka*. Tako se odbacivanjem tradicionalnih shvatanja dolazilo do novih, senzacionalnih naučnih otkrića. U istoriji matematike poznata su takva otkrića poput geometrije Lobačevskog i Boljaja, Kopernikovog heliocentričnog sistema, Lukašjevičeve višeznačne logike, Ajnštajnove teorije relativiteta i sve u duhu poznate misli „Sve stvari imaju granice sem stvaralaštva“.

problema. Svakako da se ti „inovirani“ zadaci rješavaju u dodatnoj nastavi, matematičkim klubovima, pripremama za takmičenja i sl. U tom smislu su upriličena sljedeća rasuđivanja.

Primjer. Neka su A_1, B_1, C_1 tačke dodira stranica *a*, *b*, *c* respektivno, sa kružnicom upisanom u trougao $\triangle ABC$, *R* i *r* poluprečnici opisane i upisane kružnice a *s* poluobim tog trougla.

a) Izraziti stranice trougla $\triangle A_1B_1C_1$ u funkciji stranica *a*, *b*, *c* trougla $\triangle ABC$.

b) Dokazati jednakost

$$\frac{1}{A_1B_1}+\frac{1}{B_1C_1}+\frac{1}{C_1A_1}=\frac{\sqrt{R}}{r\sqrt{s}}\left(\sqrt{\frac{r_a}{a}}+\sqrt{\frac{r_b}{b}}+\sqrt{\frac{r_c}{c}}\right) \tag{1}$$

gdje su r_a, r_b, r_c poluprečnici pripisanih kružnica trouglu $\triangle ABC$.

c) Dokazati nejednakosti

$$6r\sqrt[3]{\frac{s}{4r}}\leq A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1\leq s\sqrt{\frac{2r}{R}} \tag{2}$$

$$A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1\leq r^2s \tag{3}$$

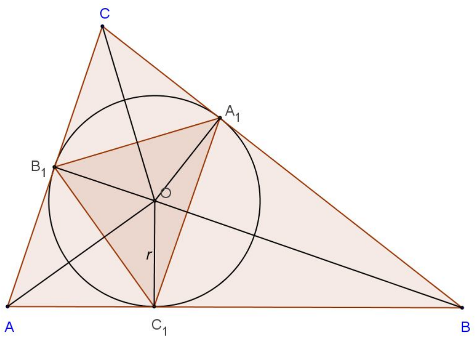
i

$$\frac{1}{A_1B_1}+\frac{1}{B_1C_1}+\frac{1}{C_1A_1}\leq\frac{3}{r}\sqrt{\frac{R}{2s}}. \tag{4}$$

Rješenje:

a) Neka je tačka O centar upisane kružnice u trougao $\triangle ABC$ (slika 1). Površina trougla $\triangle AB_1O$ ($\sphericalangle AB_1O=90^\circ$) je jednaka

$P_{\triangle AB_1O}=\frac{1}{2}AB_1\cdot OB_1=\frac{1}{2}AO\cdot\frac{B_1C_1}{2}$, a odavde je



Slika 1

$$B_1C_1=\frac{2AB_1\cdot OB_1}{AO}. \tag{5}$$

Analogno dobijamo

$$A_1B_1=\frac{2CA_1\cdot OA_1}{CO}$$
$$C_1A_1=\frac{2BC_1\cdot OB_1}{BO} \tag{6}$$

S druge strane, imamo

$$OA_1 = OB_1 = OC_1 = r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \qquad (7)$$

kao i

$$AB_1 = AC_1 = s-a,\ BC_1 = BA_1 = s-b,\ CA_1 = CB_1 = s-c \qquad (8)$$

Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $\triangle AOB_1$ dobijamo

$$AO = \sqrt{AB_1^2 + OB_1^2} = \sqrt{(s-a)^2 + \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}}. \qquad (9)$$

Na sličan način, imamo

$$BO = \sqrt{\frac{ac(s-b)}{s}},\ CO = \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}}. \qquad (10)$$

Iz jednakosti (5) - (10) slijedi

$$B_1C_1 = 2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$A_1B_1 = 2(s-c)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \qquad (11)$$

$$C_1A_1 = 2(s-b)\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

b) Korištenjem obrazaca (formula) za površinu trougla

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{(Heronov obrazac)},$$

$$P = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c),$$

$$P = rs \ \text{ i } \ P = \frac{abc}{4R}$$

jednakosti (11) mogu se izraziti na sljedeći način:

$$B_1C_1 = 2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = 2\sqrt{s-a}\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{sbc}} = \frac{2P\sqrt{s-a}}{\sqrt{sbc}}$$

$$= \frac{2P\sqrt{P}}{\sqrt{sbc}} \cdot \sqrt{\frac{s-a}{P}} = \frac{2P\sqrt{P}}{\sqrt{sbc}} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_a}} = \frac{2P\sqrt{r}}{\sqrt{abc}}\sqrt{\frac{a}{r_a}} = \frac{2rs}{\sqrt{4Rrs}} \cdot \sqrt{\frac{a}{r_a}} = r\sqrt{\frac{s}{R}} \cdot \sqrt{\frac{a}{r_a}},$$

$$\left.\begin{array}{l} B_1C_1 = r\sqrt{\frac{s}{R}} \cdot \sqrt{\frac{a}{r_a}}, \\ C_1A_1 = r\sqrt{\frac{s}{R}} \cdot \sqrt{\frac{b}{r_b}} \\ i \\ A_1B_1 = r\sqrt{\frac{s}{R}} \cdot \sqrt{\frac{c}{r_c}}. \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Tada iz jednakosti (11) i (12) proizlazi tražena jednakost (1).

d) Na osnovu odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine za dužine A_1B_1, B_1C_1 i C_1A_1 i jednakosti (11) dobijamo

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \geq 6\sqrt[3]{\frac{\left((s-a)(s-b)(s-c)\right)^2}{abc}}$$

$$= 6r\sqrt[3]{\frac{s}{4R}},$$

tj. lijevi dio nejednakosti (2).

Na osnovu odnosa između aritmetičke i kvadratne sredine imamo

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \leq 3\sqrt{\frac{A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2}{3}} =$$
$$3\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\left((a+b+c)^2 - 2(a^2+b^2+c^2)\right)}$$

a odavde, zbog

$$(s-a)(s-b)(s-c) = r^2 s, \ a+b+c = 2s, \ abc = 4Rrs \quad \text{i}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

slijedi[4]

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \leq 3\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{r^2 s}{4Rrs} \cdot \frac{4s^2}{3}} = s\sqrt{\frac{2r}{R}}$$

[4] $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \iff (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ $(tačno)$

što predstavlja desni dio nejednakosti (2).

Dalje, na bazi jednakosti (11) dobijamo

$$A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 = 8(s-a)(s-b)(s-c)\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{2r^3s}{R}. \qquad (13)$$

S obzirom da je

$$2r \leq R \text{ (Ojlerova nejednakost)}^5,$$

iz (13) slijedi nejednakost (3).

Konačno, na osnovu jednakosti (1) i nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo

$$\frac{1}{A_1B_1} + \frac{1}{B_1C_1} + \frac{1}{C_1A_1} \geq \frac{3\sqrt{R}}{r\sqrt{s}}\sqrt[6]{\frac{r_ar_br_c}{abc}} = \frac{3}{r}\sqrt[3]{\frac{R}{2s}},$$

jer je $r_ar_br_c = rs^2$ i $abc = 4Rrs$.

Na kraju dajemo nekoliko zadataka za vježbu.

1. Dokažite nejednakost $A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \leq \frac{9}{2}Rr$. Kada važi jednakost? (*Uputa*: Koristiti jednakost (11) i $OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2) \geq 0$, gdje je O centar upisane kružnice i H ortocentar trougla ΔABC).

2. Ako je O centar upisane kružnice i *r* njen poluprečnik, dokazati da u trouglu ΔABC važe nejednakosti:
   a) $AO + BO + CO \geq 6r$;
   b) $AO^n + BO^n + CO^n \geq 3 \cdot 2^n \cdot r^n$, $n \in \mathbb{N}$.
   (*Uputa*: a) Upotrebiti jednakosti (9) i (11), nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine i Ojlerovu nejednakost.
   b) Slično kao pod a)).

3. Dokazati nejednakost
   $\frac{1}{AO^n} + \frac{1}{BO^n} + \frac{1}{CO^n} \leq \frac{3}{(2r)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.
   (*Uputa*: Koristiti jednakosti $\frac{1}{AO} + \frac{1}{BO} + \frac{1}{CO} = \frac{1}{r}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)$ i Jensenovu nejednakost za konveksne funkcije).

---

[5] imamo: $\sqrt{a^2-(b-c)^2} \leq a$, $\sqrt{b^2-(c-a)^2} \leq b$, $\sqrt{c^2-(a-b)^2} \leq c$, tj.
$\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2} \leq abc$ <=>
<=> $8(s-a)(s-b)(s-c) \leq abc$ <=> $2r \leq R$ (zbog Heronovog obrasca i $abc = 4Rrs$).

Literatura

[1] D. S. Mitrinović i dr., *Priručnik za takmičenje srednjoškolaca, II (Geometrijske nejednakosti),* Zavod za udžbenike, Beograd, 1966.
[2] D. S. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.
[3] P. Stojaković, *Razvijanje sposobnosti učenja*, "Svjetlost" – OOUR Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Sarajevo, 1981.

Primljeno u redakciju 25.09.2013.