MAT–KOL (Banja Luka)
ISSN 0354–6969 (p), ISSN 1986–5228 (o)
Vol. XX (3)(2014), 137–144
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

RAČUNANJE VRIJEDNOSTI KOMPOZICIJE TRIGONOMETRIJSKIH I CIKLOMETRIJSKIH FUNKCIJA POMOĆU PITAGORINOG TEOREMA

Bernadin Ibrahimpašić[1], **Selma Kapić**[2]

Sažetak. Često je potrebno izračunati vrijednost izraza oblika $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\operatorname{tg}(\arcsin x)$, ... za zadanu vrijednost x. U ovom članku ćemo pokazati kako se računa vrijednost ovakvih izraza pomoću Pitagorinog teorema.

Ključne riječi i fraze: trigonometrijske funkcije, ciklometrijske funkcije, Pitagorin teorem.

Abstract. It's often required to calculate terms such: $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\operatorname{tg}(\arcsin x)$, ... for a given value of x. In this paper we'll show how to calculate these terms using Pythagorean theorem.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 33B10, 33B99

Key words and phrases: Trigonometric functions, Cyclometric Functions, Pythagorean theorem.

1 Uvod

Često je potrebno izračunati vrijednost izraza oblika $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\operatorname{tg}(\arcsin x)$, ... za zadanu vrijednost x. Svi ovi izrazi se za zadanu vrijednost x mogu izračunati pomoću digitrona. Međutim, postoji efikasan način na koji možemo izračunati vrijednost ovakvih izraza koristeći definiciju trigonometrijskih funkcija u pravouglom trouglu i Pitagorin teorem.

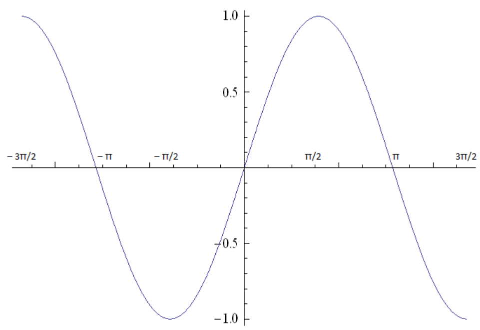
2 Ciklometrijske funkcije

Poznato nam je da su sve četiri trigonometrijske funkcije (sinus, kosinus, tangens i kotangens) periodične funkcije, pa samim tim nisu bijekcije. Međutim,

[1]Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću, Luke Marjanovića bb, 77000 Bihać, Bosna i Hercegovina, e-mail: bernadin@bih.net.ba
[2]Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću, Luke Marjanovića bb, 77000 Bihać, Bosna i Hercegovina, e-mail: selmak1@live.com

u primjenama se često javlja potreba za njihovim inverzima. Iz tog razloga se njihovi inverzi definiraju na pogodno izabranim restrikcijama koje su bijekcije. Inverzne funkcije odgovarajućih restrikcija trigonometrijskih funkcija se nazivaju arkus funkcije ili ciklometrijske funkcije.

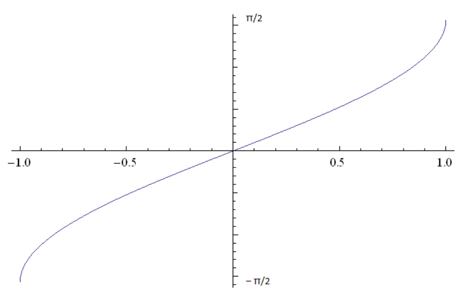
Pogledamo li funkciju sinus



Slika 1: $y = \sin x$

vidimo da je njena restrikcija na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bijekcija, pa samim tim ima i jedinstvenu inverznu funkciju koja se naziva arkus sinus.

$$\sin^{-1} x \equiv \arcsin x \colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Slika 2: $y = \arcsin x$

Analognu situaciju imamo i s ostale tri trigonometrijske funkcije, pa su inverzne funkcije njihovih odgovarajućih restrikcija sljedeće:

$$\arccos x \colon [-1, 1] \to [0, \pi],$$
$$\operatorname{arctg} x \colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\operatorname{arcctg} x \colon \mathbb{R} \to (0, \pi).$$

Pomoću ciklometrijskih funkcija određujemo vrijednost ugla iz poznate vrijednosti trigonometrijske funkcije. Pogledajmo to na dva primjera koja ćemo riješiti uz pomoć digitrona.

Primjer 2.1 *Neka je* $\sin\alpha = 0,33$*. Koliki je ugao* α*,* $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$*?*

Rješenje: Taj ugao se označava s $\alpha = \arcsin 0,33$. Ukucamo li vrijednost $0,33$ i pritisnemo li tipku SIN^{-1} (ili $ASIN$) dobijamo rješenje

$$\alpha = 0,33630\,\text{rad}.$$

Ukoliko želimo rezultat izraziti u stepenima, onda ili digitron postavimo za rad sa stepenima ili iskoristimo transformacionu formulu

$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha\,\text{rad}.$$

Na oba načina dobijamo isti rezultat i to

$$\alpha = 19,26878^\circ.$$

Još nam preostaje pretvoriti decimalne dijelove stepena u minute i sekunde.

$$\begin{aligned} 0,26878^\circ &= (0,26878 \cdot 60)' = 16,1268' \\ 0,1268' &= (0,1268 \cdot 60)'' = 7,608'' \end{aligned}$$

Dobijamo da je

$$\alpha = 19^\circ 16' 8''.$$

Rezultat $19,26878^\circ$ smo uz pomoć digitrona jednostavno mogli pretvoriti u minute i sekunde na način da nakon ukucavanja vrijednosti $19,26878$ pritisnemo tipku $D.MS$ i dobijemo rezultat 19,160759, što znači da je

$$\alpha = 19^\circ 16' 8''.$$

$\diamondsuit$

Primjer 2.2 *Izračunati vrijednost* $\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)$.

Rješenje: Izračunamo li to uz pomoć digitrona, dobijamo da je

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) &= -53,13010^\circ = -53^\circ 7' 48'', \\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) &= -0,92730\,\text{rad}. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

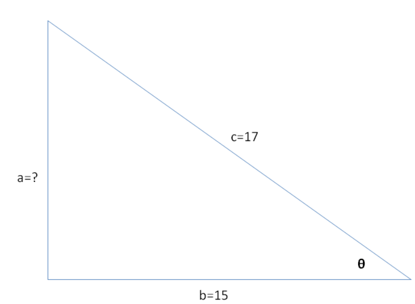
3 Kompozicija trigonometrijskih i ciklometrijskih funkcija

Vratimo se sada našem glavnom problemu, a to je računanje vrijednosti kompozicije trigonometrijske i ciklometrijske funkcije, tj. računanje vrijednosti izraza oblika $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\mathrm{tg}(\arcsin x)$ i njima sličnih, za zadatu vrijednost x. Ovdje odmah treba istaknuti da se, zbog definicije funkcija tangens i kotangens i njihovih domena, izrazi oblika $\mathrm{tg}(\arcsin x)$ i $\mathrm{ctg}(\arccos x)$ ne mogu izračunati za $x = \pm 1$, a izrazi oblika $\mathrm{tg}(\arccos x)$, $\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\, x)$, $\mathrm{ctg}(\arcsin x)$ i $\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg}\, x)$ se ne mogu izračunati za $x = 0$. Sve ostale vrijednosti se za zadanu vrijednost x mogu izračunati pomoću digitrona. Međutim, postoji efikasan način na koji možemo izračunati vrijednost ovakvih izraza koristeći pravougli trougao, veze između trigonometrijskih funkcija i Pitagorinog teorema. Pokažimo to na jednom primjeru.

Primjer 3.1 *Izračunati* $\sin\left(\arccos \frac{15}{17}\right)$.

Rješenje: Kako je$-1 \leq \frac{15}{17} \leq 1$, to $\arccos \frac{15}{17}$ postoji. Neka je $\theta = \arccos \frac{15}{17}$. To znači da bismo u prvom koraku trebali odrediti ugao θ za koji je $\cos\theta = \frac{15}{17}$.

Prisjetimo li se definicije kosinusa oštrog ugla u pravouglom trouglu imamo da je on jednak odnosu dužina nalegle katete i hipotenuze tog trougla. U tu svrhu promotrimo sljedeću sliku.



Primjenom Pitagorinog teorema na pravougli trougao sa slike, dobijamo da je

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$$

Da bismo odredili vrijednost danog izraza potrebno je odrediti $\sin\theta$. Kako je sinus oštrog ugla u pravouglom trouglu jednak odnosu dužina naspramne katete i hipotenuze tog trougla, to je $\sin\theta = \frac{8}{17}$, pa je

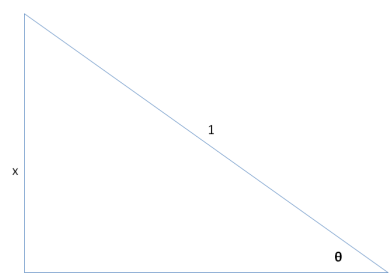
$$\sin\left(\arccos\frac{15}{17}\right) = \frac{8}{17} = 0.47059.$$

Napomenimo da smo iz poznavanja vrijednosti $\cos\theta$, a kako znamo da je $\sin(\arccos x) \geq 0$, mogli $\sin\theta$ dobiti i kao

$$\sin\left(\arccos\frac{15}{17}\right) = \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = 0.47059.$$

$\diamondsuit$

Analizirajmo sada detaljnije slučaj kada treba izračunati vrijednost izraza $f(\arcsin x)$ za $0 < x < 1$. Posmatrajmo pravougli trougao u kojem ćemo jedan oštri ugao označiti s $\theta = \arcsin x$. Kako je sinus oštrog ugla u pravouglom trouglu jednak odnosu dužina naspramne katete i hipotenuze, to će dužina naspramne katete uglu θ biti x a dužina hipotenuze 1. Tada je prema Pitagorinom teoremu dužina druge (nalegle) katete jednaka $\sqrt{1-x^2}$.



Sada, po definiciji trigonometrijskih funkcija u pravouglom trouglu, imamo da vrijede sljedeće formule:

$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2},$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Jednostavno se provjeri da dane formule vrijede za sve $-1 \leq x \leq 1$ (osim slučajeva navedenih na početku poglavlja).

Primjer 3.2 *Izračunati:* $\sin(\arcsin 0,6)$, $\cos(\arcsin 0,6)$, $\mathrm{tg}(\arcsin 0,6)$ *i* $\mathrm{ctg}(\arcsin 0,6)$.

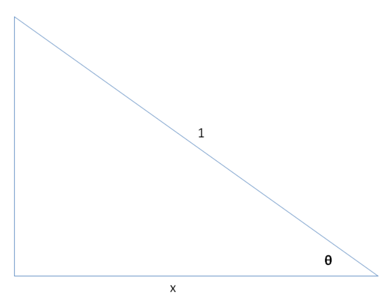
Rješenje: Primijenimo li upravo navedene formule, dobijamo sljedeće rezultate:

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin 0,6) &= 0,6\,,\\ \cos(\arcsin 0,6) &= \sqrt{1-0,6^2} = 0,8\,,\\ \mathrm{tg}(\arcsin 0,6) &= \frac{0,6}{\sqrt{1-0,6^2}} = 0,75\,,\\ \mathrm{ctg}(\arcsin 0,6) &= \frac{\sqrt{1-0,6^2}}{0,6} = 1,33\,.\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Na sličan način možemo analizirati slučajeve gdje nam se pojavljuje $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$ i $\mathrm{arcctg}\, x$.

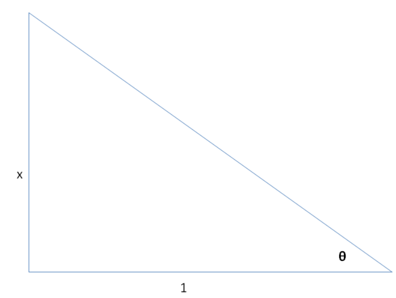
$\underline{\theta = \arccos x}$



$$\begin{aligned}\sin(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2} & \cos(\arccos x) &= x\\ \mathrm{tg}(\arccos x) &= \tfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \mathrm{ctg}(\arccos x) &= \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

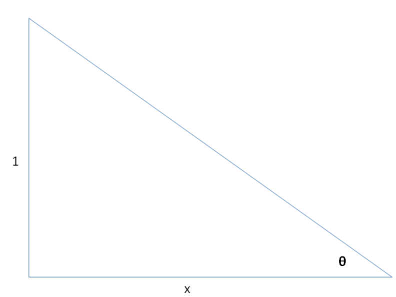
I ovdje treba napomenuti da dane formule vrijede za sve $-1 \leq x \leq 1$ (osim slučajeva navedenih na početku poglavlja).

$\underline{\theta = \operatorname{arctg} x}$



$$
\begin{aligned}
\sin(\operatorname{arctg} x) &= \tfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \cos(\operatorname{arctg} x) &= \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) &= x & \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) &= \tfrac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$\underline{\theta = \operatorname{arcctg} x}$



$$
\begin{aligned}
\sin(\operatorname{arcctg} x) &= \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \cos(\operatorname{arcctg} x) &= \tfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) &= \tfrac{1}{x} & \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) &= x
\end{aligned}
$$

Navedene formule koje se odnose na $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$ vrijede za sve realne x, osim u slučajevima navedenim na početku poglavlja.

Literatura

[1] K. Bljaić, V. Čotić: *Trigonometrija, zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 2012.

[2] P. B. Laval: *Inverse Trigonometric Functions – Trigonometric Equations*, Class Handouts for Math 1113, Kennesaw State University http://science.kennesaw.edu/people/index.html/