MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), 1986-5228 (o)
Vol. XX (3)(2014), 123-135
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

Gedelova teorema o nepotpunosti i problem terminacije programa i igara [1]

Filip Morić[2], Ilija Lalović[3]

Abstrakt

U radu se daje pregled nekih dokaza Gedelove teoreme nepotpunosti koji se baziraju na konkretnim primjerima iz Teorije igara, Teorije grafova i Teorije algoritama. Pokazuje se da problemi terminacije igara i programa izlaze iz okvira Peanove aritmetike i Logike prvog reda.

Abstract

The paper gives an overview of some proofs of Gödel's incompleteness theorem which are based on specific examples of game theory, graph theory and the theory of algorithms. It is shown that the problems of terminating games and programs fall outside the framework of Peano's arithmetic and first-order logic.

AMS Mathematics Subject Classification (2000): Primary 03C35, Secondary 05C55, 06A07

Key words and phrases: Paris and Harington theorem, Ramsey theory, Goodstein's sequences, Kruskal's theorem, Hercules and Hydra game, Program termination, Wagner's hypothesis, Well-foundedness

1 Neki neodlučivi problemi

Na dokaze Gedelove teoreme koji se baziraju na "matematičkim" primjerima, čekalo se relativno dugo nakon originalnog Gedelovog dokaza. Prvi takav dokaz dali su Paris i Harington [22], navodeći tačan iskaz iz konačne kombinatorike koji se ne može dokazati u Peanovoj aritmetici. Njihov rezultat je inspirisao nova istraživanja koja su dala nove primjere i nove tehnike za dokazivanje Gedelove teoreme i mogućnost da se Gedelova teorema sagleda u novoj logiko-matematičkoj perspektivi. Novi pristup dao je značajne rezultate i u Teoriji igara, Teoriji grafova, Teoriji algoritama i Teorijskim osnovama programiranja, iz kojih su uzimani konkretni primjeri za dokaz Gedelove teoreme o nepoptpunosti.

[1] Prikaz je nastao iz diplomskog rada [20]

[2] Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, EPFL SB IMB DCG MA B1 537 (Bâtiment MA) Station 8 CH-1015 Lausanne, e-mail: filip.moric@epfl.ch

[3] Prirodno-matematički fakultet, Mladena Stojanovića 2, 78000 Banja Luka, e-mail: ilalovich@yahoo.com

U radu o klasičnim dokazima teoreme Gedela ilustrovane su starije logiko-matematičke koncepcije [7, 8, 11, 13, 27, 28]. U ovom prikazu ilustruju se novije koncepcije u dokazivanju Gedelove teoreme [2, 3, 4, 6, 9, 12, 15, 17, 19, 22, 23, 24, 25]. Prikazuju se rezultati o nepotpunosti koji koriste iskaze o Gudštajnovim nizovima, terminaciji igara, o dobroj fundiranosti konačnih drveta, te o minorima grafova. Iz navedenih primjera lako slijedi da za rješavanje problema terminacije programa i igara nije dovoljna matematička indukcija u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, već nekada treba koristiti indukciju po ordinalima do ϵ_0.

Za razumijevanje osnovnih koncepcija prikazanih u tekstu, dovoljno je poznavanje elementarne teorije skupova, elementarne matematičke logike prvog reda i sklonost matematičkom razmišljanju. Korišteni osnovni pojmovi matematičke logike, algebre, teorije skupova i osnova teorije programiranja mogu se naći u [14, 16, 18, 26, 29].

1.1 Teorema Paris-Haringtona

Paris i Harington su 1977. u radu [22] dokazali da je jedna verzija poznate Remzijeve teoreme neodlučiva u PA, pri čemu sa PA označavamo Peanovu aritmetiku. Ovo je bio prvi "prirodan" primjer tačnog iskaza o brojevima koji se može formulisati u jeziku aritmetike, ali se ne može dokazati u PA.
Na početku ćemo formulisati i dokazati beskonačnu verziju Remzijeve teoreme.

Teorema 1 (Beskonačna verzija Remzijeve teoreme) *Neka su n i c proizvoljni prirodni brojevi. Ako je svaki n-podskup skupa $\mathbb{N}$ obojen jednom od c boja, tada postoji beskonačan monohromatski skup $M \subseteq \mathbb{N}$ (tj. takav da su svi n-podskupovi skupa M obojeni istom bojom).*

Dokaz. Rezonujući induktivno po broju boja (moguće je poistovijetiti neke boje) zaključujemo da je dovoljno dokazati tvrdjenje za $c = 2$.
Sad tvrdjenje dokazujemo indukcijom po n.
Za $n = 1$ je očigledno tačno.
Pretpostavimo da tvrdjenje vrijedi za sve brojeve manje od n. Neka je dato proizvoljno bojenje n-podskupova skupa $\mathbb{N}$. Izdvojimo proizvoljan broj a_0. Posmatrajmo bojenje $(n-1)$-podskupova skupa $\mathbb{N} \setminus \{a_0\}$ u kom je svaki $(n-1)$-podskup A obojen onom bojom kojom je na početku bio obojen skup $A \cup \{a_0\}$. Po induktivnoj pretpostavci, s obzirom na novo bojenje, imamo beskonačan monohromatski $A_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus \{a_0\}$. Obojimo a_0 bojom tog monohromatskog skupa. Dalje radimo analogno sa skupom A_1. Ako izdvojimo proizvoljan $a_1 \in A_1$ onda njemu odgovara neki novi beskonačan monohromatski $A_2 \subseteq A_1$. Obojimo a_1 bojom monohromatskog skupa A_2. Nakon što konstruišemo $A_t \subseteq \cdots \subseteq A_2 \subseteq A_1$, u skupu A_t izdajamo neki $a_t \notin \{a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}\}$ i dobivamo beskonačan monohromatski skup A_{t+1}. Obojimo a_t bojom tog monohromatskog skupa.

Nastavljajući ovako dobijamo beskonačan skup $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Svi $n-$skupovi skupa A koji sadrže tačku a_t, osim možda onih koji sadrže tačke iz skupa $\{a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}\}$, su iste boje.Tu boju ima i tačka a_t. U dobivenom skupu mora postojati beskonačan podskup tačaka koje imaju istu boju. Taj podskup je monohromatski s obzirom na polazno bojenje. $\Box$

Napomena 1 *Konstrukcija može biti efektivnija ako se indeksiraju boje, a onda se u slučaju postojanja dva beskonačna monohromatska skupa bira skup sa manjim indeksom boje. Takodje je mogao biti biran broj najmanji u skupu A_t i takav da se na kraju dobije $\{a_0 < a_1 < \cdots < a_t < \ldots\}$.*

Sad možemo formulisati i dokazati teoremu koja je primjer tvrdjenja neodlučivog u PA.
Reći ćemo da je skup $A \subseteq \mathbb{N}$ **relativno veliki** ako broj elemenata skupa A nije manji od minimalnog elementa skupa A.

Teorema 2 (Pojačanje Remzijeve teoreme) *Za proizvoljne prirodne brojeve n, k, m postoji prirodan broj N sa sljedećom osobinom: ako svaki n-podskup skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$ obojimo jednom od k boja, tada postoji monohromatski, relativno veliki skup $Y \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ koji ima bar m elemenata.*

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdjenje ne vrijedi. Tada postoje n, k, m takvi da kako god obojili n-podskupove bilo kog skupa $[N]$, svaki relativno veliki monohromatski podskup mora imati manje od m elemenata. Koristeći to negiraćemo beskonačnu verzije Remzijeve teoreme, što će dati kontradikciju.
Recimo da bojenje C n-podskupova skupa $[N+1]$ *produžava* neko bojenje C' n-podskupova skupa $[N]$ ako je C-boja bilo kog n-podskupa od $[N]$ ista kao i njegova C'-boja. Označimo to sa $C' \prec C$. Za svako $N \geq n$ i proizvoljno bojenje C_N n-podskupova skupa $[N]$ postoji lanac $C_n \prec C_{n+1} \prec \cdots \prec C_N$ odgovarajućih bojenja. Ako takve lance pravimo za svako N i za proizvoljna bojenje, tada će na prvom mjestu u tim lancima beskonačno mnogo puta da se pojavi jedno isto bojenje n-skupa koje ćemo označiti sa C_n (lanaca ima beskonačno mnogo, a na prvom mjestu ima samo konačno mnogo mogućih bojenja). Sad posmatramo samo lance koji počinju sa tim bojenjem (ima ih beskonačno mnogo). Medju tim lancima, na drugom mjestu se beskonačno mnogo puta pojavljuje jedno isto bojenje koje ćemo označiti sa C_{n+1}. Nastavljajući ovaj rezon, dolazimo do beskonačnog lanca bojenja $C_n \prec C_{n+1} \prec \ldots$. Tom lancu odgovara jedno k-bojenje skupa n-podskupova od $\mathbb{N}$. U takvom bojenju ne bi postojali proizvoljno veliki monohromatski relativno veliki skupovi. To je kontradikcija, jer uvijek mora postojati beskonačan monohromatski podskup. $\Box$
Pomalo neočekivano, ovaj rezultat je nedokaziv u PA.

Teorema 3 (Paris, Harington) *Iskaz prethodne teoreme, formalizovan u jeziku aritmetike, ekvivalentan je u PA sa iskazom "PA je Σ-konzistentna", koji nije dokaziv u PA.*

Σ-konzistentnost PA znači da je svaka Σ-rečenica koju PA dokazuje tačna. Formalne definicije Σ-formule i Σ-rečenice mogu se naći u [21]. Napominjemo da Σ-formula može sadržati proizvoljno mnogo neograničenih egzistencijalnih

kvantifikatora, ali svi univerzalni kvantifikatori moraju biti ograničeni.
Naravno, iz Σ-konzistentnosti slijedi konzistentnost, pa prema Drugoj Gedelovoj teoremi ni Σ-konzistentnost nije dokaziva u samoj PA. Detelji dokaza dati su u [22].

Dokaz da Teorema 2 ne može biti dokazano u PA može se izvesti bez korištenja druge Gedelove teoreme o nepotpunosti. Jedan takav dokaz, koji koristi indikator funkcije, naveden je u [22].

1.2 Gudštajnovi nizovi

1.2.1 Osnovno o ordinalima

U ovoj sekciji biće nam potrebne neke činjenice o ordinalima koje ćemo ukratko navesti.
U sistemu ZFC (Zermelo-Frenkelova teorija sa aksiomom izbora), najčešće korišćenoj aksiomatizaciji teorije skupova, pojam ordinala se definiše na sljedeći način.
Skup α je **ordinal** ako zadovoljava uslove:

(1) $\forall\beta\,(\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \subseteq \alpha)$

(2) $\forall\beta,\gamma \in \alpha\,(\beta \in \gamma \vee \beta = \gamma \vee \gamma \in \beta)$

Prirodni brojevi su ordinali $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}\ldots$ Skup $\mathbb{N}$ je ordinal i označava se sa ω.
Za proizvoljne ordinale α i β vrijedi $\alpha = \beta$ ili $\alpha \in \beta$ ili $\beta \in \alpha$. Pišemo i $\alpha < \beta$ ako $\alpha \in \beta$.
Ne postoji strogo opadajući niz ordinala $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$. Zaista, ako bi takav niz postojao, tada skup $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ ne bi zadovoljavao aksiomu fundiranosti, koja traži da svaki skup sadrži element s kojim ima prazan presjek. (Smisao aksiome fundiranosti je sljedeći: skupovi se prave od ranije konstruisanih skupova, počevši od praznog skupa i zato je moguća indukcija po složenosti.)
Navedena činjenica garantuje da je svaki skup ordinala **dobro fundiran**, tj. dopušteno je tvrdjenja dokazivati indukcijom po ordinalima. Ako treba dokazati neko tvrdjenje oblika "za svaki ordinal α vrijedi $A(\alpha)$", tada je dovoljno dokazati da za svako α vrijedi: iz tačnosti tvrdjenja $A(\beta)$ za svako $\beta < \alpha$ slijedi tačnost tvrdjenja $A(\alpha)$.
Za svaki ordinal α skup $\alpha \cup \{\alpha\}$ je takodje ordinal koji se označava sa $\alpha + 1$. Ordinali tog oblika nazivaju se **sljedbenici**, a ordinali koji nisu tog oblika (kao npr. ω) su **granični .**
Operacija sabiranja ordinala definiše se sa

(1) $\alpha + 0 = \alpha$

(2) $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$, ako je β sljedbenik

(3) $\alpha + \gamma = \bigcup\limits_{\mu<\gamma} (\alpha + \mu)$, ako je γ granični ordinal.

Slično se definišu i operacije množenja ordinala $\alpha \cdot \beta$ i stepenovanja α^β .
Za date ordinale $\alpha, \beta > 1$ postoje jedinstveni ordinali $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_n$ i $0 < \mu_0, \ldots, \mu_n < \alpha$ takvi da je

$$\beta = \alpha^{\gamma_0}\mu_0 + \cdots + \alpha^{\gamma_n}\mu_n$$

(**normalna forma ordinala** β u bazi α) .
Kantorova normalna forma ordinala β u bazi α dobija se tako što se u normalnoj formi svi γ_i zamijene svojim normalnim formama u bazi α, pa se to opet ponovi sa dobijenim eksponentima itd.
Skup svih ordinala koji se mogu dobiti od prirodnih brojeva i ω korišćenjem konačno mnogo operacija sabiranja, množenja i stepenovanja čini ordinal koji označavamo sa ϵ_0. To je najmanji ordinal takav da je $\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$ i vrijedi $\epsilon_0 = 1 + \omega + \omega^\omega + \omega^{\omega^\omega} + \ldots$.
Svaki ordinal $\alpha < \epsilon_0$ je oblika $\alpha = \omega^\beta(\gamma + 1)$, pri čemu su $\beta, \gamma < \alpha$.

1.2.2 Gudštajnova teorema

Neka su m i n prirodni brojevi i $n > 1$. Definišimo **reprezentaciju broja** m **u bazi** n na sljedeći način:
Prvo napišemo m kao sumu stepena broja n. Sad svaki eksponent napišemo kao sumu stepena od n. To ponovimo sa eksponentima eksponenata itd. dok se reprezentacija ne stabilizuje.
Sad definišimo broj $G_n(m)$. Za $m = 0$ stavimo $G_n(m) = 0$. Inače, neka je $G_n(m)$ broj koji se dobija tako što svako n u reprezentaciji broja m u bazi n zamijenimo sa $n + 1$ i zatim oduzmemo 1 od čitavog broja.
Za proizvoljne $m, n > 1$ definišemo **Gudštajnov niz** na sljedeći način:

$$m_0 = m, \quad m_1 = G_n(m_0), \quad m_2 = G_{n+1}(m_1), \ldots .$$

Teorema 4 (Gudštajn [12]) *Za proizvoljne* $m, n > 1$ *postoji* k *tako da je* $m_k = 0$.

Dokaz. Za proizvoljne m, n označimo sa $o_n(m)$ ordinal dobijen zamjenom svakog n u reprezentaciji broja m u bazi n sa ω .
Neka je

$$m = n^k a_k + n^{k-1}a_{k-1} + \cdots + na_1 + a_0 .$$

Za $x \in \mathbb{N}$ ili $x = \omega$ definišimo

$$f^{m,n}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^{f^{i,n}(x)} .$$

(To je definicija indukcijom po m, počevši od $f^{0,n}(x) = 0$.)
Tada je za $m > 0$

$$G_n(m) = f^{m,n}(n + 1) - 1$$

i

$$o_n(m) = f^{m,n}(\omega)\,.$$

Stavimo $G_n(0) = o_m(0) = 0\,.$
Konačno, za $n \in \mathbb{N}$ definišimo operaciju $\langle\alpha\rangle(n)$ za ordinale $\alpha < \epsilon_0$ indukcijom po α:

$$\langle 0\rangle(n) = 0, \quad \langle\beta+1\rangle(n) = \beta$$

i za $\delta > 0$

$$\langle\omega^\delta(\beta+1)\rangle(n) = \omega^\delta\beta + \omega^{\langle\delta\rangle(n)}n + \langle\omega^{\langle\delta\rangle(n)}\rangle(n)\,.$$

Lema 1 *(i) Za $m \geq 0$, $n > 1$, ako je $\alpha = o_{n+1}(m)$, onda je $o_{n+1}(m-1) = \langle\alpha\rangle(n)\,.$*

(ii) Za $n > 1$, $\langle o_n(m)\rangle(n) = o_{n+1}(G_n(m))\,.$

Dokaz leme.

(i) Posmatrajmo reprezentaciju m u bazi $n+1$:

$$m = a_p(n+1)^{f^{p,n+1}(n+1)} + a_{p-1}(n+1)^{f^{p-1,n+1}(n+1)} + \\ + \cdots + a_0(n+1)^{f^{0,n+1}(n+1)}\,.$$

Neka je j minimalan broj takav da je $a_j \neq 0\,.$ Pretpostavimo da tvrdjenje vrijedi za $m' < m$. Tada je

$$o_{n+1}(m-1) = \left(\sum_{i=j+1}^{p} \omega^{f^{i,n+1}(\omega)} a_i\right) + \omega^{f^{j,n+1}(\omega)}(a_j-1) + \\ + o_{n+1}(n(n+1)^{f^{j,n+1}(n+1)-1}) + o_{n+1}((n+1)^{f^{j,n+1}(n+1)-1})\,,$$

dok je

$$\langle\alpha\rangle(n) = \left(\sum_{i=j+1}^{p} \omega^{f^{i,n+1}(\omega)} a_i\right) + \omega^{f^{j,n+1}(\omega)}(a_j-1) + \\ + \omega^{\langle f^{j,n+1}(\omega)\rangle(n)}n + \langle\omega^{\langle f^{j,n+1}(\omega)\rangle(n)}\rangle(n)\,.$$

Koristeći induktivnu hipotezu lako je dokazati da su dva dobijena izraza jednaka.

(ii) Neka je

$$m = b_p n^{f^{p,n}(n)} + b_{p-1} n^{f^{p-1,n}(n)} + \\ + \cdots + b_0 n^{f^{0,n}(n)}$$

i $b_j \neq 0$. Imamo da je

$$\langle o_n(m)\rangle(n) = \left(\sum_{i=j+1}^{p} \omega^{f^{i,n}(\omega)} b_i\right) + \omega^{f^{j,n}(\omega)}(b_j - 1) +$$

$$+\omega^{\langle f^{j,n}(\omega)\rangle(n)} n + \langle \omega^{\langle f^{j,n}(\omega)\rangle(n)}\rangle(n)$$

i

$$o_{n+1}(G_n(m)) = \left(\sum_{i=j+1}^{p} \omega^{f^{i,n}(\omega)} b_i\right) + \omega^{f^{j,n}(\omega)}(b_j - 1) +$$

$$+o_{n+1}((n+1)^{f^{j,n+1}(n+1)-1} n) + o_{n+1}((n+1)^{f^{j,n+1}(n+1)-1} - 1)\,.$$

Sad iz (i) dobijamo željenu jednakost.

Završetak dokaza teoreme. Bilo kom Gudštajnovom nizu $m_0, m_1, \ldots$ odgovara niz ordinala

$$o_n(m_0), \quad o_{n+1}(m_1), \ldots\,.$$

Neka je $o_n(m_0) = \alpha$. Tada je na osnovu leme

$$o_{n+1}(m_1) = o_{n+1}(G_n(m_0)) = \langle\alpha\rangle(n)\,,$$
$$o_{n+2}(m_2) = o_{n+2}(G_{n+1}(m_1)) = \langle\langle\alpha\rangle(n)\rangle(n+1)\ \ldots\,.$$

Za proizvoljne $\alpha < \epsilon_0$ i $n > 1$ vrijedi

$$\langle\alpha\rangle(n) < \alpha\,.$$

Sad ako bi Gudštajnov niz bio uvijek pozitivan, imali bismo beskonačan opadajući niz ordinala, što nije moguće, pa slijedi željeni zaključak. □

Teorema 5 (Paris, Kirbi [23]) *Gudštajnova teorema, formalizovana u jeziku PA prvog reda, nije dokaziva u PA.*

Dokaz. Definišimo **Gudštajnovu funkciju** $\mathcal{G} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način: za prirodan broj m, neka je $\mathcal{G}(m)$ najmanji prirodan broj k za koji je $m_k = 0$ u Gudštajnovom nizu čiji je prvi član m, a početna baza $n = 2$.
Transfinitnom indukcijom po $\alpha < \epsilon_0$ definišimo funkciju $d(\alpha, n)$ (za $n \in \mathbb{N}$) sa

$$d(\alpha, n) = \omega^\beta\gamma + \begin{cases} \omega^\delta n, & \text{ako je } \beta = \delta + 1 \\ \omega^{d(\beta,n)}, & \text{ako je } \beta \text{ granični ordinal} \end{cases}$$

pri čemu je $\alpha = \omega^\beta(\gamma + 1)$ (svaki ordinal $\alpha < \epsilon_0$ ima jedinstvenu reprezentaciju u tom obliku uz uslov $\beta < \alpha$).
Definišimo takozvanu **brzo rastuću hijerarhiju** $(f_\alpha)_{\alpha<\epsilon_0}$ funkcija $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

(1) $f_0(n) = n + 1$

(2) $f_{\alpha+1}(n) = f_\alpha^n(n)$ (iteracija funkcije f_α n puta)

(3) za granični ordinal α, $f_\alpha(n) = f_{d(\alpha,n)}(n)$.

Za funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kažemo da f **dominira** nad g ako je $f(n) > g(n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$ osim konačno mnogo.
Vrijedi sljedeći rezultat koji navodimo bez dokaza:

Teorema 6 *Ako je f rekurzivna funkcija za koju se u PA može dokazati da je totalna, tada za neko $\alpha < \epsilon_0$ funkcija f_α dominira nad f.*

Označimo sa $R_n^\omega(m)$ ordinal dobijen tako što u reprezentaciji broja m u bazi n svako n zamijenimo sa ω. Vrijedi

Teorema 7 (*Caicedo* **[2]**) *Neka je $n = 2^{m_1} + \cdots + 2^{m_k}$, pri čemu je $m_1 > \cdots > m_k$ i $\alpha_i = R_2^\omega(m_i)$. Tada je*

$$\mathcal{G}(n) = f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\ldots(f_{\alpha_k}(3)))) - 2\,.$$

Sad se lako vidi da za svako α funkcija $\mathcal{G}$ dominira nad f_α, pa slijedi da se za funkciju $\mathcal{G}$ u PA ne može dokazati da je totalna. Time je dokazana i teorema Paris-Kirbi. $\square$

Originalan dokaz [23] koristi moćnu mašineriju iz teorije modela – metod indikatora. Kratak dokaz Gudštajnove teoreme dao je Cihon u [3]. U dokazu je koristio tehnike teorije rekurzivnih funkcija za Hardijeve hijerarhije.

Neformalno, možemo reći da je razlog nedostižnosti Gudštajnove teoreme za običnu aritmetiku zapravo ogromno vrijeme koje je potrebno nizu (m_k) da dostigne nulu. Npr. za $m = 4$ i $n = 2$ niz prvi put dostiže nulu za $k = 2 \times 3^{402,653,211} - 2$. Taj broj se može dobiti recimo primjenom navedene teoreme o reprezentaciji Gudštajnove funkcije brzo rastućom hijerarhijom [2]. U ovom slučaju je $m_1 = 2$ (jer je $4 = 2^2$) i $\alpha_1 = R_2^\omega(2) = \omega$, pa je

$$\mathcal{G}(4) = f_\omega(3) - 2 = f_{d(\omega,3)}(3) - 2 = f_3(3) - 2 = \cdots = 2 \cdot 3^{402653211} - 2\,.$$

Iako se većina istraživanja u vezi sa Gudštajnovom teoremom odnosi na matematičku logiku, nadjeno je i interesovanje za Gudštajnovu teoremu u oblasti dinamičkih sistema. Paris i Tavakol, u [24], posmatraju algoritam koji generiše Gudštajnove nizove kao dinamički sistem (G-sistem.) Ovaj sistem je deterministički, ima jednostavan globalan atraktor (koordinatni početak), super-osjetljiv je na promjene početnih uslova i ima veoma duge prelaze (dužina ne-nula dijela Gudštajnovog niza), pa se time znatno razlikuje od uobičajenih dinamičkih sistema.

1.3 Terminacija igara

1.3.1 Igra "Herkules i hidra"

Hidra je konačno drvo koje se može posmatrati kao konačna kolekcija duži koje spajaju po dva čvora, tako da je svaki čvor povezan jedinstvenim putem sa fiksnim čvorom koji se naziva **korijen**.
Gornji čvor hidre je čvor koji je incidentan samo sa jednom duži i koji nije korijen.
Glava hidre je bilo koji gornji čvor zajedno sa njegovom duži.
Bitka izmedju Herkulesa i date hidre odvija se na sljedeći način:
U etapi n ($n \geq 1$) Herkules odsijeca jednu glavu hidre. Hidri tada izrasta n novih glava na sljedeći način:
Od čvora koji je upravo odsječen spuštamo se duž jednog segmenta prema korijenu dok ne dodjemo do prvog čvora. Iz tog čvora niče n kopija onog dijela hidre (prije odsijecanja) koji je "iznad" upravo predjenog segmenta (iznad, u smislu udaljenosti od korijena). Ako je upravo odrubljena glava imala korijen za jedan od svojih krajeva, tada ne izrasta nijedna nova glava.
Herkules **pobjedjuje** ako poslije konačno mnogo etapa od hidre ostane samo korijen.
Strategija je funkcija koja odredjuje Herkulesu koju glavu da odsiječe u bilo kojoj etapi bilo koje bitke. Ispostavlja se da, kako god igrao, Herkules mora pobijediti.

Teorema 8 *Svaka strategija za Herkulesa je pobjednička strategija.*

Skica dokaza. Dokaz je sličan dokazu Gudštajnove teoreme, pa nećemo ponovo ulaziti u tehničke detalje, već navodimo samo glavnu ideju.
Prvo dodijelimo svakom čvoru hidre ordinal ispod ϵ_0 na sljedeći način.
Svakom gornjem čvoru dodijelimo 0.
Svakom od ostalih čvorova dodijelimo ordinal $\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$, pri čemu su $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ ordinali dodijeljeni čvorovima koji su "odmah iznad". ($\omega^0 = 1$)
Ordinal hidre je ordinal dodijeljen njenom korijenu.
Pokazuje se da se poslije svake etape bitke ordinal hidre smanjuje, pa kako ne postoji beskonačan opadajući niz ordinala, slijedi da se bitka završava poslije konačno mnogo etapa. $\Box$

Možemo kodirati hidru brojevima i pričati o bitkama jezikom PA prvog reda. Medjutim, prethodnu teoremu ne možemo formalizovati kao iskaz ovog jezika, pošto su strategije infinitni objekti. Ipak, formalizacija je moguća ako se ograničimo na rekurzivne (tj. izračunljive strategije). Vrijedi sljedeća teorema o nezavisnosti.

Teorema 9 (Paris, Kirbi [23]) *Iskaz "svaka rekurzivna strategija je pobjednička" nije dokaziv u PA.*

Dokazuje se analogno sa teoremom o nedokazivosti Gudštajnove teoreme.
U [14] ($Gries, D.$) se tvrdi da je indukcija nad $\mathbb{N}$ dovoljna za dokazivanje ter-

minacije praktičnih programa. Medjutim, za konstrukciju funkcija terminacije potrebna je indukcija do ϵ_0 i za takve programe.
Jednostavan primjer programa čija terminacija još uvijek nije dokazana daje poznati **Kolacov problem**. Posmatra se funkcija

$$T(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ parno} \\ 3n+1, & n \text{ neparno} \end{cases}$$

i tvrdi se da primjenom niza iteracija funkcije T na proizvoljan prirodan broj n obavezno dolazimo do vrijednosti 1. Pol Erdeš je komentarišući ovaj problem rekao:*"Matematika još uvijek nije spremna za takve probleme"*.

1.3.2 Igra Hackenbush

Hackenbush je igra koja se igra na grafu, sa obojenim granama, koji je na početku igre povezan sa proizvoljno definisanom podlogom. Pretpostavimo da je trava predstavljena zelenom horizontalnom linijom i neka iz trave rastu grane obojene crvenom ili plavom bojom. Na početku je dat neki graf (ne mora biti povezan). Igraju naizmjenično dva igrača, Lijevi i Desni. Lijevi odsijeca plave, a Desni crvene grane. Kad se neka grana odsiječe automatski se brišu i sve druge grane koje više nisu povezane sa travom. Gubi igrač koji ne može odigrati potez. Igra Hackenbush je teorijski zanimljiva. U knjizi [1] autori su koristili različite varijante igre Hackenbush za prikazivanje svih dijelova teorije normalno igranih igara. Takodje su pokazali, svodjenjem na problem minimalnog razapinjućeg drveta, da je problem odredjivanja rezultata za generalnu poziciju crveno-plave igre Hackenbush, u normalnom igranju, NP-težak. Informacije o NP-teškim problemima mogu se naći u [10]. U vezi sa problemima terminacije, Berlekamp je analizirao Hackenbush pozicije kod kojih su sve komponente prosti putevi (moguće i beskonačne dužine), tako što je putevima dodjeljivao odgovarajuće realne brojeve u zavisnosti od rasporeda crvenih i plavih grana. Broj dodijeljen igri jednak je sumi brojeva dodijeljenih pojedinim komponentama. U analizi ove igre Konvej je koristio tzv. surealne brojeve koji predstavljaju generalizaciju ordinala.

1.4 Kruskalova teorema o drvetima

Drvo je konačan poset sa najmanjim elementom (korijen) u kom su prethodnici proizvoljnog čvora linearno uredjeni. Postoji inf operacija na čvorovima proizvoljnog konačnog drveta (različita od operacije infimum na skupovima). Operacija inf vraća čvor koji je zadnji zajednički predak za dva čvora. Posmatramo inf-utapanja konačnih drveta, tj. utapanja koja čuvaju inf. To su 1-1 preslikavanja h izmedju skupova čvorova dva drveta takva da je $h(\inf(x, y)) = \inf(h(x), h(y))$. To su homeomorfna utapanja ako drveta posmatramo kao topološke prostore. Ekvivalentno, ako usmjerimo grane u odnosu na korijen, utopljeno drvo je topološki minor drveta u koje se utapa. Posmatramo drveta čija su tjemena označena elementima skupa X koji je dobro fundiran sa relacijom "$<$"

i u kom ne postoji beskonačan antilanac (skup u kom su bilo koja dva elementa neuporediva). Na skupu označenih konačnih drveta uvedimo parcijalni poredak "$\prec$" tako da je $T_1 \prec T_2$ ako postoji inf-utapanje $h : T_1 \to T_2$ tako da je $x \leq h(x)$ za svaki čvor $x \in T_1$.

Teorema 10 (Kruskal [17, 9]) *Pri uvedenom poretku skup označenih konačnih drveta je dobro fundiran i ne sadrži beskonačan antilanac.*

Kruskalova teorema o drvetima igra fundamentalnu ulogu u računarstvu, jer je to jedan od glavnih alata u dokazivanju da su odredjena uredjenja na drvetima dobro fundirana. Ova uredjenja igraju važnu ulogu u dokazivanju terminacije programa sa "rewrite" pravilima, a takodje pri dokazivanju korektnosti procedure kompletiranja Knuta-Bendiksa, što je prikazano u [5].
U tu svrhu koristi se i **Higmanova lema** [15], koja je specijalan slučaj Kruskalove teoreme i odnosi se samo na konačne nizove umjesto generalnih drveta.
Čuvena je generalizacija Kruskalove teoreme na proizvoljne grafove, koja se smatra jednim od najdubljih rezultata iz teorije grafova (tvrdjenje je ranije bilo poznato kao **Vagnerova hipoteza**).

Teorema 11 (Robertson, Sejmur u [25]) *Ako je $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz konačnih grafova, tada postoje brojevi $m < n$ takvi da je G_m izomorfan minoru od G_n.*

Fridman je 2002. godine uočio da Kruskalova teorema ima specijalne slučajeve koji se mogu formulisati u PA, ali se ne mogu dokazati.
Neka je $P(n)$ tvrdjenje

> *"Postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da za proizvoljna drveta $T_1, \ldots, T_m$ takva da T_k ima $k+n$ čvorova za $k = 1, 2, \ldots, m$, uvijek postoje $i < j$ takvi da je $T_i \prec T_j$."*

Za svako n PA može dokazati $P(n)$, ali PA ne može dokazati iskaz *"$P(n)$ je tačno za svako n"*. Zapravo, dužina dokaza $P(n)$ u PA raste ogromnom brzinom kao funkcija od n, brže od bilo koje primitivno rekurzivne funkcije.
Verzije Kruskalove teoreme koje je posmatrao Fridman su zanimljive sa aspekta teorije dokaza, jer one nisu dokazive u relativno jakim logičkim sistemima. To su primjeri tzv. **prirodnih fenomena nezavisnosti**, koje većina logičara smatra prirodnijim od rezultata o nekompletnosti koje je prvobitno otkrio Gedel.

Zahvalnica

Autori se zahvaljuju anonimnim recezentima čije primjedbe i sugestije su pomogle da tklonimo greške i da značajno poboljšamo rad.

Reference

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy, *Winning way for your mathematical plays,* 2nd ed., A K Peters, 2001

[2] Caicedo, A. *Goodstein's function*, Revista Columbiana de Matemáticas, **41** (2007)

[3] Cichon, E. *A short proof of two recently discovered idependence results using recursion theoretic methods.* Proc. American Math. Soc., 87 (1983), Issue 4, 704-706.

[4] Conway, J. and Guy, R. *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, 1996.

[5] Dershowitz, N. *Termination of Rewriting.* J. Symbolic Computation (3), 1-2 (1987), 69-116.

[6] Feferman, S. Feferman, H. Maddy, and Steel, P. J. *Does mathematics need new axioms?*, Bulletin of Symbolic Logic, **6** (2000), str. 401–413.

[7] Torkel Franzén, *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, A K Peters, Wellesley, 2005.

[8] Friedman, H. *Unprovable theorems*, Cal Tech Math Colloq, 2005.

[9] Gallier, J. H. *What's so special about Kruskal's theorem and the ordinal* Γ_0*? A survey of some results in proof theory,* Annals of Pure and Applied Logic, 53 (1991), 199-260.

[10] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability,*Freeman, 1979

[11] Gentzen, G. *Die Widerspruchfreiheit der reinen Zahlentheorie*, Mathematische Annalen **112** (1936), str. 493–565.

[12] Goodstein, R. *On the restricted ordinal theorem.* Journal of Symbolic Logic, 9 (1944), 33-41.

[13] Gödel, K. *Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und Verwandterf Systeme I*, Montshefte fur Mathematik und Physics, vol. 38 1931), p. 173-198. (engl. prevod: Gödel K. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I,* Dover, 1992)

[14] Gries, D. *The Science of Programming*, Springer, 1989.

[15] Higman, G. *Ordering by divisibility in abstract algebras.* Proc. London Math. Soc. (3), 2 (1952), 326-336.

[16] Hilbert, D. and Bernays, P. Grundlagen der Mathematik. Berlin, Springer, vol.1 1934, voL2 1939.

[17] Kruskal, J.B. *Well-quasi-ordering, the tree theorem, and Vazsonyis conjecture.* Trans. American Math. Soc. 95 (1960), 210-225.

[18] R. Sz. Madarasz , *Univerzalne algebre, teorija skupova i mreža*, MAT-KOL, Podebna izdanja, Broj 2 (2004), Banja Luka 2004

[19] Miller, J. *On the independence of Goodstein's theorem*, Univ. of Arizona, 2001.

[20] F. Morić, *Klasični dokazi Gedelove teoreme nekompletnosti i terminacija programa,* Diplomski rad, PMF, Banja Luka, 2008

[21] F. Morić, I. Lalović, *Klasični dokazi Gedelove teoreme nekompletnosti,* MAT-KOL, XX(3)(2014), u štampi

[22] Paris, J. and Kirby, L. *A mathematical Incompletness in Peano Arithmetic*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 90. Handbook of Mathematical Logic (Ed. by J. Barwise), North-Holland, 1977, str. 1133–1141.

[23] Paris, J. and Kirby, L. *Accessible independence results for Peano arithmetic*, Bull. London Math. Soc., **14** (1982), str. 285–293.

[24] Paris, J. and Tavakol, R. *Goodstein algorithm as a super-transient dynamical system.* Physics Letters A, 180 (1993), 83-86.

[25] Robertson, N. and Seymour, P.D. *Graph Minors. XX.Wagners conjecture*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 92 (2004), 325 357

[26] D. A. Romano, *Osnove matematike (II dio: Teorija skupova, Knjiga 2: Zermelo-Frankelova aksiomatska teorija skupova)*, MAT-KOL, Podebna izdanja, Broj 5 (2007), Banja Luka 2007

[27] Smullyan, R. M. *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Oxford, 1992.

[28] Turing, A. M. *On computable numbers, with an application to the Entscheindungsproblem*, Proceedings of the London Mathematics Society, ser. 2 v. 42, str. 230–265.

[29] N. K. Vereschagin, A. Shen *Nachala teorii mnozhestv*, Moskva, 1999.

Primljeno u redakciju časopisa: 1 Septembar, 2013