MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (p)**
XX (2)(2014), 97--99 **ISSN 1986-5228 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

UOPŠTENJE JEDNE ZANIMLJIVE ALGEBARSKE NEJEDNAKOSTI

(A generalization of one interesting algebraic inequality)

Dragoljub Milošević[1]

Sažetak. U ovom radu dajemo dokaz jednog uopštenja interesantne algebarske nejednakosti (1) iz [2]

$$\frac{a^n}{x}+\frac{b^n}{y}+\frac{c^n}{z}\geq\frac{(a+b+c)^n}{3^{n-2}(x+y+z)},$$

gdje su *a, b, c, x, y, z, n* pozitivni realni brojevi i $n\geq 2$.

Ključne riječi i izrazi: algebarska nejednakost, uopštenje, nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca, konveksna funkcija, Jensenova nejednakost.

Abstract. In this paper we give the proof of one generalization of the interesting algebraic inequality (1) in [2]

$$\frac{a^n}{x}+\frac{b^n}{y}+\frac{c^n}{z}\geq\frac{(a+b+c)^n}{3^{n-2}(x+y+z)},$$

where *a, b, c, x, y, z, n* be the positive real numbers and $n\geq 2$.

Key words and phrases: algebraic inequality, generalization, Cauchy-Buniakovski-Schwarz inequality, convex function, Jansen's inequality.

AMS Subject classification (2010): **97F50**
ZDM Subject classification (2010): **F50, N50**

U [2] je dokazana sljedeća nejednakost

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}, \tag{1}$$

gdje su *a*, *b*, *c*, *x*, *y*, *z* pozitivni realni brojevi.

Ovdje ćemo dokazati njeno slijedeće uopštenje (generalizaciju)

$$\frac{a^n}{x}+\frac{b^n}{y}+\frac{c^n}{z}\geq\frac{(a+b+c)^n}{3^{n-2}(x+y+z)},\quad n\geq 2. \tag{2}$$

Dokaz: Na osnovu nejednakosti Koši-Bunjakovski-Švarca za $n=3$ dobijamo

$$\left(\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{a^n}}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\cdot\frac{\sqrt{b^n}}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\cdot\frac{\sqrt{c^n}}{\sqrt{z}}\right)^2 \le$$

$$\le\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{a^n}}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{b^n}}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{c^n}}{\sqrt{z}}\right)^2\right)$$

odnosno

$$(x+y+z)\left(\frac{a^n}{x}+\frac{b^n}{y}+\frac{c^n}{z}\right)\ge\left(\sqrt{a^n}+\sqrt{b^n}+\sqrt{c^n}\right)^2,$$

tj.

$$\frac{a^n}{x}+\frac{b^n}{y}+\frac{c^n}{z}\ge\frac{\left(\sqrt{a^n}+\sqrt{b^n}+\sqrt{c^n}\right)^2}{x+y+z}. \qquad (3)$$

Posmatrajmo funkciju $f(x)=x^{\frac{n}{2}}$, $(x>0 \text{ i } n\ge 2)$ i njen drugi izvod

$$f''(x)=\frac{n}{4}(n-2)\,x^{\frac{1}{2}(n-4)}\ge 0 \text{ za } x>0 \text{ i } n\ge 2.$$

Zaključujemo da je funkcija f konveksna, pa je na osnovu Jensenove nejednakosti

$$\frac{a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}}}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{n}{2}},$$

a odavde je

$$\left(a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}}\right)^2\ge 3^{2-n}(a+b+c)^n,\ n\ge 2. \qquad (4)$$

Sada iz (3) i (4) slijedi tražena nejednakost (2).

Jednakost u (2) vrijedi ako i samo ako $a=b=c$ i $x=y=z$.

Napomena 1. Specijalno za $n=3$ dobijamo nejednakost (1).

Napomena 2. (*a*) Za $n=2$ dobijamo nejednakost iz [3] :

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

(*b*) Za $x=y=z$ iz (2) slijedi nejednakost ([1], str. 195):

$$a^n + b^n + c^n \geq 3^{1-n}(a+b+c)^n .$$

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene,* Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
[2] Arslanagić, Š. , Bašić, A., *Jedna zanimljiva algebarska nejednakost i njena primjena,* MAT-KOL (Banja Luka), XX (2) (2014), 69 - 75.
[3] Milošević, D., *Jedna nejednakost i njena primena,* Tangenta (Beograd), 55 $(2008/2009-3)$, 8 - 10.

Primljeno u redakciju časopisa 30.07.2013. Dostupno na internetu od 02.09.2013.