

Dijalog između prakse i teorije u domeni Metodike nastave matematike¹

Daliborka Kojić²

Sažetak: Uvažavajući složene međuodnose koje domen didaktike matematike ima sa drugim istraživačkim oblastima (npr. matematikom, obrazovnim naukama, epistemologijom, istorijom, psihologijom, semiotikom, sociologijom, kognitivnim naukama, i drugim ...), u ovom radu prezentuju se slučajevi korisnih i nekih manje korisnih dijaloga između stručnjaka ovih različitih oblasti. Oni razgovaraju o rezultatima tih razgovora, oslanjajući se na istraživanja sprovedena od strane grupe italijanskih autora, u okviru paradigme italijanskog istraživanja u domeni Istraživanja matematičkom obrazovanju.

Abstract: Acknowledging the complex relationships which the field of didactics of mathematics has with other research fields (for example: mathematics, educational sciences, epistemology, history, psychology, semiotics, sociology, cognitive science, and others ...), in this paper some cases of fruitful and of some failed dialogue between experts of the different fields. They discuss results of these dialogues, drawing on research studies carried out by some italian authors, within the paradigm of the Italian research in Mathematics Education.

Ključne riječi i fraze: *matematičko obrazovanje, metodika matematike, odnos teorije i prakse...*

Key words and phrases: *mathematics education, mathematics teaching methods, relation between theory and practice...*

1. Uvod

U posljednjih nekoliko decenija, nekoliko autora je istaklo složenu sistemsku prirodu *Metodike nastave matematike* kao oblasti istraživanja i njenih međusobnih odnosa sa različitim domenima, kao što su, na primjer, matematika, obrazovne nauke, epistemologija, istorija, psihologija, semiotika, sociologija. (Steiner, 1985; Biehler, Scholz, Straesser & Winkelmann, 1994; 1994, Wittmann, 1995; Godino & Batanero, 1997).

¹ Tekst ovog rada je izmjenjen i dopunjen moj seminarski rad koji sam radila u okvirima predmeta 'Savremena metodika nastave matematike I' na studijama drugog ciklusa na Pedagoškom fakultetu u Bijeljini školske 2012./13. godine i predstavlja kompilaciju dostupne literature o ovoj temi.

² Pedagoški fakultet Bijeljina, Semberskih ratara b.b., 76300 Bijeljina, BiH,
e-mail: daliborka86@hotmail.com

Drugi važan aspekt *Metodike nastave matematike* sastoji se u prihvatanju konstatacije da je to praktična (instrumentalna) disciplina, usmjerena na dobijanje rješenja prigodnih za realizaciju u nastavnoj praksi. Praksa je istovremeno ishodnik metodičkih problema, kao i mjesto gdje se provjerava teorijski modelovane hipoteze podučavanja. Nastavna praksa u formi istraživačkog objekta i laboratorija za provođenje istraživačkih pedagoških eksperimenata - jeste jedno od glavnih instrumenata istraživanja nastavne teorije i prakse. Na kraju, praksa je ta koja istinski valorizuje vrijednosti dobijenih teorijskih znanja.

Konkretno, Marija Bartolini i Luciana Bazani (Maria G. Bartolini Bussi & Luciana Bazzini), u svom radu „*Research, Practice and Theory in Didactics of Mathematics: towards Dialogue between Different Fields*“³, predlažu razlikovanje između *Metodike nastave matematike* definisane kao "nauke i naučnog polja istraživanja koje ima za cilj da identifikuje određene osobine i razumije pojave i procese koji uslovljavaju nastavu i učenje matematike" i *Matematike obrazovanja*, definisane kao "složen i heterogeni društveni sistem koji obuhvata teoriju, razvoj i praksu u pogledu nastave i učenja matematike."

Prema ovoj definiciji, *Matematika obrazovanja* obuhvata *Metodiku nastave matematike* kao podsistem. Takva jasnoća je korisna jer naglašava neke jasne osobine teorijskog istraživanja u didaktičkoj matematici i njihov uticaj na matematiku obrazovanja. Takav stav ima i naš profesor metodike nastave matematike na Pedagoškom fakultetu u Bijeljini. U tom cilju pogledati tekstove: Romano, 2010 i Romano, 2010a. Pedagoški eksperiment, kako to većina autora radi, smješta teoriju u praktično polje, u kojoj bi, tada, trebalo, da se nakupe kako pozitivna tako i negativna znanja, koja bi, dalje, trebalo da omoguće dublje razvijanje teorije. U praksi visoko cijenjen istraživački eksperiment, koji, kao naučni metod, u stvari, daje samo potvrdu opravdanja slutnji, ipak je organski dio istraživanja (Romano, 2010a).

Uobičajeno je reći da su istraživači u Metodici nastave matematike zainteresovani uglavnom u one posebne studije koje se tačno odnose na matematiku ili matematičko obrazovanje, npr: epistemologija matematike, istorija matematike / matematike obrazovanja; psihologija matematike / matematike obrazovanja, sociologija matematike / matematike obrazovanja. Međutim, svaka od navedenih oblasti ima svoje naučnike i stručnjake, koji su veoma zauzeti sa svojim sopstvenim problemima istraživanja i sopstvenom metodologijom. Koristan razgovor između njih i istraživača u obrazovanju matematike nije lak. U nastavku, analiziramo neke slučajeve, fokusirajući se na veze između domena, kako bi otkrili da li je odnos simetričan ili ne. Naročito, uticaj istoričara matematike i matematičara će se uzeti u obzir.

Potom, mi smo se fokusirali na dva paradigmatična primjera u kojima je uticaj različitih komponenata (teorijsko istraživanje i praktična nastava) osnovni problem. Dvije istraživačke studije bave se teorijskim razmišljanjem u geometriji i na algebarska razmišljanja odnosno, oni mogu biti preispitani kao predmeti u okviru određene istraživačke paradigme, koja je tipična u italijanskoj tradiciji.

2. Istorija i Metodika nastave matematike

³ Educational Studies in Mathematics , Vol. 54(2/3)(2003), 203-223

Istoričari matematike su veoma dobra strukturirana asocijacija, koja je dio kako akademske zajednice istoričara nauka, tako i akademske zajednice matematičara. Oni imaju svoje sopstvene časopise (npr. *Arhiva za istoriju egzaktne nauke*, *Istorija matematika*), istraživačke sastanke i međunarodne konferencije. Nacionalne kao i međunarodne grupe su se pojavile posljednjih godina, da pokušaju da uspostave vezu između istoričara i didaktičara, npr. Komisija INTER-IREM⁴ "Epistemologije i istorije Matematike" u Francuskoj (INTER-IREM, 1997; 1998) i Međunarodna Studijska grupa na odnosima između istorije i pedagogije matematike (HPM⁵) koji objavljuje bilten redovno. Mnoge konferencije su povremeno organizovane ili na redovnoj osnovi, npr. Evropski ljetnji Univerziteti o istoriji i epistemologiji u matematici obrazovanja. Cijela ICMI⁶ studija (1998) je bila posvećena ulozi istorije matematike u nastavi i učenju matematike u Marsej-Lumini, štaviše satelitski sastanak ICMI 9 se bavio ulogom u istoriji Matematike obrazovanja (Hornig i Lin, 2000)⁷.

Ako idemo kroz listu sadržaja obima spajajući rad citiran iz ICMI studije (Fauvel i van Manen, 2000), možemo naći mnogo zanimljivih pitanja, kao što su, uloga istorijske analize u predviđanju i interpretiranju studentskih poteškoća u matematici i relevantnost istorijskih studija u projektovanju i analizi aktivnosti u učionici. Ovi materijali i eksperimenti sprovode se širom svijeta, osim, naravno, kod nas, omogućavajući da se ide dalje u diskusiji o ulozi istorije matematike u nastavi matematike.

Zanimljivo pitanje je: "Da li je korektna saradnja između istoričara i didaktičara moguća?" Počnimo sa stavovima Luidi Pepea, istoričara matematike sa Univerziteta u Ferati, iz 1990-e godine, koji je napisao (Pepe, 1990):

"Danas pitanje odnosa između istorije i metodike matematike može se staviti na veoma efikasan način, više efikasan nego u prošlosti: oni su samostalni jedni od drugih i mogu da saraduju na razvoju i širenju matematičke kulture. " Ipak, autor insistira da susret između istorije i metodike matematike može izazvati negativne efekte jednih na druge. S jedne strane, uvođenje istorije matematike u metodike matematike može proizvesti rizike za nastavu, npr.: "Povećanje pojmova koje treba naučiti, sa željom i interesovanjem, ipak ne osnovnih referenci; gubitak perspektive, kroz težak i ponekad kontradiktoran put matematičkog istraživanja u prošlosti; gubitak sigurnosti, sa širokim širenjem sumnje u svakodnevnom učenju. "

Sa druge strane, razvoj istorijskih studija pokrenut didaktičkim ciljevima može se sukobiti sa dobrim metodološkim pravilima istorijskog istraživanja: "Teleološki pogled može prevladati, izvrtnjem činjenica kategorije koje se ne odnose na kritične rekonstrukcije prošlosti, mogu biti uvedene ne originalne studije koje mogu da se razviju prema didaktičkoj modi. "

Konačno, u ostatku rada, autor razmatra neke primjere pozitivne interakcije između istorije i didaktike matematike, koja se uglavnom odnosi na uvođenje u

⁴ IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) – Institut za istraživanje u nastavi matematike

⁵ HPM (History and Pedagogy of Mathematics) – Istorija i pedagogija matematike

⁶ ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) – Međunarodna komisija za matematičke nastave

⁷ Hornig W.-S., Lin F.-L. (Eds), 2000, *Proceedings of the HPM 2000 Conference History in mathematics education. Challenges for a new millennium. A satellite meeting of ICME-9.*

nastavne prakse tzv. primjene matematike. Autor, istoričar, uprkos ostvarenoj "saradnji" između njih, bavi se odnosom između istorije i metodike u duboko asimetričnom načinu. Obje liste rizika su samo površno simetrične. Oba didaktičara i istoričara prikazuju neke rizike, ali profesor Pepe vjeruje da postoji mogućnost da saradnjom mogu da se ostvare prednosti za obje discipline.

U simetričnim odnosima oba partnera očekuju da pokrenu neke rizike, ali da dobiju neke prednosti. Ipak, neki istoričari izgleda da su uvjereni da nema naučne prednosti od njihovih interakcija sa didaktičarima. Većina istoričara su pažljivi slušaoci i provokativni kritičari predavanja gdje je neka zanimljiva aplikacija istorije matematike predstavljena, ali oni ne smatraju instrumente analize i rezultate u didaktičkom istraživanju kao korisne u svojim istraživačkim studijama. Mi mislimo, naprotiv, da takođe istoričari mogu da iskoriste neke interakcije sa didaktičarima, bar kada didaktičari prave epistemološku analizu geneze nekog koncepta, prouzrokovano potrebom tumačenja poteškoća učenika i planiranja efikasne aktivnosti u učionici.

Sljedeći citat preuzet iz teksta Jahnke, Knoche & Otte, 1996, je vrlo inspirativan: "Istorija matematike je, kako je mnogi smatraju fundamentalnim istraživanjem, i integrisanje istorije u idejnu nastavu je pogrešno. Značaj istorije leži u njenom doprinosu opštoj kulturi. Čak i više nego za opštu istoriju, to je istina za istoriju nauke da osnovni odnos prema kulturi se graniči na ono što je nazvao "Bildung" u Nemačkoj. Ako se to prihvati, neposredna posledica je da ne možemo da živimo duže sa situacijom u kojoj predavači matematike moraju da preurede predmet koji samo može biti adekvatan za nastavne svrhe. Umesto toga, pitanja i gledišta proistekla iz nastave moraju da postanu sastavni deo metodologije istorijskog istraživanja. Iako mnogi istoričari mogu da strahuju da bi to moglo da nametne ograničenja na sopstveni rad, suprotno je istina. Obrazovanje će podići niz pitanja što će značajno obogatiti istorijska istraživanja (Janke et al. (1996, str. X-XI)⁸."

Sa ovom motivacijom, ovi autori su organizovali konferenciju u Esenu (1992), gdje su se istoričari i didaktičari sastali da predstave svoje doprinose. Dijalog je nastavljen u istoriji i pedagogiji matematičke grupe. Polazeći od osnovnog pitanja da upotreba istorije matematike obuhvata različite karaktere – istraživače u istoriji, istraživače u obrazovanju, nastavnike, studente, Fulbia Furingeti (Furinghetti, 1997) pokušava analizu različitih uloga. Po njenom mišljenju, uloga istoričara će biti uglavnom tumačenje i posredovanje izvora, a neki od njih, koji su razumni u pogledu pedagoških problema, ističu specifične situacije pogodne za didaktičku transpoziciju. Ponekad položaj istoričara izgleda malo "integrisan" i njihova namjera da budu "politički korektni", sa pogleda istorije, doživljava od svijeta obrazovanja skriveno upozorenje da se drži podalje od istorije.

S druge strane, tačno je da je u nekim slučajevima svijet edukatora upao u zamku sa kojom su se susreli u ranijim pokušajima uvođenja računara u nastavu matematike: istorija i računar su oba privlačni i pokazuju dobra rješenja za problem uključivanja studenata u matematiku, tako transpozicija u učionici je sprovedena uglavnom oslanjajući se na glamur i zanemarujući pažljivo postavljenu

⁸ Jahnke H. N., Knoche N. & Otte M. (hrsg.) (1996), *History of mathematics and education: ideas and experiences*, Goettingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

metodologiju i ciljeve. U uzastopnim analizama o riječi "integracija" [istorije u nastavi matematike] Furingheti (2002) podržava ideju korišćenja istorije kao posrednika da slijede ciljeve matematičkog obrazovanja. Ovo znači da razvija analizu ovih ciljeva, zajedno sa izučavanjem studije razvoja koncepata u istoriji. Takav rad mora da se sprovodi od strane edukatora i istoričara u međusobnoj saradnji: primjeri uključuju analize beskonačnog. Prema ovom novom pogledu, pitanje o simetriji dvije uloge (igranim od strane istoričara i didaktičara) više nije od interesa: uloga istorije u nastavi matematike zahtjeva odgovarajuću analizu i odgovarajuću sposobnost.

U ovom pogledu, zanimljivi primjeri dali su Šlomo Viner (Viner, 1988) i Dina Tiroša i Nava Almoga (Tirosh, Almog, 1989) o učenikom razumjevanju kompleksnih brojeva, a Ana Sfard (Sfard, 1991) o konceptu funkcije.

3. Matematika i didaktike matematike

Didaktičko obrazovanje matematičara i realizatora nastave matematike je različito u različitim zemljama. U nekim zemljama oni su nastavnici sa daljom specijalizacijom iz matematike, u nekim drugim su matematičari sa daljom specijalizacijom u didaktici matematike / metodici matematike. Odnosi između ove dvije zajednice (matematičara i istraživača iz matematike obrazovanja) nisu uvijek dobri, čak i u onim zemljama gde su didaktičari podskup matematičara. Ponekad se desi da studije o matematičkom obrazovanju od strane matematičke zajednice jedva da budu priznate kao validno naučno istraživanje (Bartolini Bussi & Bazzini, 2003), a ponekad čak ni to kao što nije rijedak slučaj u nas.

Ponekad razmimoilaženje između matematičara i didaktičara matematike uzima izuzetno vidljive oblike. Na primjer, kao potvrda ovog mišljenja može se uzeti online debata koju je objelodanio Džeri Beker⁹ a koja je počela otvorenim pismom, potpisan od strane grupe matematičara i naučnika američkom sekretaru za obrazovanje, Ričardu Rajliju¹⁰, objavljen u Vašington Post (Washington Post), 18. novembar 1999., uz znatne refleksije. Grubo govoreći, matematičari i naučnici su smatrali da su oni čuvari teorijske prirode matematike, dok istraživači matematičkog obrazovanja bi trebalo da budu oni koji se staraju o potrebama i poteškoćama nastavnika matematike i njihovih učenika. Posmatrači sa strane mogli su da kažu da posmatraju ne baš korektan dijalog u kojem obje zajednice brane svoje ideološke pozicije.

Stav Hajmana Basa¹¹, predsjednika ICMI (The International Commission on Mathematical Instruction), pretpostavlja veoma uravnotežen stav i bio je svjestan da objavljivanje Otvorenog pisma, može da ima opasne posljedice: "Otvoreno pismo je značajno za istaknute matematičare i naučnike, a malo, ili nikako, za nastavnike i edukatore koji su upoznati sa pitanjem nastavnog plana i programa, i koji znaju profesionalno šta je uključeno u nastavu u školama. Mogući podtekst ovog izbora

⁹ Jerry Becker, professor of the College of Education and Human Services, Shouthern Illynois University, Carbondale, USA

¹⁰ Richard Wilson Riley (rođen 2. januara 1933.), američki političar, državni sekretar za obrazovanje u administraciji predjednika Bila Klintona (Bill Clinton).

¹¹ Hyman Bass, professor of the School of Education, University of Michigan, USA. U periodu od 2001. do 2003. bio je predsjednik Američkog matematičkog društva, i predsjednik (1999.-2002.) ICMI-a

jeste predlog da su ovi matematičari i naučnici konačni, a možda i ekskluzivni, intelektualni autoritet prilikom ocene kvaliteta nastavnog materijala u matematici i nauci. Ja sam matematičar, koji je zainteresovan za unapređenje matematičkog obrazovanja u ovoj zemlji, i ja sam duboko uveren da stručnost moje profesionalne zajednice ima vitalnu ulogu u obrazovnom istraživanju i politici. Uradio sam sve od sebe da postignem takav angažman. Ali ja smatram da implikacija, simbolizovana od strane liste potpisnika Otvorenog pisma ne samo da je pogrešna, već opasno i može proizvesti veliku štetu. Ironično, čini da ovakvo mišljenje sugerise da ozbiljna profesionalna saradnja dvije akademske zajednice nije nemoguća."(Hajman Bas, Novembar, 27. 1999.).

U nas, i u našem neposrednom okruženju, nije teško uočiti da postoji snažno protivljenje zajednice matematičara da se aktivnosti akademske zajednice istraživača matematičkog obrazovanja priznaju kao validan naučni doprinos.

Međutim, ono što se čini da nedostaje u ovoj diskusiji je izostanak oslanjanja na veliku količinu istraživačkih studija u oblasti didaktike matematike, koji mogu da daju konzistentnu orijentaciju u razvoju nastavnih planova i programa matematike u školskom sistemu. U stvari, većina studija se bavi dubokim procesima vezanim za teorijsku prirodu matematike pri čemu su uslovima odgovarajućih aktivnosti u učionici istraživani. Iz tih razloga, takve studije mogu korisno biti baza za didaktičke izbore osnovnih nastavnih planova i programa matematike. Primjer otvorenog pisma Rajliju svjedoči o poteškoćama razgovora između dvije naučne zajednice profesionalnih matematičara i profesionalnih didaktičara matematike. Ali i neki drugi nesporazumi su česti. Nedavno je na jednom od najvažnijih međunarodnih foruma matematičara, Međunarodnom kongresu matematičara 1998.¹² i 2002.¹³, jedna od paralelnih sjednica bila posvećena "Nastavi i popularizaciji matematike" (1998) i "Matematičko obrazovanje i popularizacija" (2002). Neki istraživači matematičkog obrazovanja su pozvani kao uvodni predavači (npr. Mihela Artigue¹⁴; Marija Bartolini Busi¹⁵; Mogen Alan Nis¹⁶). Međutim, prirodno se pojavilo pitanje: Zašto je učenje matematike zajedno sa popularizacijom matematike? Da li je to način da se još jednom naglasi da je za matematičare, učenje matematike je slično popularizaciji matematike? Kakvo god da je mišljenje matematičara, moramo insistirati na tome da su Matematike i Istraživanje matematičkog obrazovanja srodne ali, ipak, drugačije domen. Popularizacija može biti u vezi sa samo nekim aspektima istraživanja u didaktičkoj matematici, kao studentska motivacija i reorganizacija na polju znanja oko nekoliko osnovnih ideja. Ali nastava je mnogo važnija (i mnogo drugačija) nego što je to popularizacija: ona uzima novi akcenat sa istraživanja u određenoj oblasti matematičkog obrazovanja. Institucionalno matematičari treba da budu zainteresovani za nastavu matematike, u cilju edukacije budućih generacija matematičari najmanje. Dakle, možemo postaviti sljedeće pitanje (Bartolini Bussi & Bazzini, 2003): Može li saradnja između didaktičara matematike i matematičara biti postavljena na ravnopravnoj osnovi?

¹² International Congress of Mathematicians, Berlin, August 18-27, 1998

¹³ International Congress of Mathematicians, Beijing, China, August 20-28, 2002

¹⁴ Michèle Artigue, mathematics department of the University Paris 7

¹⁵ Maria G. Bartolini Bussi, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Modena e Reggio Emilia

¹⁶ Mogens Allan Niss, The Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Denmark

Drugim riječima, mogu li didaktičari matematike profitirati od razvoja matematike i obrnuto, mogu li matematičari profitirati od razvoja didaktike matematike?

Prvo pitanje nije trivijalno. Naravno didaktičari su zainteresovani za razvoj novih matematičkih ideja, jer su one izvor i podsticaj za njihovu didaktičku transpoziciju, ali postoji jedan dodatni doprinos koji matematičari mogu da ponude. Objasnjavajući svoje načine razmišljanja u rješavanju problema oni mogu dati korisne savjete za razumijevanje načina razmišljanja studenata. U tom smislu, mi smo takođe željeli da pomenemo oštar glas jednog od najvažnijih savremenih italijanskih matematičara, Đovana Prodi¹⁷, kome akademska zajednica istraživača matematičkog obrazovanja mnogo duguje, za njegovu kulturnu i političku pomoć i njegovo lično učešće u problemima nastave matematike. Odlomak je preuzet iz završnog obraćanja na nacionalnom seminaru na temu "Šta je istraživanje u didaktičkoj matematici? održan u Pizi, 1991.

[...] Uprkos potrebi razmatranja toliko mnogo faktora u obrazovanju matematike, ja vjerujem da postoji privilegovani sektor za istraživanje, skoro izolovan i povoljan za matematičare angažovanim u didaktičkim istraživanjima: Ja, pri tome, mislim na psihologiju kognitivnih procesa. U stvari, s jedne strane, matematički procesi su među najjasnijim za analizu razmišljanja i, s druge strane, doprinos matematičara na ovom polju istraživanja je od suštinskog značaja. (Prodi, 1992)¹⁸.

Drugo pitanje (tj. ako matematičari mogu da profitiraju od didaktičara) nije trivijalno previše. U svom radu "O dokazivanju i napredku u matematici", Vilijem Tirston¹⁹ (Thurston, 1994) postavlja pitanje "Kako matematičari unapređuju ljudsko razumijevanje matematike?", koji je uramljen u opšte stanovište o načinima da razumiju i misle o matematici. On priznaje da postoji veći spisak različitih načina razmišljanja o tome, ili o shvatanju koncepta, nego spisak različitih logičkih definicija. Osim toga, on tvrdi da "ljudsko razmišljanje i razumijevanje ne rade samo na jednom putu, kao što to radi računar sa jedne centralne procesorske jedinice. Naši mozgovi i umovi izgleda da se organizuju u raznovrsnost odvojenih, moćnih objekata. Ovi objekti rade zajedno labavo "govoreći" jedno drugom na visokom nivou, umjesto na nižem nivou organizovanja" (*ibid*, str.164). Kasnije, on prepoznaje da transfer razumijevanja sa jedne osobe na drugu nije automatski, nego "težak i lukav". "Dakle, da analiziramo ljudsko razumijevanje matematike, važno je uzeti u obzir **ko** razumije **šta** i **kada**. Matematičari su razvili navike komunikacije koje su često nefunkcionalne" (*ibid*, str.165)²⁰. Iz ove perspektive, didaktičko istraživanje vezano za to koliko mislimo o matematici, kako pišemo i kako prihvatamo razumijevanje stiče osnovni značaj. Kao posljedica toga, matematičari mogu dosta profitirati od rada didaktičara: mi snažno podržavamo ovu tvrdnju.

4. Metodika matematike i školska praksa

¹⁷ Giovanni Prodi (25.07.1925. 20.01.2010.), italijanski matematičar i edukator matematike

¹⁸ Prodi G., (1992), *Ricerca in Didattica della Matematica, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 15 (10), 987-994.

¹⁹ William Paul Thurston (October 30, 1946 – August 21, 2012), američki matematičar

²⁰ Thurston W.P., 1994, *On proof and progress in mathematics*, Bulletin of the American Mathematical Society, 30, (2), 161-177.

Do sada smo analizirali dva slučaja mogućeg (ali još ne realizovanog) dijaloga i saradnje između zajednica istraživača matematičkog obrazovanja, fokusirajući se na odnose između didaktičara (matematike) i istoričara (matematike), s jedne strane, i između didaktičara matematike i matematičara, s druge strane. Sada prelazimo na drugi slučaju dijaloga, koji bi trebao da bude sproveden bar u određenim situacijama, odnosno dijalog između istraživača u matematičkom obrazovanju i realizatora nastave matematike, tj. školske prakse. Teorija i praksa (odnosno teorijski pristup disciplini i njeno transponovanje u školskoj praksi) je često smatrana suprotnim polovima. U posljednjih nekoliko decenija, dijalektička priroda odnosa teorija-praksa postala je sve više prepoznata i prikazivana u istraživačkim studijama, koje je dosta njegovao dijalog između dva pola (Brown and Cooney, 1991; Bazzini, 1991; Burton, 1991; Wittmann, 1991; Steinbring, 1994). Konkretno, grupa istraživača je počela na ICME5²¹ u Adelaidu 1984 projekat pod nazivom "Sistematska saradnja između teorije i prakse u obrazovanju matematike"²² (skraćeno SSTP) izričito posvećen da ispita ovo problematično polje u pogledu međunarodne saradnje. Od samog početka, napravljen je pokušaj da se uporedi matematičko obrazovanje sa drugim specifičnim oblastima u cilju izrade aspekata graničnih uslova posredovanja znanja između dva pola.

Nakon konferencije u Adelajdu postoji stalni interes u odnosima između teorije i prakse u matematičkom obrazovanju koja je podrazumijevala da oboji praktične napore i teorijske refleksije, o čemu svjedoče naknadne SSTP Konferencije, održane u Holandiji 1986., u Londonu 1988., u Nemačkoj 1990. i u Italiji u 1994. Jasno je navedeno da:

"Teorija i praksa dugo nisu mogli da prihvate da se takmiče da daju "pravu" sliku o tome šta se dešava u učionici: oni odražavaju i govore o istim procesima i strukturama, ali sa različitim aspektima, iz različitih perspektiva, koristeći različite načine razmišljanja. Ono što je potrebno, dakle, saradnja između teorije i prakse, je dijalog gde različiti glasovi slušaju jedni druge" (Siger, 1994)²³.

Ukratko, svaka koncepcija koja se dodjeljuje "teoriji" da instruiše "prakse" je osuđen na propast: opšti konsenzus o neophodnosti razvijanja saradnje je naširoko rasprostranjen. Interesantan doprinos su dali Joao Ponte de Ponte²⁴, Joao Filipe Macerda Matos²⁵, Herik Manuel Guimaraes²⁶, Leonol Kulha Leal²⁷ i Ana Paula Kanavaro²⁸ iz Centra za istraživanje obrazovanja Fakulteta nauke Univerziteta u Lisabonu (Ponte, Matos, Guimaraes, & Canavarro, 1994), kada se raspravlja o novoj vrsti stručnog znanja za nastavnike matematike. Oni podržavaju ideju mješanja matematičkog sadržaja sa pedagoškim znanjem. Po njihovom mišljenju takvo mješanje mora da se osloni na različite komponente trenutnog znanja da proizvede

²¹ ICME-5 (1984) — Adelaide (Australia)

²² Systematic Co-Operation between Theory and Practice in Mathematics Education. Mini-Conference at ICME 5. Topic Area Research and Teaching (Adelaide, Australia, August 25-29, 1984).

²³ Seeger F., 1994, Co-operation between Theory and Practice in Mathematics Education, in Gaulin C., Hodgson B. R., Wheeler D. H., Egsgard J. C. (eds.), *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education*, 282-5, Les Presses de l'Université Laval.

²⁴ João Pedro da Ponte, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

²⁵ João Filipe Macerda Matos, Universidade de Lisboa, Portugal

²⁶ Henrique Manuel Guimãraes, *Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências* University of Lisbon, Portugal,

²⁷ Leonor Cunha Leal,

²⁸ Ana Paula Canavarro

restrukturirane nastavničke vještine znanja. Ovaj pedagoški sadržaj znanja (nazvan "matematička didaktika"), ima mnogo širi opseg od same zastupljenosti predmeta: ona mora da obuhvati "sveobuhvatno kompleksnost imidža, principa i pravila za akciju, neke opšte, neke konkretnije, organizovane sa jasnim obrazloženjem, imajući u vidu specifičnu prirodu osnovnog sadržaja ali i dovoljno snažna da vodi aktivnost nastavnika "(str. 358)²⁹. Nakon ove perspektive, Hans Steinbring (Steinbring, 1998) istražuje određenu komponentu stručnog znanja za nastavnike matematike, nazvanu "Epistemološko znanje matematike u okruženja socijalnog učenja". On tvrdi da "nastavnici sigurno trebaju matematička znanja ali i didaktička znanja. U domeni didaktičkih znanja oni takođe treba da posjeduju epistemološka znanja, tako da su u mogućnosti da procjene epistemološka ograničenja matematičkog znanja u različitim društvenim postavkama nastave, učenja i komuniciranja unutar matematičke učionice. Ova važna komponenta epistemološkog poznavanja matematike u socijalnom okruženju nažalost nije dovoljno sistematizovana. Toj komponenti znanje nije lako ni jednostavno podučavati buduće nastavnike. Umesto toga, epistemološko znanje se često nudi u jednom broju elemenata primerenog znanja što se odnosi na studije slučaja analiza nastavnih epizoda ili intervju sa studentima, a obuhvata istorijske, filozofske, i epistemološke konceptualne ideje "(str.160)³⁰.

Ovaj pojam je istraživao od strane više autora sa aspekta kako matematički znaci i simboli dobijaju značenje u interaktivnom društvenom procesu nastave i učenja i kako to podržava tvrdnju da ova vrsta teorijskog stručnog znanja za nastavnike matematike kombinuje teorijske aspekta sa praktičnim pitanjima. To ne znači linearni tok od teorije do prakse. Umjesto toga, interakcija, ravnoteža između teorijskih i praktičnih uslova smatra se poželjnijom u sljedećem smislu: "Dok praktična obuka često preneglašava praktične potrebe na način ignorisanja teorijskog osjećaja i teorijske mogućnosti za svakodnevnu nastavnu praksu (često se od studenata nastavnčkih programa zahtijeva da se opskrbe repertoarom praktičnih pravila i tradicionalnih metoda nastave bez bilo kakvog teorijskog opravdanja), teorijsko obrazovanje ne smije da odvoji teoriju i praksu. Nastojanje razvijanja studentskih teorijskih sposobnosti da ne mogu vidjeti iza praktičnih površinskih problema bi bilo poželjna kompetencija realizatora nastave matematike u njihovoj kasnijoj nastavnoj praksi "(*ibid* str. 187)

5. Dva primjera projekata na osnovu dijaloga između teorije i prakse

Predstavljamo, sa nekim detaljima, preuzetim iz dostupne literature, dva slučaja istraživačkih projekata, u kojem su učestvovali realizatori nastave matematike zajedno sa univerzitetskim istraživačima. Oni se odnose na teorijskom razmišljanju u geometriji i algebarskom rješavanju problema. U ovoj prezentaciji mi se ne bavimo rezultatima studija (za koje su date samo reference u literaturi), već sa efektima na studije dijaloga između potreba teorijskog istraživanja u didaktici.

²⁹ Ponte J., Matos J.F., Guimaraes Leal C. & Canavarro A.P.,1994 Teacher's and students' view and attitudes towards a new mathematical curriculum: A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 347-365.

³⁰ Steinbring H.,1998, *Elements of Epistemological Knowledge for Mathematics Teachers*, Journal of Mathematics Teacher Education, 1, 157-189.

5.1. Prvi primjer: *Pristup teorijskog mišljenja u geometriji*

Razvoj matematičko mišljenje se, u posljednje vrijeme, tretira kao jedan od ekstremno važnih ciljeva nastave matematike. Sa elementima matematičkog mišljenja, zainteresovani čitalac, može se upoznati posredstvom tekstova: Romano (2008): *O potrebama za razumijevanje matematičkog mišljenja*, Romano (2009b): *Šta je algebarsko mišljenje?* i Romano (2009v): *O geometrijskom mišljenju*.

U ranim devedesetim istraživački timovi na univerzitetima u Đenovi (P. Boero), Modeni (M. Bartolini Busi), Pizi (M.A. Mariotti) i Torinu (F. Arzarello) počeli su nezavisno jedni od drugih da rade na problemu teorijskog razmišljanja u matematici i dokazivanju. Aspekt teorijskog razmišljanja u matematici u pomenutim projektima tretiran je kao neophodan.

Domen 'Matematika', kako je razvijena u zapadnoj kulturi, nije empirijska disciplina. Neki fundamentalni rezultati matematike mogu biti dobro korišteni u svakodnevnom iskustvu. Razvoj matematike dovodi do određene sistematizacije, gdje su rezultati izvedeni od deduktivnog rezonovanja iz nekih zajedničkih pretpostavki. U matematici, uloga teorema i dokaza je važna, dok je u matematičkom obrazovanju dugo vremena bio trend, čak i na međunarodnom nivou, izostavljanje teorema i dokaza iz nastavnih programa matematike kao reakcija na formalni pristup sedamdesetih godina (vidjeti Nastavni plan i ocjenjivanje standarda za školsku matematiku (1989), Standardi za profesionalnu nastavu matematike (1991), i Procjenjeni Standardi za školsku matematiku (1995)).

Pomenuti istraživački timovi smatrali su neophodnim da se suprotstave tom trendu. Međutim, rekavši da je u matematici deduktivna struktura važna, ne znači da se u školskom sistemu matematika mora da uči od početka kao deduktivna struktura. Čak i u odbrani značaja dokaza u nastavi matematike, postoji razlika između perspektive matematičara i perspetive didaktičara. "Istraživački matematičari često zanemaruju aspekt primjene i ograniče sebe na čisto deduktivni pojam dokaza. [...] Nastavnici, s druge strane, moraju da uzmu u obzir doprinos koji dati dokaz čini našem razumijevanju stvarnosti. Sva ova pitanja koja praktični matematičari mogu dozvoliti sebi igraju važnu ulogu u nastavi i učenju. Dokaz ne trebalo da se uči u matematičkoj učionici bez razmatranja odnosa matematike prema realnosti. Ovo podrazumeva visok stepen epistemološke složenosti (Hanna and Jahnke, 1993, str. 432)³¹. " O potrebi postojanja kognitivnog jedinstva dokaza i pripadne neophodne argumentacije uz taj dokaz, pogledati, na primjer, tekst Romano, 2013.

Istraživačke studije su sprovedene na različitim nivoima školovanja (od osnovne do srednje škole). Prisustvo nastavnika je bila determinanta u svakoj fazi (projektovanje, implementacija, zbirka podataka i analiza). Njihova osjetljivost i sposobnost pokazala se bitno ne samo u pažljivom rukovođenju razredne aktivnosti, ali i u izradi analitičkih alata i teorijskog okvira u didaktičkoj matematici. Posljednje, ali ne i najmanje važno, a učestvuje u kreiranju eksperimenata, nastavnici su stavljeni u stanje produblivanja nekih pitanja koja se tiču teorijskih

³¹ Hanna G. & Jahnke H. N. ,1993, *Proof and Application*, Educational Studies in Mathematics, 24, 421-438.

dimenzija matematike i njenog odnosa sa iskustvenom realnošću. Drugim riječima, teorijska dimenzija matematike postala je dio intelektualnog života nastavnika.

Većina nastavnih eksperimenata, razvijenih u projektu, imali su neke zajedničke osobine, od faze dizajna do realizacije u učionici³²:

1. izbor, na osnovu istorijsko-epistemoloških analiza, polja iskustva, bogatih konkretnim i semantičkim pozitivnim referantama (npr. perspektivno crtanje, sunčeve senke, Kabri-konstrukcije; zupčanici, veze i instrumenti za crtanje);
2. projektovanje zadataka u okviru svake oblasti iskustva, što zahtjeva da studenti učestvuju u čitavom procesu proizvodnje pretpostavki, izgradnje dokaza i generacija teorijske organizacije;
3. upotreba različitih nastavnih organizacija (npr. rješavanje pojedinačnih problema, mala radna grupa, razredna diskusija organizovana od strane nastavnika, predavača);
4. podsticanje svih vrsta "prljavog" uređivanja (tj. crteži, numerička iskustva) studentskih ideja i procesa koji dolaze prije konačnog čistog teksta (tj. šta učenik smatra za njegovu konačnu verziju da se dostavi nastavniku),
5. eksplicitno uvođenje primarnih izvora iz istorije matematike u učionice na bilo kom nivou škole.

Sigurno svaka od ovih karakteristika može biti dopunjena uvažavanjem drugih pristupa. Izbor aktivnosti sa konkretnim referentama, na primjer, tipičan je pristup "teorije realističkog matematičkog obrazovanja", koja je razvijena u Utrehtu od strane Freudentalovih sledbenika (Presmeg, 2001; Romano, 2009a). Bez obzira da li je fokus na maloj grupi ili na čitavom razredu, rasprava je tretirana pristupom razvijenim od Erne Jakel i Pola Koba (Yackel & Cobb, 1996) pod nazivom 'socio-matematičke norme'. Uvođenje istorijskih izvora u matematičke razrede je uobičajena praksa u (barem) manjim grupama istraživača i praktičara u matematikom obrazovanju (videti, na primjer poglavlja 5, 7, 9 i 10 u Fauvel & van Maanen, 2000)³³. Ono što se čini originalno (Bartolini Bussi & Bazzini, 2003) je sljedeće:

- Glavni fokus na teorijskim dimenzijama matematike (uglavnom razvoj teorema i dokaza).
- Oblikovanje takvih eksperimenata u teorijskom okviru, na osnovu ideja Vigotskog, gde je svaki od elemenata stavljen u odnos sa drugima.

Prema nasleđu italijanske tradicije, pažnja je posvećena isključivo geometrijskim teoremama. Neki teorijski konstrukti razvijeni ranije su preuzeti od svih timova, implicitno ili eksplicitno, da pomognu u izradi, sprovođenju i analizi razrednih eksperimenata, čiji je cilj bio da se stvore uslovi za većinu učenika da budu u stanju da proizvedu dokaze (Bartolini) aktivnost (videti konstrukciju polje

³² Preuzeto iz: Maria G. Bartolini Bussi & Luciana Bazzini (2003): *Research, Practice and Theory in Didactics of Mathematics: towards Dialogue between Different Fields*; Educational Studies in Mathematics, Volume 54, Issue 2-3, pp 203-223

³³ Fauvel J. & van Maanen J. (eds.), 2000, *History in Mathematics Education: the ICMI Study*. Dordrecht, Kluwer Academic Publisher.

iskustva od Boera, Mariotti et al., 1997) i kvalitet razredne interakcije (vidi konstrukciju matematičke diskusije) (Mariotti et al., 1997.)³⁴.

Prema dostupnim izvještajima italijanskih edukatora, ishodi pedagoških eksperimenata bili su začuđujući, ako se dobijeno upoređi sa opštim uvjerenjem o poteškoćama (ili nemogućnosti) suočavanja sa teorijskom dimenzijom matematike - većina učenika čak i u obaveznom obrazovanju (npr. 5-8 razreda) uspjelo je u sagledavanju neophodnih pretpostavki ali izgradnje dokaza. Da su ove studije bile zasnovane na akcionom istraživanju, proces se mogao ovde zaustaviti sa proizvodnjom i dokumentacijom činjenica, paradigmatički primjeri poboljšanja u nastavi matematike. Ali drugi cilj "istraživanja za inovacije" u vezi je sa proučavanjem uslova za realizaciju, kao i mogućih faktora u osnovi efektivnosti, drugim riječima, ovaj uspjeh je morao da bude tretiran kao didaktički fenomen i doveden do teorijskog pojašnjenja.

To je stvorilo potrebu uključivanja, na eksplicitan način, u rezultate postojećih studija i teorijske okvire, gdje su ostali teorijski konstrukti dodati u dvije pomenute oblasti ("iskustvo" i "matematička diskusija"). Takve teorijske konstrukcije mogu protumačiti postojeće istraživačke studije na integrisan način i mogu predložiti teme za istraživačke agende (Mariotti et al., 1997). Dva specifična elementa teorijskog okvira su opisani niže.

Na osnovu istorijsko - epistemoloških analiza, matematička teorema je zamišljena kao sistem od tri međusobno povezana elementa: izjava (odnosno hipoteza proizvedena kroz eksperimente i argumente), dokaz (odnosno poseban slučaj argumentacije koja je prihvaćena od strane matematičke zajednice) i referentna teorija (koja obuhvata ne samo postulate već i pravila zaključivanja). Ova koncepcija ističe važnost da su studenti suočeni sa ovim složenostima radije nego sa mehaničkim ponavljanjem navedenih dokaza. Kognitivno jedinstvo (Pedemonte, 2002)³⁵ je namjenjeno kao kontinuitet između procesa prepoznavanja proizvodnje i izgradnje dokaza, prepoznatljiv u neposrednoj prepisci između prirode i objekata mentalne aktivnosti uključenih u projekat. Kognitivno jedinstvo je kognitivno dupliranje procesa prepoznatljiv u aktivnosti većine matematičara (Thurston, 1994)³⁶ i korišten takođe u racionalnoj rekonstrukciji razvoja dijelova matematičkih teorija (vidi, na primjer u dijalektičkom procesu izgradnje dokaza i pobijanja, Lakatos, 1976). U didaktičkom istraživanju je, s jedne strane, težak alat za dizajniranje aktivnosti unutar dometa studenata, a na drugoj i neuspjeh. Kasnije, ovaj teorijski okvir je negdje drugo bio primjenjen i rafiniran kako bi se koristio za tumačenje i /ili da se predvidi nastup učenika u određenim slučajevima. Na primjer, Ferdinando Arzarello (Arzarello, 2000) je modelovao cio proces proizvodnje pretpostavki i izgradnje dokaza u bogatoj oblasti iskustva Kabri konstrukcije, sa fino odrađenim analizama nekoliko vrsta prevlačenja. Detaljna posmatranja nastavnika-istraživača u učionici, na jednoj strani, su predložili nove pravce istraživanja (kao što je razvoj

³⁴ Mariotti M. A., Bartolini Bussi M., Boero P., Ferri F. & Garuti R., 1997, *Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition*, Proceedings of the 21st PME Conference, Lahti, Finland, (Vol. 1, pp. 180-195).

³⁵ Pedemonte B, (2002), *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*, These de doctorat, Université Joseph Fourier-Grenoble I, Università di Genova

³⁶ Thurston W.P., (1994), *On proof and progress in mathematics*, Bulletin of the American Mathematical Society, 30, (2), 161-177.

teorije semiotičkog posredovanja, pogledajte Bartolini Bussi et al. 1999; Bartolini Bussi & Mariotti, 1999; Mariotti & Cerulli, 2002), a sa druge strane su tumačili pozivajući se na postojeću literaturu i nove studije razvijene zajedno sa njima.

5.2. Drugi primjer: *Algebarsko rješavanje problema*

Projekat algebarskog razmišljanja koji ćemo opisati, preuzet iz teksta Bartolini Bussi & Luciana Bazzini, 2003, još je jedan primjer bliske saradnje između akademskih istraživača i nastavnika. (O elementima algebarskog mišljenja na našem jeziku, čitalac može pogledati tekst Romano, 2009b.) Grubo govoreći, možemo razlikovati tri faze, koje uključuju dvije komponente (članovi akademske zajednice i nastavnici) sa različitim ulogama i ekspertizama.

❖ Prva faza

Projekat je počeo sa nastavničkim posmatranjem učenika u matematičkoj učionici kada su rješavali algebarske problema (tj. problemi koji uključuju korišćenje algebarskih izraza). Posebnu pažnju ovim opservacijama obratili su nastavnici koji su uočavali da kod učenika do izražaja dolaze nerazumijevanja upotrebe algebarske simbolike. Analizom učeničkih aktivnosti pri tim rješavanjima ustanovljeno je da je jedna broj pomenutih problema ukorijenjen u učeničkoj nestručnosti u izgradnji i upravljanju formulama, koje, po nastavničkim mišljenjima, trebalo da budu već inkorporirane u ovladane učeničke kognitivne ravni. (Arzarello, Bazzini and Chiappini, 1993, 1994b, 1994c). Ova osnovna razmatranja dovela su do dužeg razgovora o samoj prirodi algebarskog razmišljanja i na izgradnji značenja u algebri. Takva diskusija uključila je različite perspektive, strogo povezane i u vezi sa psihološkim, epistemološkim i didaktičkim aspektima. Kao posljedica, potreba za teorijskim istraživanjem u dinamici koja se u osnovi algebarskih razmišljanja pojavila u cijeloj kompleksnosti.

❖ Druga faza

Na drugu fazu treba gledati kao na teorijsku refleksiju o algebarskom mišljenju. U ovoj perspektivi, uloga algebarskog jezika je naročito važna. Tačnije, možemo reći da predstave i simboli matematike uspostavljaju semiotičke sisteme koji su od fundamentalnog značaja u algebri. U ovom okviru, italijanski istraživači bili su zaokupljeni teorijskim modelom pogodnim da se opiše dinamika nekih tipičnih procesa. Ideje, kojih se još Frege držao o semantici, smatraju se pogodnim za tumačenja simboličnih izraza algebre (Arzarello, Bazzini and Chiappini, 1994a, 1994b, 1994c). Fregeov epistemološki trougao (Frege, 1892)³⁷ je bio primjenjen na algebarske izraze u cilju razlikovanja dvije osnovne komponente (smisao i oznaka) nekog algebarskog izraza.

Iako smo bili svjesni da Frege nije bio zainteresovan o razmišljanju djece, a on bi vjerovatno odbio psihološku interpretaciju njegovih uslova, razlika između smisla i oznake datog algebarskog izraza, djelovala je veoma korisno u istrazi algebarskog razmišljanja. Prema ovim linijama, italijanski edukatori su prilagodili model Fregea za naše potrebe. Prateći Fregeovu terminologiju, napravljene su

³⁷ Frege, G. (1892), *Über Sinn und Bedeutung*, Zeitsch. für Philosophie und Philosophische Kritik, C, 25-50.

razliku između smisla i oznake izraza: oznaka izraza je objekat na koji se odnosi izraz, dok je smisao način na koji je objekat dat nama.

Mi smatramo dozvoljene algebarske transformacije onih koji omogućavaju da se različiti izrazi koji imaju (eventualno) drugačiji smisao nego zadržati istu denotaciju. Stoga, algebarske transformacije (kao, na primjer, dodavanje istog broja na obje strane jednačine) su invarijantne s poštovanjem prema denotacijama simboličkog izražavanja koje one predstavljaju, zato što one mogu promijeniti smisao, ali ne denotacije samog simboličkog izraza. Ne važi obrnuto. Ako dva različita izraza imaju iste denotacije, oni nisu uvijek svodljive jedna drugoj posredstvom neke algebarske transformacije (na primjer, dvije jednačine $x^2 + 2 = 0$ i $x^2 + 5 = 0$, posmatrane u uređenom polju realnih brojeva \mathbf{R} , imaju prazan skup kao denotacije). Dijalektika između smisla / koncepta i oznake / denotacije omogućava gledanje na algebarsko rezonovanje kao igru tumačenja: data formula može aktivirati različita smisla a manipulacija simbola promoviše prolaza sa jednog značenja ka drugom. Ukratko, raditi algebru kao igru tumačenja, smatra tumačenje datih formula u uslovima aktiviranih značenja i srodne transformacije u skladu sa ciljem problema.

❖ Treća faza

Treća faza se uglavnom bavi razmišljanjem o nastavnom proces učenja. Kao takva, dvije komponente uključuju univerzitetske istraživače i nastavnike da blisko sarađuju. Postoji opšti konsenzus da kognitivni procesi, koji se razvijaju u nastavi / učenju algebre, ne mogu biti odvojeni od analize specifičnih kulturnih praksi i specifičnih simboličkih alata koji su korišteni. Teorijska refleksija na samu prirodu algebarskog razmišljanja fokusira svjetlo na neka tipična ponašanja učenika. Čini se da veoma često vrsta rigidnosti podstiče učenike da se vjeruju da postoji jedan-na-jedan korespondencija između značenja i oznaka. Pri identifikaciji oba, prvi prestaje da bude značajan i učenik ostaje samo sa trivijalnom oznakom: simboličnim izrazom sam sebe označava. Tako algebra postaje čista sintaksa i ništa više.

Model skiciran u prethodnom pasusu prikazuje algebarske poteškoće kao nedostatak u savladavanju nepromenljivosti oznaka / denotacija u pogledu smisla (Bazzini, 1997, 1998). Na primjer, aktivnosti pseudostrukturnih učenika analizirani su Liora Linčevskog i Ana Sfarda (Linchevsky and Sfard, 1991). One su ustanovile da ovi učenici ne prepoznavaju, kada okrenu jednačine, nepromenljivost postavljenog koncepta istine, odnosno skup brojeva koji se ne smiju mjenjati pod "dozvoljenim" operacijama. Pošto oni ne vide takvu nepromenljivost, oni postaju "formalistički", u smislu da oni otkrivaju osnovnu nesposobnost da poveže algebarska pravila sa zakonima aritmetike pa formalne manipulacije ostaju kao jedini izvor značenja.

S druge strane, dobri rješavači pokazuju veliku fleksibilnost u aktiviranju i iščekivanju drugačijih značenja date formule (na primjer $x^2 - 4$ može se vidjeti kao razlika između x^2 i 4 i/ili kao rezultat $(x + 2)(x - 2)$) ali i kao prolaz iz jedne u drugu. Interakcija između značenja i oznake datog algebarskog izraza, kao što je opisano u teorijskom modelu, daje konkretne prijedloge za dizajniranje odgovarajućih didaktičkih situacija. (Arzarello, Bazzini and Chiappini, 1995)³⁸.

³⁸ Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1995), *The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice*, Proceedings of PME19, Recife, Brazil, Vol I, 119-134.

Konkretno, neke glavne karakteristike odgovarajućeg planiranja nastavnih aktivnosti su identifikovane. One su uglavnom usmjerene ka sljedećim ciljevima³⁹:

1. motivisanje učenika za njihovo planiranje aktivnosti;
2. podržavati ih u izboru konkretnih ciljeva i naknadnim procesima iščekivanja i planiranja;
3. ističući funkcionalnost sistema znakova u kojima se znanje koje će biti stečeno mora biti inkorporisano, prema projektu nastavnika;
4. podržavajući matematičko predavanje u učionici.

Ukratko, odnosi između spoljašnjeg predstavljanja, matematičkog diskursa i mentalnih slika se mogu skicirati na ovaj način u okviru didaktičkih aktivnosti. Struktura spoljašnje reprezentacije utiče na mogućnost razvijanja značenja matematičkog diskursa o osobinama matematičkog objekta, počev od toga kako se osobine spoljne reprezentacije koriste. To je u skladu sa većinom istraživačkih pronalazaka koji se odnose na upotrebu reprezentacije i simbola u matematičkim aktivnostima (vidjeti, na primjer, Radford, 2000). Ono što je drugačije u našoj studiji je izgradnja teorijskog alata (odnosno prilagođen epistemološki trougao) koji pomaže u analizi same prirode algebarskih izraza i, shodno tome, da se tumače strategije učenika u rješavanju problema.

6. Zaključci

Dva gore opisana istraživačka projekta su u centru onoga što se zove italijanska paradigma inovativnih istraživanja (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998). Korjeni ovih projekata su u trendovima istraživanja u didaktičkoj matematici, prisutnih u Italiji više decenija. U citiranom radu, autori su rekonstruisali ove korjene, identifikujući različite istraživačke tradicije: *koncept-zasnovane didaktike; inovacije u učionici; laboratorija za posmatranje procesa*. Argumenti citiranog rada su ukratko sumirani na sljedeći način.

Prva dva trenda počela su u dva različita mjesta (univerzitet / škola), a sprovode ih različite akademske zajednice (matematičari / nastavnici matematike); iskazane posredstvom različitih okruženja (nastava opšte matematike / 'specifične' situacije); tražeći odgovore za različite potrebe (da osmišljavanje ideje za unapređenje nastave matematike / za poboljšanje nastave matematike); uz primjenu različitih metodologije (top-down model / akciona istraživanja); usmjerena su na različite probleme (proizvodi / kratkoročni i dugoročni procesi u nastavi matematike) i ponudili različite proizvode (udžbenici, testovi, nastavni ptogrami / projekte za programske inovacije). Treći trend je tipičan primjer obrazovnih studija. On se sastojao u osnovnim istraživanjima o kratkoročnim procesima, razvijenim oko laboratorijskih eksperimenata (gdje bi se sama učionica koristila kao laboratorija), sa analitičkim alatima pozajmljenim iz psihologije, sociologije, pedagogije i tako dalje; metodologija je bila zasnovana na eksperimentalnoj indukciji, kao što je zamišljeno u prirodnoj nauci.

Sličnih pokušaja bilo je i u drugim zemljama (npr. Francuska i Njemačka, vidi Arzarello & Bartolini Bussi, 1998, za detaljnije upoznavanje) uprkos prisustvu sličnih tradicija, pritisku akademske zajednice teorijskih istraživanja (npr. 'koncept

³⁹ Preuzeto iz: Maria G. Bartolini Bussi & Luciana Bazzini (2003)

zasnovan na istraživanju' ili 'laboratorijsko posmatranje procesa') i oblici akcionog istraživanja (bliže 'inovacija u učionici '). U Italiji (kao u nekim drugim zemljama, kao što je, na primjer, Holandija) drugačiji put je bio praćen, odnosno progresivna integracija obje tradicije.

Dva navedena projekta su primjeri ishoda ove integracije. U oba projekta⁴⁰:

- (1) duboka analiza prirode matematike je polazna tačka istraživanja, kao u 'koncept zasnovan na istraživanju';
- (2) jako angažovanje nastavnika (iz škole i univerziteta) koji rade u svojim učionicama je uslov da se izvrši eksperimentalni deo istraživanja, kao 'inovacija u učionici';
- (3) modelovanje pojedinačnih i društvenih procesa je realizovan, kao u 'laboratorijskom posmatranju procesa'.

Integracija ovih tradicija se ogleda u udruživanju realizatora nastave matematike i istraživača matematičkog obrazovanja, u saradnju sa didaktičarima sa univerziteta i sa drugim stručnjacima (npr. psiholozima, kognitivni naučnicima, i tako dalje) vođeni potrebama indukovanim njihovom vlastitom učioničkom praksom. U okviru ovih konteksta profesionalni didaktičari i nastavnici su razumijeli potrebu za saradnjom. Italijanski edukatori sublimiraju stav da, kao i u slučaju saradnje sa nastavnicima, saradnja istoričara i matematičarima takođe može biti plodonosna. Šteta je što taj interes još uvijek nije uočen, kao što je pokazano u prvom dijelu ovog rada. Još smo daleko od 'divnog prijateljstva' kojem smo se nadali od Ane Sfard (1998), kao 'refleksivan odnos u kome se poštuju razlike i različitost postaje izvor uzajamnog napretka'.

Analiza o tome gdje i kako se takav dijalog treba promovisati, gdje i kako to može da bude korisno i šta može biti prepreka je potreba za dalja ispitivanja.

Literatura

- Arzarello F., (2000), *Inside and Outside: Spaces, times and language in proof production*, Proc. 24th PME Int. Conf., Hiroshima (Japan) (vol. 1, pp. 23-38).
- Arzarello F. and Bartolini Bussi M. G. (1998), *Italian Trends in Research in Mathematics Education: A National Case Study in the International Perspective*, in J. Kilpatrick and A. Sierpinska (eds.), *Mathematics Education as a research domain*;
- Arzarello F., L.Bazzini, G.Chiappini, (1993), *Cognitive processes in algebraic thinking: towards a theoretical framework*, Proceedings PME-XVII, Tsukuba, Japan, (Vol.I, pp. 138-145).
- Arzarello F., L.Bazzini, G.Chiappini, (1994a), *The process of naming in algebraic thinking*, Proceedings PME XVIII, Lisboa, Portugal, (Vol. I, pp. 40-47).
- Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1994b), *Intensional semantics as a tool to analyze algebraic thinking*, Rendiconti del Seminario Matematico, Univ. Torino. 52, N.2, 105-125.
- Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1994c), *L'Algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche*, Progetto Strategico TID, Quad.N.6, Consiglio Nazionale delle Ricerche.
- Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1995), *The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice*, Proceedings of PME19, Recife, Brazil, (Vol I, pp. 119-134).

⁴⁰ Preuzeto iz: Maria G. Bartolini Bussi & Luciana Bazzini (2003):

- Bartolini Bussi M. (1996), *Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School*, Educational Studies in Mathematics, 31 (1-2), 11-41.
- Bartolini Bussi M. G. (1998a), *Drawing Instruments : Theories and Practices from History to Didactics*, Documenta Mathematica - Extra Volume ICM 1998, (vol. 3, pp. 735-746).
- Bartolini Bussi M. G. (1998b), *Italian Research in Innovation: Towards a New Paradigm*, ICMI Bulletin, n. 45, 17-26
- Bartolini Bussi M. G. Mariotti M. A. (1999), *Semiotic mediation : from history to mathematics classroom*, For the Learning of Mathematics, 19 (2) 27-35
- Maria G. Bartolini Bussi & Luciana Bazzini (2003): *Research, Practice and Theory in Didactics of Mathematics: towards Dialogue between Different Fields*; Educational Studies in Mathematics , Volume 54, Issue 2-3, pp 203-223
- Bartolini Bussi M. G., Boni, M., Ferri, F. & Garuti, R. (1999), *Early Approach To Theoretical Thinking: Gears in Primary School*, Educational Studies in Mathematics., 39 (1-3), 67-87.
- Bazzini, L. (1991), *Curriculum development as a meeting point for research and practice*, Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, 91(4), 128-131
- Bazzini L. (ed.), (1994) *Theory and Practice in Mathematics Education*, , Pavia, Italy, ISDAF.
- Bazzini, L. (1997), *Equazioni e disequazioni: riflessioni sul concetto di equivalenza*, in Bazzini L. (Ed.), *La didattica dell'algebra nella scuola secondaria superiore*, Pavia, ISDAF. (pp. 44-53)
- Bazzini, L. (1998), *On the construction and interpretation of symbolic expressions*, in E. Cohors-Fresenborg (ed.), *Proceedings of the First Conference on European Research in Mathematics Education*, Osnabrueck.
- Biehler R. , Scholz R. W., Straesser R. & Winkelmann B. (1994), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers
- Brown S., Cooney T., (1991), *Stalking the Dualism between Theory and Practice*, Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, 91(4), 112-117.
- Burton L. (1991), *Models of systematic co-operation between Theory and Practice*, Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik , 91(4), 118-121.
- Cole, M., (1985), *The zone of proximal development: where culture and cognition create each other*, in Wertsch J.V. (ed.) *Culture, communication, and cognition: a Vygotskian perspective*, Cambridge University Press, (pp. 146-161).
- Fauvel J. & van Maanen J. (eds.), (2000), *History in Mathematics Education: the ICMI Study*. Dordrecht, Kluwer Academic Publisher.
- Frege, G., (1892), *Über Sinn und Bedeutung*, Zeitsch. für Philosophie und Philosophische Kritik, C, 25-50.
- Furinghetti, F. (1997), *'History of mathematics, mathematics education, school practice: case studies linking different domains'*, For the Learning of Mathematics, 17(1), 55-61.
- Furinghetti, F. (2002), *'On the role of the history of mathematics in mathematics education'*, in I. Vakalis, D. Hughes Hallett, C. Kourouniotis, D. Quinney & C. Tzanakis (eds), *Proceedings of ITCM2* (Hersonissos, Crete, Greece), CD-Rom, J. Wiley & Sons. 51.
- Godino J.D. & Batanero C. (1997), *The dialectic relationship among theory, development and practice in mathematics education: a meta-analysis of three investigations*, in N. A. Malara (ed.), *An International View on Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Proc. WG 25, Seville 1996), Università di Modena, Italy.
- Godino, J.D., Batanero C. (1997), *Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education*, in A. Sierpiska and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: The search of an identity*, , Dordrecht, Kluwer Academic Publishers. (pp. 177-195)

- Hanna G. & Jahnke H. N. (1993), *Proof and Application*, Educational Studies in Mathematics, 24, 421-438.
- Hanna G. and Jahnke H. N. (1994), *The Theory and Practice of Proof*, in Gaulin C., Hodgson B. R., Wheeler D. and H., Egsgard J. C. (eds.) *Proceedings of the 7th Intenational Congress on Mathematical Education*, Les Presses de l'Université Laval. (pp. 253-256)
- Hornig W.-S., Lin F.-L. (Eds), (2000), *Proceedings of the HPM 2000 Conference History in mathematics education. Challenges for a new millennium*. A satellite meeting of ICME-9.
- Inter-IREM Commission, (1997), *History of mathematics histories of problems*, Paris: Ellipses.
- Inter-IREM Commission, (1998), *Images, imaginaires, imaginations: une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*, Paris: Ellipses.
- Jahnke H. N., Knoche N. & Otte M. (hrsg.) (1996), *History of mathematics and education: ideas and experiences*, Goettingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Kilpatrick J. & Sierpinska A. (eds.), (1998), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Kluwer Academic Publishers.
- Lagarto M. J., Vieira A. & Veloso E. (eds.), (1996), *Proceedings of the Second European summer university on 'History and epistemology in mathematics education'* (Braga, Portugal), (Vol. I, pp. 261-262).
- Lakatos, I. (1976) *Proof and Refutations: the logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press
- Lalande F., Jaboeuf F. & Nouazé Y. (eds), (1993), *Proceedings of the First European summer university on 'History and epistemology in mathematics education'* (Montpellier, 1993).
- Linchevski L., Sfard A. (1991), *Rules without reasons as processes without objects. The case of equations and inequalities*, in F. Furinghetti, *Proceedings of the 15th PME Conference*, Assisi, Italy, (Vol. II, pp. 317-324).
- Mariotti M. A., Bartolini Bussi M., Boero P., Ferri F. & Garuti R., (1997), *Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition*, Proceedings of the 21st PME Conference, Lahti, Finland (Vol. 1, pp. 180-195)
- Mariotti M.A., Cerulli M. (2002), *L'Algebrista: a microworld for teaching and learning Algebra*, Sciences et Techniques Éducatives, Numéro spécial algèbre vol 9 n°1-2,
- M.Milovanović, D.A. Romano i V.Todić (2012): *Različiti teorijski aspekti istraživanja nastave matematike*; Nova škola (Bijeljina), 9/10, 89-109
- Pedemonte B. (2002), *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques* These de doctorat, Université Joseph Fourier-Grenoble I, Università di Genova
- Pepe L. (1990), *Storia e Didattica della Matematica*, L'Educazione Matematica, vol. XI supplement to n. 2, 23-33.
- Ponte J., Matos J.F., Guimaraes Leal C. & Canavarrro A.P. (1994), *Teacher's and students' view and attitudes towards a new mathematical curriculum: A case study*. Educational Studies in Mathematics, 26, 347-365.
- Presmeg N. (ed.) (2001), *Realistic Mathematics Education Research: Leen Streefland's work continues*, Proceedings of PME 25, Utrecht, The netherlands, vol. 1, 221-253.
- Prodi G. (1992), *Ricerca in Didattica della Matematica*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 15 (10), 987-994.
- Radelet, P. (1999), *Proceedings of the Third European summer university on 'History and epistemology in mathematics education'* Louvain La Neuve-Leuven.
- Radford L. (2000), *Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis*, Educational studies in Mathematics, 42, (3), 237-268
- Romano, D.A. (2008): *O motivima za izučavanje matematičkog mišljenja*; Nastava matematike (Beograd), LIII (3-4), 1-11

- Romano, D.A., (2009): *Istraživanje matematičkog obrazovanja*; IMO, Vol. I (2009), Broj 1, 1-10
- Romano, D.A. (2009a): *Teorije matematičkog obrazovanja, Prvi dio: Teorija realističkog matematičkog obrazovanja*; IMO, Vol. I, Broj 1, 23-35
- Romano, D.A. (2009b): *Šta je algebarsko mišljenje?* MAT-KOL, XV(2), 19-29
- Romano, D.A. (2009v): *O geometrijskom mišljenju*, Nastava matematike, LIV (2-3), 1-11
- D.A.Romano (2010): *Matematika, Metodika nastave matematike i Istraživanje matematikog obrazovanja – tri srodna ali tako različita domena*; IMO, Vol. II (2010), Broj 2, 3-10
- Romano, D.A., (2010a) : *Metodika matematike – naučna disciplina ?* V Symposium “Technology, Informatics and Education for Learning and Knowledge Society”, Novi Sad, 19-20.06.2009. Centar za primenu nauke, tehnologije i informatike Novi Sad, (Knjiga 1, pp. 455-468)
- Romano, D.A. i Vladan Todić (2011): *Nekoliko napomena o odnosu teorija i prakse matematičkog obrazovanja učitelja*; IMO, Vol. III , Broj 4, 5-16
- Romano, D.A. (2013): *Kako studenti učiteljskog programa razumiju matematičke dokaze i matematičku argumentaciju (lične opservacije)*; Nova škola (Bijeljina), 11, 47-72
- Seeger F. (1994), *Co-operation between Theory and Practice in Mathematics Education*, in Gaulin C., Hodgson B. R., Wheeler D. H., Egsgard J. C. (eds.), *Proceedings of the 7th Intenational Congress on Mathematical Education*, 282-5, Les Presses de l'Université Laval.
- Seeger F., Steinbring H. (eds.), (1992), *The Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education; Overcoming the Broadcast metaphor*, Materialien und Studien Band 38, IDM Bielefeld, Germany.
- Alan H. Schoenfeld (2011), *Namjere i metode u istraživanju matematičkog obrazovanja*, IMO, Vol. III, Broj 4, 23-34
- Sfard A. (1991), *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*, Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.
- Sfard A., (1998), in Kilpatrick J. & Sierpiska A. (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain : A Search for Identity*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers. (vol. 2, 491-511)
- Steinbring, H., (1994), *Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education*, in Biehler R. , Scholz R. W., Straesser R. & Winkelmann B., *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht Kluwer Academic Publishers.
- Steinbring H. (1998), *Epistemological constrints of mathematical knowledge in social learning settings*. In J. Kilpatrick , A. Sierpiska (eds.) *Mathematics Education as a research domain: A search for identity*, Dordrect, Kluwer Academic Publishers.
- Steinbring H. (1998), *Elements of Epistemological Knowledge for Mathematics Teachers*, Journal of Mathematics Teacher Education, 1, 157-189.
- Steiner H. G. (1985), *Theory of Mathematics Education: An Introduction*, For the Learning of Mathematics, 5(2), 11-17.
- Tirosh D., Almog N. (1989), *Conceptual adjustments in progressing from real to complex numbers*, Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (13th, Paris, France, July 9-13, 1989), (Volume 3, 221-229).
- Actes de la 13th Conférence Internationale Psychologie of Mathematics Education*, Paris, France, Vol. 3, 221-227.
- Thurston W.P. (1994), *On proof and progress in mathematics*, Bulletin of the Americam Mathematical Society, 30, (2), 161-177.
- Vinner S. (1988), *Subordinate and superordinate accomodations, indissociability and the case of the complex numbers*, International Journal of Mathematics Education and ScienceTechnology, 19, 593-606.

- Wittmann E. Ch. (1991), *From Inservice-Courses to Systematic Cooperation between Teachers and Researchers*, Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik 91(5), 158-160.
- Wittmann E. Ch. (1995), *Mathematics Education as a "Design Science"*, Educational Studies in Mathematics, 29, 355-374.
- Yackel E., Cobb P. (1996). *Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in Mathematics*, Journal for Research in Mathematics Education, 22 (390-408).

Primljeno u redakciju 27.03.2013. Dostupno na internetu od 02.09.2013.