MAT-KOL (Banja Luka) **ISSN 0354-6969 (o)**
XX(2)(2014), 69--75 **ISSN 1986-5828 (o)**
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

JEDNA ZANIMLJIVA ALGEBARSKA NEJEDNAKOST I NJENA PRIMJENA

(An interesting algebraic inequality and its application)

Šefket Arslanagić[1] i Amar Bašić[2]

Sažetak: U ovom radu je dat dokaz jedne zanimljive algebarske nejednakosti oblika:

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}, \qquad (1)$$

gdje su a,b,c,x,y,z pozitivni realni brojevi kao i jedna njena efikasna primjena.

Ključne riječi i izrazi: algebarska nejednakost, nejednakost Koši-Bunjakovski-Švarca, konveksna funkcija, nejednakost Jensena, primjena.

Abstract: In this paper is gived the proof of one interesting algebraic inequality

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)} \qquad (1)$$

where a,b,c,x,y,z are positive real numbers and one effective application of this inequality.

Key words and phrases: algebraic inequality, Cauchy-Buniakowsky-Schwarz's inequality, convex function, Jensen's inequality, application.

AMS Subject Classification (2010): 97 F 50
ZDM Subject Classification (2010): F50, N 50

[1] Prirodno-matematički fakultet, Odsjek za matematiku, Zmaja od Bosne 35, 71000 Sarajevo, BiH; e.mail:asefket@pmf.unsa.ba
[2] Druga gimnazija u Sarajevu, Sutjeska 1, 71000 Sarajevo, BiH: e-mail: basicamar@gmail.com

1. UVOD (Introduction)

Najprije ćemo dokazati sljedeću nejednakost

$$8\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a), \qquad (2)$$

gdje su $a,b,c>0$.

Dokaz: Koristićemo sljedeći identitet

$$(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3(a+b)(b+c)(c+a),$$

odnosno

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a). \qquad (3)$$

Zbog (3) je sada nejednakost (2) ekvivalentna nejednakosti

$$8(a+b+c)^3-24(a+b)(b+c)(c+a)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

odnosno

$$(a+b)(b+c)(c+a)\leq\frac{8}{27}(a+b+c)^3. \qquad (4)$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja $(A\geq G)$ imamo

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3},$$

odnosno nakon kubiranja ove nejednakosti

$$(a+b)(b+c)(c+a)\leq\left(\frac{2}{3}\right)^3(a+b+c)^3,$$

a ovo je nejednakost (4). Dakle, njoj ekvivalentna nejednakost (2) je dokazana. Vrijedi jednakost u (4), odnosno u (2) ako i samo ako je $a=b=c$.

2. GLAVNI REZULTAT (Main result)

Daćemo ovdje sada dokaz nejednakosti (1). Na osnovu nejednakosti Koši-Bunjakovski-Švarca za $n=3$ imamo

$$\left(\sqrt{x}\cdot\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\cdot\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\cdot\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{z}}\right)^2\leq\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{z}}\right)^2\right]$$

odnosno

$$(x+y+z)\left(\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\right)\geq\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2,$$

tj.

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2}{x+y+z}. \tag{5}$$

Posmatraćemo sada funkciju $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ gdje je $f(x)=\sqrt{x^3}$. Kako je $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ te $f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{x}}>0 \quad \forall x\in(0,+\infty)$, to je funkcija $f(x)$ konveksna. Na osnovu Jensenove nejednakosti sada dobijamo

$$\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}}{3}\geq\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3},$$

a odavde

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\geq 3\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3},$$

tj.

$$\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2\geq\frac{(a+b+c)^3}{3}. \tag{6}$$

Sada iz (5) i (6) slijedi nejednakost (1). Vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $a=b=c$ i $x=y=z$.

3. PRIMJENA (Application)

Stavljajući u nejednakost (1) da je $x=y=z$ dobijamo nejednakost

$$a^3+b^3+c^3\geq\frac{1}{9}(a+b+c)^3. \tag{7}$$

Vratimo se sada na nejednakost (2) koju je trebalo dokazati. Zbog identiteta

$$3(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

nejednakost (2) dobija oblik

$$a^3+b^3+c^3\geq\frac{1}{9}(a+b+c)^3,$$

a ovo je nejednakost (7) koja je tačna, što znači da je i data nejednakost (2) tačna sa jedna-košću ako i samo ako je $a=b=c$.

Sada ćemo dokazati dvije algebarske nejednakosti koristeći nejednakost (1). Riječ je o sljedećim nejednakostima:

a) $$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca\,;\ \ (a,b,c>0) \tag{8}$$

b) $$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\geq 1\,, \tag{9}$$

gdje su $a,b,c>0$ za koje važi jednakost $a+b+c=3$.

Dokaz: a) Na osnovu nejednakosti (1) imamo:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(a+b+c)}=\frac{(a+b+c)^2}{3}\text{, tj.}$$

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}\,. \tag{10}$$

Kako važi nejednakost:

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca) \tag{11}$$

$$\left(\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0\right),$$

to iz (10) i (11) slijdi nejednakost (8).

Vrijedi jednakost u (8) ako i samo ako je $a=b=c$.

Napomena 1. Inače, nejednakost (8) se dokazuje znatno teže na neki drugi način. Daćemo ovdje jedan dokaz kad koga ćemo koristiti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja ($A\geq G$). Imamo na osnovu nejednakosti $A\geq G$:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+bc\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}\cdot\frac{b^3}{c}\cdot bc}=3ab\,,$$

$$\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ca\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c}\cdot\frac{c^3}{a}\cdot ca}=3bc\,,$$

$$\frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{b}+ab\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a}\cdot\frac{a^3}{b}\cdot ab}=3ca\,.$$

Nakon sabiranja gornje tri nejednakosti, dobijamo:

$$2\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+ab+bc+ca\geq 3(ab+bc+ca),$$

a odavde

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca, \text{ q.e.d.}$$

b) Na osnovu nejednakosti (1) dobijamo:

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(3ab+3bc+3ca)},$$

odnosno zbog date jednakosti $a+b+c=3$:

$$\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\geq\frac{3}{ab+bc+ca}. \tag{12}$$

Iz nejednakosti (11) zbog $a+b+c=3$ slijedi:

$$ab+bc+ca\leq 3,$$

odnosno

$$\frac{3}{ab+bc+ca}\geq 1. \tag{13}$$

Sada iz nejednakosti (12) i (13) dobijamo nejednakost (9). Važi jednakost u (9) ako i samo ako je $a=b=c=1$.

Napomena 2. Nejednakost (9) se znatno teže dokazuje na neki drugi način. Npr. može se dokazati uz pomoć nejednakosti $A\geq G$ koja glasi:

$$\frac{9a^3}{b(2c+a)}+3b+(2c+a)\geq 3\sqrt[3]{\frac{9a^3}{b(2c+a)}\cdot 3b\cdot(2c+a)}=9a,$$

te uzeti još dvije analogne nejednakosti:

$$\frac{9b^3}{c(2a+b)}+3c+(2a+b)\geq 3\sqrt[3]{\frac{9b^3}{c(2a+b)}\cdot 3c\cdot(2a+b)}=9b,$$

$$\frac{9c^3}{a(2b+c)}+3a+(2b+c)\geq 3\sqrt[3]{\frac{9c^3}{a(2b+c)}\cdot 3a\cdot(2b+c)}=9c,$$

pa ih sabrati. Ideja za ovaj dokaz je svakako lijepa, ali nije lako doći do nje (po mojem mišljenju, op.a.).

Pomoću matematičke indukcije se lako dokaže do važi generalizacija nejednakosti (1), tj.:

$$\frac{a_1^3}{x_1}+\frac{a_2^3}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^3}{x_n}\geq\frac{\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^3}{n\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)}, \qquad (14)$$

gdje su $a_1,a_2,\ldots,a_n,x_1,x_2,\ldots,x_n$ pozitivni realni brojevi.
Koristeći nejednakost (14) dokazujemo jednostavno sljedeću nejednakost:

$$\frac{x_1^3}{\alpha x_1+\beta x_2}+\frac{x_2^3}{\alpha x_2+\beta x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^3}{\alpha x_{n-1}+\beta x_n}+\frac{x_n^3}{\alpha x_n+\beta x_1}\geq\frac{1}{n\left(\alpha+\beta\right)} \qquad (15)$$

gdje su $\alpha,\beta,x_1,x_2,\ldots,x_n$ pozitivni realni brojevi za koje važi jednakost

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=1.$$

Dokaz: Na osnovu nejednakosti (14) imamo:

$$\frac{x_1^3}{\alpha x_1+\beta x_2}+\frac{x_2^3}{\alpha x_2+\beta x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^3}{\alpha x_{n-1}+\beta x_n}+\frac{x_n^3}{\alpha x_n+\beta x_1}\geq$$

$$\geq\frac{\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^3}{n\left(\alpha x_1+\beta x_2+\alpha x_2+\beta x_3+\ldots+\alpha x_{n-1}+\beta x_n+\alpha x_n+\beta x_1\right)}=$$

$$=\frac{\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^3}{n\left[\alpha\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)+\beta\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)\right]}=\frac{1}{n\left(\alpha+\beta\right)}, \text{ q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (15) ako i samo ako je $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{1}{n}$.

4. NAPOMENE (Remarks)

Očigledno nejednakost (1) je interesantna i značajna za dokazivanje drugih raznih nejednakosti. Npr. za $x=2, y=3, z=4$, ona dobija oblik

$$\frac{a^3}{2}+\frac{b^3}{3}+\frac{c^3}{4}\geq\frac{1}{27}\left(a+b+c\right)^3;\ \left(a,b,c>0\right).$$

Sigurni smo da bi ovu nejednakost dokazali mnogo teže nego koristeći nejednakost (1). Ustvari nejednakost (1) nam može poslužiti za sastavljanje raznih nejednakosti uzimajući proizvoljne $x, y, z > 0$.

LITERATURA

[1] Arslanagić, Š., *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
[2] Arslanagić, Š., *O jednoj cikličkoj algebarskoj nejednakosti,* MAT-KOL (Banja Luka), XIX (1), (2013), 17-23.
[3] I.V. Maftei, P.G. Popescu, M. Piticari, C. Lupu, M.A. Tataram., *Inegalitati alese in matematica,* (Inegalitati clasice),Bukuresti-Editura Niculescu, 2005.

Pristiglo u redakciju 09.07.2013. Revidirana verzija 18.07.2013
Dostupno na internetu 23.07.2013.