MAT–KOL (Banja Luka)
ISSN 0354–6969 (p), ISSN 1986–5228 (o)
Vol. XX (2)(2014), 59–68
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

PELLOVA JEDNAČINA I PITAGORINE TROJKE

Amra Duraković[1] Bernadin Ibrahimpašić[2],

Sažetak

Diofantska jednačina oblika $x^2 - Dy^2 = 1$, gdje je D prirodan broj koji nije potpun kvadrat naziva se Pellova jednačina. Uređenu trojku prirodnih brojeva (a, b, c) zovemo Pitagorina trojka ako su a i b katete, a c hipotenuza nekog pravouglog trougla. U ovom članku ćemo opisati Pellove jednačine i njihovu vezu s Pitagorinim trojkama.

Ključne riječi i fraze: Pellova jednačina, Pitagorina trojka.

Abstract

Pell's equation is any Diophantine equation of the form $x^2 - Dy^2 = 1$, where D is a given nonsquare positive integer and integer solutions are sought for x and y. A Pythagorean triple is a triple of positive integers a, b and c such that a right triangle exists with legs a and b, and hypotenuse c. In this paper we describe Pell's equations and their relation to the Pythagorean triples.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 11D09, 11Y50

Key words and phrases: Pell's equation, Pythagorean triple.

1 Uvod

Diofantskom jednačinom nazivamo algebarsku jednačinu s cjelobrojnim koeficijentima s dvije ili više nepoznatih, kojoj se traže cjelobrojna rješenja. Ime su dobile po starogrčkom matematičaru Diofantu.

Diofantska jednačina oblika

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

gdje je D prirodan broj koji nije potpun kvadrat, naziva se Pellova jednačina.

Jednačina je dobila ime po engleskom matematičaru Johnu Pellu, jer mu je Euler, po svemu sudeći pogrešno, pripisao zasluge za njezino rješavanje. Proučavanjem ovih jednačina bavili su se i starogrčki matematičari (Arhimed,

[1]Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću, Luke Marjanovića bb, 77000 Bihać, Bosna i Hercegovina, e-mail: amra_aldzic@hotmail.com

[2]Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću, Luke Marjanovića bb, 77000 Bihać, Bosna i Hercegovina, e-mail: bernadin@bih.net.ba

Diofant), srednjovjekovni indijski matematičari (Brahmagupta), te europski matematičari Brouncher, Fermat, Euler i Lagrange, koji je i prvi dokazao da ova jednačina ima beskonačno mnogo cjelobrojnih rješenja.

Uređenu trojku prirodnih brojeva (a, b, c) zovemo Pitagorina trojka ako su a i b katete, a c hipotenuza nekog pravouglog trougla, tj. ako vrijedi

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ako su a, b i c relativno prosti, onda kažemo da je (a, b, c) primitivna Pitagorina trojka.

U ovom članku ćemo dati osnovna svojstva Pellovih jednačina i Pitagorinih trojki i objasniti kako se pomoću Pellovih jednačina dobijaju Pitagorine trojke.

2 Verižni razlomci

Neka je α proizvoljan realan broj. Stavimo $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$. Ako je $a_0 \neq \alpha$, onda zapisujemo $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$, gdje je $\alpha_1 > 1$ i stavimo $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$. Ako je $a_1 \neq \alpha_1$, onda zapisujemo $\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$, gdje je $\alpha_2 > 1$ i stavimo $a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor$. Ovaj proces možemo nastaviti i dalje sve dok ne bude $a_n = \alpha_n$. To se dešava ako i samo ako je α racionalan broj.

Racionalne funkcije oblika

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

nazivaju se *verižni* (neprekidni) *razlomci*. Kraći zapis je $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Ako je $\alpha = \frac{m}{n}$ racionalan broj, onda se njegov razvoj u verižni razlomak može odrediti pomoću Euklidovog algoritma, gdje su brojevi $a_0, a_1, a_2, \ldots$ količnici iz Euklidovog algoritma primijenjenog na brojeve m i n.

Definicija 2.1 *Neka je a_0 cijeli broj i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prirodni brojevi. Ako je $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$, onda ovaj izraz nazivamo razvoj broja α u* konačni jednostavni verižni razlomak. *Razlomak $\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, \ldots, a_i]$ je i-ta* konvergenta *od α, a_i je i-ti* parcijalni kvocijent *od α, a $\alpha_i = [a_i; a_{i+1}, \ldots, a_n]$ je i-ti* potpuni kvocijent *od α. Ako je α iracionalan broj, onda uvodimo oznaku $[a_0; a_1, a_2, \ldots] = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Ako je $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, onda taj izraz nazivamo razvoj broja α u* beskonačni jednostavni verižni razlomak. *Razlomak $\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, \ldots, a_i]$ je i-ta* konvergenta *od α, a_i je i-ti* parcijalni kvocijent *od α, a $\alpha_i = [a_i; a_{i+1}, \ldots]$ je i-ti* potpuni kvocijent *od α.*

Za konvergente $\frac{p_n}{q_n}$, $(n \geq 2)$, vrijede sljedeće rekurzivne relacije:

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad p_0 = a_0, \ p_1 = a_0 a_1 + 1, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad q_0 = 1, \ q_1 = a_1. \end{aligned}$$

Dogovorno uzimajući da je $p_{-2} = 0$, $p_{-1} = 1$, $q_{-2} = 1$ i $q_{-1} = 0$, tada navedene rekurzivne relacije vrijede za $n \geq 0$.

Primjer 2.1 *Razviti* $\frac{13}{29}$ *u verižni razlomak i odrediti sve konvergente.*

Rješenje: Primjenimo Euklidov algoritam.

$$\begin{aligned} 13 &= 29 \cdot 0 + 13, \\ 29 &= 13 \cdot 2 + 3, \\ 13 &= 3 \cdot 4 + 1, \\ 3 &= 1 \cdot 3 + 0. \end{aligned}$$

Vidimo da je $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ i $a_3 = 3$, pa je razvoj broja $\frac{13}{29}$ u verižni razlomak

$$\frac{13}{29} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}}},$$

ili kraće $\frac{13}{29} = [0; 2, 4, 3]$.
Primjenom rekurzivnih relacija za konvergente dobijamo:

$$\begin{array}{lll} p_0 = 0, & q_0 = 1, & \frac{p_0}{q_0} = 0; \\ p_1 = 0 \cdot 2 + 1 = 1, & q_1 = 2, & \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}; \\ p_2 = 4 \cdot 1 + 0 = 4, & q_2 = 4 \cdot 2 + 1 = 9, & \frac{p_2}{q_2} = \frac{4}{9}; \\ p_3 = 3 \cdot 4 + 1 = 13, & q_3 = 3 \cdot 9 + 2 = 29, & \frac{p_3}{q_3} = \frac{13}{29}. \end{array}$$

Dakle, konvergente su

$$0, \ \frac{1}{2}, \ \frac{4}{9}, \ \frac{13}{29}.$$

$\diamondsuit$

Definicija 2.2 *Za beskonačni verižni razlomak* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *kažemo da je* periodičan *ako postoje cijeli brojevi* $k \geq 0$ *i* $m \geq 1$ *takvi da je* $a_{i+m} = a_i$*, za sve* $i \geq k$*. To zapisujemo* $[a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m-1}}]$*. Najmanji takav* m *se naziva* period*. Ako je* $k = 0$ *govorimo o* čisto periodičnom verižnom razlomku.

Ako je d prirodan broj koji nije kvadrat, tada je verižni razlomak od $\sqrt{d}$ periodičan i vrijedi

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, 2a_0}],$$

pri čemu je $a_i = a_{l-i}$, za $i = 1, 2, \ldots, l-1$.

U ovom slučaju, razvoj u verižni razlomak se može dobiti primjenom sljedećeg algoritma. Kvadratnu iracionalnost α zapišemo u obliku $\alpha = \frac{s_0+\sqrt{d}}{t_0}$, gdje su d, s_0 i t_0 cijeli brojevi, $t_0 \neq 0$, d nije potpun kvadrat i $t_0 | (d - s_0^2)$. Ako je $\alpha = \sqrt{d}$, onda je $s_0 = 0$ i $t_0 = 1$. Sada parcijalne kvocijente a_i računamo rekurzivno na sljedeći način:

$$a_i = \left\lfloor \frac{s_i + \sqrt{d}}{t_i} \right\rfloor, \ s_{i+1} = a_i t_i - s_i, \ t_{i+1} = \frac{d - s_{i+1}^2}{t_i}, \ i \geq 0. \tag{1}$$

Kako je $a_i = \left\lfloor \frac{s_i+\sqrt{d}}{t_i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{s_i+\lfloor\sqrt{d}\rfloor}{t_i} \right\rfloor$, to imamo da algoritam radi samo s cijelim brojevima. Kako za dovoljno velike indekse i imamo da vrijedi da je $0 < s_i < \sqrt{d}$ i $0 < t_i < s_i + \sqrt{d} < 2\sqrt{d}$, to uređeni parovi (s_i, t_i) poprimaju samo konačno mnogo vrijednosti, pa zaključujemo da je taj razvoj periodičan, jer moraju postojati indeksi j i k, $j < k$, takvi da je $(s_j, t_j) = (s_k, t_k)$. Međutim, tada je prema (1) $a_j = a_k$, pa je

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{j-1}, \overline{a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{k-1}}].$$

Primjer 2.2 *Razviti $\sqrt{19}$ u verižni razlomak.*

Rješenje: Broj 19 je prirodan broj pa možemo primjeniti algoritam (1). Kako je $\sqrt{19} = \frac{0+\sqrt{19}}{1}$, slijedi da je $s_0 = 0$ i $t_0 = 1$. Algoritam se zaustavlja kada dobijemo da je $(s_k, t_k) = (s_1, t_1)$.

$$\begin{array}{llll}
a_0 = 4, & s_1 = 4, & t_1 = 3, & (s_1, t_1) = (4, 3); \\
a_1 = 2, & s_2 = 2, & t_2 = 5, & (s_2, t_2) = (2, 5); \\
a_2 = 1, & s_3 = 3, & t_3 = 2, & (s_3, t_3) = (3, 2); \\
a_3 = 3, & s_4 = 3, & t_4 = 5, & (s_4, t_4) = (3, 5); \\
a_4 = 1, & s_5 = 2, & t_5 = 3, & (s_5, t_5) = (2, 3); \\
a_5 = 2, & s_6 = 4, & t_6 = 1, & (s_6, t_6) = (4, 1); \\
a_6 = 8, & s_7 = 4, & t_7 = 3, & (s_7, t_7) = (4, 3).
\end{array}$$

Dobili smo da je $(s_7, t_7) = (s_1, t_1) = (4, 3)$, a to prema (1) znači da je $a_7 = a_1$, pa je $\sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$ i imamo da je period $l = 6$.

♢

3 Pellova jednačina

Diofantska jednačina oblika

$$x^2 - Dy^2 = 1, \tag{2}$$

gdje je D prirodan broj koji nije potpun kvadrat, naziva se *Pellova jednačina*. Ako je D potpun kvadrat, tj. $D = a^2$, $a \in \mathbb{N}$, tada jednačina (2) ima oblik

$(x-ay)(x+ay) = 1$ i u tom slučaju jednačina ima samo trivijalna rješenja $(x, y) = (\pm 1, 0)$.

Očigledno je da ako je (x, y) rješenje jednačine (2), onda su $(x, -y)$ i $(-x, \pm y)$ također njena rješenja. Zbog toga je prilikom njenog ispitivanja i rješavanja dovoljno posmatrati njena rješenja u prirodnim brojevima. Također napomenimo da ako je $(x, y) = (u, v)$ rješenje Pellove jednačine (2), onda zbog jednostavnosti kažemo da je $u + v\sqrt{D}$ njeno rješenje.

Pellova jednačina (2) ima bar jedno rješenje u prirodnim brojevima x i y. Najmanje rješenje Pellove jednačine u prirodnim brojevima nazivamo *fundamentalno rješenje*. Označavamo ga s (x_1, y_1) ili s $x_1 + y_1\sqrt{D}$.

O beskonačanosti rješenja Pellove jednačine govori sljedeći teorem.

Teorem 3.1 *Pellova jednačina $x^2 - Dy^2 = 1$ ima beskonačno mnogo rješenja. Ako je (x_1, y_1) fundamentalno rješenje, onda su sva rješenja (u prirodnim brojevima) ove jednačine dana formulom*

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Ako znamo fundamentalno rješenje, do ostalih rješenja možemo doći i koristeći rekurzivne relacije o kojima govori sljedeći teorem.

Teorem 3.2 *Neka je (x_n, y_n), gdje je n prirodan broj, niz svih rješenja Pellove jednačine $x^2 - Dy^2 = 1$ u prirodnim brojevima zapisan u rastućem redoslijedu. Neka je $(x_0, y_0) = (1, 0)$ i (x_1, y_1) njeno fundamentalno rješenje. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 2x_1x_{n+1} - x_n, \\ y_{n+2} &= 2x_1y_{n+1} - y_n, \; n \geq 0. \end{aligned}$$

Ako znamo fundamentalno rješenje Pellove jednačine (2), koristeći Teorem 3.1 i Teorem 3.2, možemo odrediti i sva ostala rješenja. Međutim, pitanje je kako naći to fundamentalno rješenje. Jedan način za nalaženje fundamentalog rješenja proizilazi iz veze Pellovih jednačina s diofantskim aproksimacijama, te preko njih s verižnim razlomcima. Svako netrivijalno rješenje Pellove jednačine $x^2 - Dy^2 = 1$ inducira jako dobru racionalnu aproksimaciju iracionalnog $\sqrt{D}$. Sve jako dobre racionalne aproksimacije realnog broja se mogu dobiti iz njegovog razvoja u verižni razlomak.

Pellova jednačina

$$x^2 - Dy^2 = -1,$$

ne mora imati rješenja u cijelim brojevima, za razliku od obične Pellove jednačine $x^2 - Dy^2 = 1$ koja ih ima beskonačno. Ako je $D \equiv 3 \pmod 4$, onda jednačina $x^2 - Dy^2 = -1$ nema rješenja.

Sljedeći teorem nam govori o povezanosti fundamentalnih rješenja jednačina $x^2 - Dy^2 = 1$ i $x^2 - Dy^2 = -1$, te svih rješenja pomenutih jednačina u prirodnim brojevima s razvojem u verižni razlomak broja $\sqrt{D}$.

Teorem 3.3 *Neka je l dužina perioda od $\sqrt{D}$.*

Ako je l paran, onda jednačina $x^2 - Dy^2 = -1$ nema rješenja, a sva rješenja jednačine $x^2 - Dy^2 = 1$ su dana s $(x, y) = (p_{nl-1}, q_{nl-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalno rješenje je (p_{l-1}, q_{l-1}).

Ako je l neparan, onda su sva rješenja jednačine $x^2 - Dy^2 = -1$ dana s $(x, y) = (p_{(2n-1)l-1}, q_{(2n-1)l-1})$, a sva rješenja jednačine $x^2 - Dy^2 = 1$ su dana s $(x, y) = (p_{2nl-1}, q_{2nl-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalno rješenje jednačine $x^2 - Dy^2 = 1$ je (p_{2l-1}, q_{2l-1}).

Primjer 3.1 *Riješiti jednačinu $x^2 - 19y^2 = 1$.*

Rješenje: Iz Primjera 2.2 imamo da je $\sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$ i $l = 6$. Prema Teoremu 3.3 fundamentalno rješenje zadane jednačine je $(x_1, y_1) = (p_5, q_5)$. Primjenom rekurzivnih relacija za konvergente dobijamo da je $(p_5, q_5) = (170, 39)$ pa je fundamentalno rješenje $(x_1, y_1) = (170, 39)$, odnosno $x_1 + y_1\sqrt{19} = 170 + 39\sqrt{19}$. Sva ostala rješenja, u prirodnim brojevima, jednačine $x^2 - 19y^2 = 1$ su dana s

$$x_n + y_n\sqrt{19} = (170 + 39\sqrt{19})^n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Napomenimo da, kako je period $l = 6$ paran, to jednačina $x^2 - 19y^2 = -1$ nema rješenja.

♢

Diofantska jednačina oblika

$$x^2 - Dy^2 = C, \tag{3}$$

gdje je D prirodan broj koji nije potpun kvadrat i C cijeli broj različit od nule, naziva se *pellovska jednačina*. Ova jednačina ne mora imati rješenja, ali ako ih ima, onda ih ima beskonačno mnogo.

Ako je $x + y\sqrt{D}$ rješenje pellovske jednačine $x^2 - Dy^2 = C$, a $u + v\sqrt{D}$ rješenje pripadne Pellove jednačine $x^2 - Dy^2 = 1$, onda je

$$(x + y\sqrt{D})(u + v\sqrt{D}) \tag{4}$$

također rješenje pellovske jednačine (3).

Za dva rješenja $x + y\sqrt{D}$ i $x' + y'\sqrt{D}$ pellovske jednačine (3) kažemo da su asocirana ako se jedno iz drugog može dobiti množenjem s nekim rješenjem pripadne Pellove jednačine kao u (4). Na taj način se uvodi relacija ekvivalencije na skupu svih rješenja pellovske jednačine. Međusobno asocirana rješenja tvore jednu klasu rješenja. Dva rješenja $x + y\sqrt{D}$ i $x' + y'\sqrt{D}$ pellovske jednačine su asocirana ako i samo ako vrijedi

$$\frac{xx' - Dyy'}{C} \in \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad \frac{xy' - x'y}{C} \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Da bismo riješili pellovsku jednačinu trebamo prvo znati kako joj odrediti fundamentalno rješenje, a ono je usko povezano s fundamentalnim rješenjem Pellove jednačine $x^2 - Dy^2 = 1$. Kako odrediti to fundamentalno rješenje govori nam sljedeći teorem.

Teorem 3.4 *Neka je $x_1+y_1\sqrt{D}$ fundamentalno rješenje Pellove jednačine $x^2-Dy^2=1$. Tada za svako fundamentalno rješenje $x^*+y^*\sqrt{D}$ pellovske jednačine $x^2-Dy^2=C$ vrijede nejednakosti:*

$$\begin{aligned} 0 &\leq y^* \leq \frac{y_1}{\sqrt{2(x_1+\varepsilon)}}\sqrt{|C|}, \\ |x^*| &\leq \sqrt{\frac{1}{2}(x_1+\varepsilon)|C|}, \end{aligned}$$

gdje je $\varepsilon=1$ ako je $C>0$, a $\varepsilon=-1$ ako je $C<0$. Fundamentalnih rješenja, pa samim tim i klasa rješenja, ima konačno mnogo.

Primjer 3.2 *Riješiti jednačinu $x^2-19y^2=5$.*

Rješenje: Pripadna Pellova jednačina je $x^2-19y^2=1$. Njeno fundamentalno rješenje je $(x_1,y_1)=(170,39)$ (Primjer 3.1). Neka je $x^*+y^*\sqrt{19}$ fundamentalno rješenje pellovske jednačine $x^2-19y^2=5$. Tada prema Teoremu 3.4 vrijedi

$$\begin{aligned} |x^*| &\leq \sqrt{\frac{1}{2}(170+1)\cdot 5}=\sqrt{430} \;\Rightarrow\; x^*\in\{0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm19,\pm20\}, \\ 0 &\leq y^* \leq \frac{39}{\sqrt{2(170+1)}}\sqrt{5}=39\sqrt{\frac{5}{342}} \;\Rightarrow y^\star\in\{0,1,2,3,4\}. \end{aligned}$$

Odavde dobijamo sve moguće parove (x^*,y^*) koji mogu biti fundamentalno rješenje jednačine $x^2-19y^2=5$. Jednostavnom provjerom dobijamo da su jedina fundamentalna rješenja $(9,2)$ i $(-9,2)$, tj. $9+2\sqrt{19}$ i $-9+2\sqrt{19}$. Provjerimo da li su ova rješenja asocirana. Kako

$$\frac{9\cdot(-9)-19\cdot2\cdot2}{5}=-\frac{157}{5}\notin\mathbb{Z},$$

prema (5) slijedi da rješenja nisu asocirana. Sva rješenja pellovske jednačine $x^2-19y^2=5$ su dana s

$$\begin{aligned} x+y\sqrt{19} &= \pm(9+2\sqrt{19})(170+39\sqrt{19})^n \quad \text{i} \\ x+y\sqrt{19} &= \pm(-9+2\sqrt{19})(170+39\sqrt{19})^n,\; n\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

◊

4 Pellova jednačina i Pitagorine trojke

Definicija 4.1 *Uređenu trojku prirodnih brojeva (a,b,c) zovemo* Pitagorina trojka *ako su a i b katete, a c hipotenuza nekog pravouglog trougla, tj. ako vrijedi*

$$a^2+b^2=c^2.$$

Ako su a,b i c relativno prosti, onda kažemo da je (a,b,c) primitivna Pitagorina trojka.

Ako Pitagorinu trojku (a,b,c) pomnožimo s prirodnim brojem k dobijamo Pitagorinu trojku (ka,kb,kc). Za trojke (a,b,c) i (ka,kb,kc) kažemo da su *slične*. Postoji beskonačno mnogo sličnih Pitagorinih trojki. U svakoj primitivnoj Pitagorinoj trojki tačno jedan od brojeva a i b je neparan, pa je samim tim i broj c neparan.

Teorem 4.1 *Sve primitivne Pitagorine trojke (a,b,c) u kojima je b paran, dane su formulama*

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2, \tag{6}$$

gdje je $m > n$ i m, n su relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti.

Iz Teorema 4.1 slijedi da su sve Pitagorine trojke dane identitetom

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + (2dmn)^2 = [d(m^2 + n^2)]^2.$$

Pogledajmo sada kakva je veza između Pellovih jednačina i nekih Pitagorinih trojki. Pretpostavimo da su a i b uzastopni prirodni brojevi. Tada je $a-b = \pm 1$, što znači da možemo analizirati dva slučaja, i to:

1. $a - b = 1$,
2. $b - a = 1$.

Pogledamo li prvi slučaj i iskoristimo li formule (6) imamo

$$m^2 - n^2 - 2mn = 1,$$

što možemo napisati u obliku

$$(m - n)^2 - 2n^2 = 1.$$

Uvedemo li supstituciju

$$x = m - n \qquad \text{i} \qquad y = n$$

dobijamo Pellovu jednačinu

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Kako nam rješenja dobijene Pellove jednačine daju vrijednosti m i n, gdje je

$$n = y \qquad \text{i} \qquad m = x + y,$$

to su odgovarajuće Pitagorine trojke dane formulama

$$(a,b,c) = (x^2 + 2xy, 2y(x + y), (x + y)^2 + y^2). \tag{7}$$

Analogno, posmatrajući drugi slučaj, dobijamo ponovo istu Pellovu jednačinu $x^2 - 2y^2 = 1$, gdje je $x = m + n$ i $y = m$, pa su odgovarajuće Pitagorine trojke dane formulama

$$(a,b,c) = (2xy - x^2, 2y(x - y), (x - y)^2 + y^2). \tag{8}$$

Zaključujemo da svako rješenje (x, y) Pellove jednačine $x^2 - 2y^2 = 1$ daje dvije primitivne Pitagorine trojke dane formulama (7) i (8).

Pogledajmo prvih 10 primitivnih Pitagorinih trojki kod kojih su katete uzastopni prirodni brojevi.

x	y	m	n	a	b	c
3	2	2	1	3	4	5
		5	2	21	20	29
17	12	12	5	119	120	169
		29	12	697	696	985
99	70	70	29	4059	4060	5741
		169	70	23661	23660	33461
577	408	408	169	137903	137904	195025
		985	408	803761	803760	1136689
3363	2378	2378	985	4684659	4684660	6625109
		5741	2378	27304197	27304196	38613965

Pogledajmo sada slučaj kada se dužine kateta razlikuju za neki prirodan broj $k > 1$. I tada imamo dva slučaja $a - b = \pm k$. Analogno kao u slučaju $k = 1$, dobijamo, u ovom slučaju pellovsku, jednačinu

$$x^2 - 2y^2 = k$$

čije svako rješenje generira po dvije primitivne Pitagorine trojke s traženim svojstvom dane formulama (7) i (8), uz napomenu da se uzimaju samo Pitagorine trojke u prirodnim brojevima.

Primjer 4.1 *Odrediti nekoliko prvih primitivnih Pitagorinih trojki kod kojih se dužine kateta razlikuju za* 7.

Rješenje: Da bismo odredili Pitagorine trojke kod kojih se dužine kateta razlikuju za 7 trebamo riješiti pellovsku jednačinu $x^2 - 2y^2 = 7$ čije svako rješenje generira po dvije primitivne Pitagorine trojke s traženim svojstvom, s tim da posmatramo samo one Pitagorine trojke koje su u prirodnim brojevima. Imamo da

$$x^* \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\} \qquad \text{i} \qquad y^* \in \{0, 1\}.$$

Direktnom provjerom dobijamo da su fundamentalna rješenja $3+\sqrt{2}$ i $-3+\sqrt{2}$, pa su sva rješenja pellovske jednačine $x^2 - 2y^2 = 7$ dana s

$$\begin{aligned} x + y\sqrt{2} &= \pm(3+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^n \quad \text{i} \\ x + y\sqrt{2} &= \pm(-3+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Na osnovu ovih rješenja sada možemo generirati sve primitivne Pitagorine trojke kod kojih se dužine kateta razlikuju za 7. Prvih devet takvih Pitagorinih trojki je prikazano u sljedećoj tabeli.

x	y	m	n	a	b	c
3	1	1	2	$-3 \notin \mathbb{N}$	4	5
		4	1	15	8	17
5	3	3	2	5	12	13
		8	3	55	48	73
13	9	9	4	65	72	97
		22	9	403	396	565
27	19	19	8	297	304	425
		46	19	1755	1748	2477
75	53	53	22	2325	2332	3293
		128	53	13575	13568	19193

$\diamondsuit$

Ako pogledamo pellovsku jednačinu $x^2 - 2y^2 = 10$, imamo da

$$x^* \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\} \qquad \text{i} \qquad y^* \in \{0, 1, 2\},$$

pa direktnom provjerom dobijamo da ona nema rješenja. To znači da ne postoji primitivna Pitagorina trojka kod koje se dužine kateta razlikuju za 10.

Literatura

[1] E. J. Barbeau: *Pell's Equation*, Springer–Verlag, New York, 2003.

[2] H. Dubner, T. Forbes: *Prime Pythagorean triangles*, Journal of Integer Sequences, Vol. 4(2001)

[3] B. Ibrahimpašić, A. Zolić: *Euklidov algoritam i njegova primjena*, Nastava matematike, LVIII **1**–**2**(2013), 14–23.

[4] W. Sierpinski: *Pythagorean Triangles*, Dover Publications Inc., New York, 2003.

Primljeno 17.05.2013; Dostupno na internetu 24.06.2013.