MAT-KOL (Banja Luka)
ISSN 0354-6969 (p), 1986-5228 (o)
Vol. XX (2)(2014), 101-121
http://www.imvibl.org/dmbl/dmbl.htm

Klasični dokazi Gedelove teoreme o nepotpunosti[1]

Filip Morić[2], Ilija Lalović[3]

Abstrakt

Prikazuju se klasični dokazi Gedelove teoreme o nepotpunosti. Dokazuje se nepotpunost Peanove aritmetike i Peanove aritmetike sa stepenovanjem. Razmatra se odnos konzistentnosti i $\omega-$konzistentnosti. Najnovija dostignuća u logici daju mogućnost da se dokazi Gedelove teoreme o nepotpunosti sagledaju u novoj logičko-matematičkoj perspektivi.

Abstract

The classical proofs of Gödel's incompleteness theorem are presented in the paper. The incompleteness of Peano's arithmetic and Peano's arithmetic with exponentiation is proved. The relation between consistency and $\omega-$consistency is examined. The latest achievements in logic offer the possibility for proofs of Gödel's incompletenes theorem to be viewed from a new logical and mathematical viewpoint.

AMS Mathematics Subject Classification (2000): 03C35, 03F30

Key words and phrases: Incompleteness of PA, Gödel's numeration, Consistency, $\omega-$consistency

1 Uvod

Kurt Gedel (1906-1978) je jedan od najvažnijih logičara dvadesetog stoljeća. Gedel je publikovao teoremu nepotpunosti 1931. g. u [7]. U radu [7] Gedel je dokazao dvije teoreme koje danas nazivamo prva teorema o nepotpunosti i druga teorema o nepotpunosti. Uobičajeno je da se obje teoreme zajedno referišu kao Gedelova teorema o nepotpunosti.

Prva teorema o nepotpunosti tvrdi da je formalni deduktivni sistem koji zadovoljava svojstvo $\omega-$ konzistentnosti nepotpun, što znači da se u jeziku toga sistema može formulisati iskaz koji ne može biti dokazan ni opovrgnut u tom sistemu. Druga Gedelova teorema pokazuje da sredstvima konzistentnog formalnog deduktivnog sistema ne može biti dokazana njegova konzistentnost. Pri tome je sistem konzistentan ako ne postoji iskaz u jeziku toga sistema takav da i

[1]Prikaz je nastao iz dijela diplomskog rada [12]

[2]Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, EPFL SB IMB DCG MA B1 537 (Bâtiment MA) Station 8 CH-1015 Lausanne, e-mail: filip.moric@epfl.ch

[3]Prirodno-matematički fakultet, Mladena Stojanovića 2, 78000 Banja Luka, e-mail: ilalovich@yahoo.com

on i njegova negacija mogu biti dokazani u tom sistemu. Sa druge strane, sistem u kojem postoji iskaz takav da se ni on ni njegova negacija ne mogu dokazati sredstvima sistema, naziva se nepotpun ili nekompletan sistem.

Dokaz Gedelove teoreme nepotpunosti je u osnovi konstruktivan i može se izvesti bez pozivanja na koncept istine, što je činjenica koja je uzdrmala Hilbertov program finitizma u osnovama matematike.

Dokaz Gedelove teoreme nije jednostavan u tehničkom smislu. Veliki dio težine je u postavljanju i provjeravanju svojstava sistema kodiranja koji predstavlja sintaksu jezika (aritmetike) u tom samom jeziku. Detalji sistema kodiranja su često komplikovani i mogu baciti u sjenku suštinu dokaza. Da bi se jasnije istakla suštinu Gedelove teoreme, a izlaganje pojednostavilo, u sekcijama 2, 3, 4 se koristi pojam istinitosti Tarskog i Montague-Kalish-ova aksiomatizacija logike prvog reda. Takav pristup omogućuje minimalno razmatranje sintakse i računskih detalja.

Originalan Gedelov dokaz, zasnovan na pojmu $\omega-$konzistentnosti, prikazan je u sekciji 5, bez korištenja pojma istinosti Tarskog. Tu su pojednostavlenja dokaza dobivena tako što se umjesto aparata rekurzivnih funkcija koriste konstruktivne aritmetičke relacije teorije formalnih sistema [15] i što se radi sa samim relacijama umjesto sa njihovim karakterističnim funkcijama.

Najnovija dostignuća u logici daju mogućnost da se Gedelova teorema sagleda u novoj logičko-matematičkoj perspektivi. U nastavku prikaza dat je pregled novijih "konstruktivnih" dokaza Gedelove teoreme.

Prikaz može korisno poslužiti za upoznavanje kako sa starijim logičko-matematičkim koncepcijama [3, 9, 6, 7, 17, 18], tako i sa novijim [1, 2, 4, 5, 11, 13, 17]. Da bi se postigla pomenuta jednostavnost izlaganja i pri tome sačuvala matematička strogost, u prvom dijelu prikaza, uz izvjesna pojednostavljenja, slijedi se [17].

Za čitanje rada dovoljno je poznavanje elementarne matematičke logike prvog reda. Korišteni osnovni pojmovi matematičke logike, algebre, naivne teorije skupova i osnova teorije programiranja mogu se naći u [10, 14, 19, 8]. Popularno izlaganje Gedelove teoreme može se naći u knjizi [16]. Zbog načina izlaganja, knjiga [16] može biti interesantna ljubiteljima rješavanja problema, počev od naprednih učenika srednje škole, do profesionalnih matematičara.

2 Teorema Tarskog

2.1 Jezik $\mathcal{L}_E$

Azbuku jezika $\mathcal{L}_E$, čini sljedećih 13 simbola:

$$0 \quad ' \quad (\quad) \quad f \quad \flat \quad v \quad \neg \quad \Rightarrow \quad \forall \quad = \quad \leq \quad \sharp$$

Svaku riječ nad tom azbukom nazivaćemo i **izraz**.
Izraze $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ nazivamo **numerali**.
Znak prim ($'$) označava funkciju sljedbenik.
Izraze $f\flat, f\flat\flat, f\flat\flat\flat$ redom kraće označavamo sa $+$ (sabiranje), $\cdot$ (množenje) i E (stepenovanje) .

Takodje, izraze (v'), (v''), (v'''), $\ldots$ zamjenjujemo sa $v_1, v_2, v_3, \ldots$ i te izraze nazivamo **promjenljive** .
Definišemo pojam **terma** sljedećim pravilima:

1. Svaka promjenljiva i svaki numeral su termi.

2. Ako su t_1 i t_2 termi, tada su $(t_1 + t_2)$, $(t_1 \cdot t_2)$, $(t_1 E t_2)$ i t_1' takodje termi.

Term je **konstanta** ako ne sadrži promjenljivu.
Atomična formula je izraz oblika $t_1 = t_2$ ili $t_1 \leq t_2$, pri čemu su t_1 i t_2 proizvoljni termi.
Skup **formula** induktivno se definiše sljedećim pravilima:

1. Svaka atomična formula je formula.

2. Ako su F i G formule, tada su i $\neg F$ i $(F \Rightarrow G)$ takodje formule i za svaku promjenljivu v_i izraz $\forall v_i F$ je formula.

Neko pojavljivanje promjenljive v_i u formuli F naziva se **slobodno pojavljivanje** ako ono nije u oblasti univerzalnog kvantifikatora $\forall v_i$.
Pojavljivanja koja nisu slobodna nazivaju se **vezanim .**
Rečenica je po definiciji bilo koja formula u kojoj nema slobodnih pojavljivanja bilo koje promjenljive.
Za bilo koji prirodan broj n sa $\overline{n}$ označavamo numeral koji predstavlja n, tj. simbol 0 iza koga slijedi n primova.
Oznaka $F(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ nam predstavlja formulu u kojoj su $v_{i_1}, \ldots,\ v_{i_n}$ jedine slobodne promjenljive (tj. promjenljive koje imaju bar jedno slobodno pojavljivanje).
Za proizvoljne $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ sa $F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$ označavamo rezultat zamjene svih slobodnih pojavljivanja promjenljivih $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ numeralima $\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}$.
Stepen formule definišemo kao broj pojavljivanja simbola $\neg, \Rightarrow, \forall$ u formuli.
Da bismo dokazali da neko svojstvo imaju sve formule, dovoljno je dokazati da to svojstvo imaju atomične formule i da za svaku formulu F ako sve formule manjeg stepena od F imaju to svojstvo, tada i F ima to svojstvo.
Koristimo i sljedeće uobičajene skraćenice:

$$F_1 \vee F_2, \quad F_1 \wedge F_2, \quad F_1 \Leftrightarrow F_2, \quad \exists v_i F, \quad t_1 \neq t_2,$$

$$t_1 < t_2, \quad t_1^{t_2}, \quad (\forall v_i \leq t)F, \quad (\exists v_i \leq t)F\,,$$

pri čemu su F_1 i F_2 proizvoljne formule, v_i proizvoljna promjenljiva i t_1, t_2 proizvoljni termi.
Takodje, izostavljamo zagrade u slučaju da time ne stvaramo dvosmislenost.
Vrijednost konstantnog terma definišemo sljedećim pravilima:

1. Numeral $\overline{n}$ ima vrijednost n.

2. Ako c_1 i c_2 imaju vrijednosti n_1 i n_2, tada $(c_1 + c_2)$, $(c_1 \cdot c_2)$, $(c_1 E c_2)$ i c_1' imaju vrijednosti $n_1 + n_2$, $n_1 n_2$, $n_1^{n_2}$ i $n_1 + 1$, redom.

Istinitost rečenice jezika $\mathcal{L}_E$ definiše se induktivno:

1. Atomična rečenica $c_1 = c_2$ (c_1 i c_2 su konstantni termi) je istinita akko c_1 i c_2 imaju iste vrijednosti.
2. Atomična rečenica $c_1 \leq c_2$ je istinita akko vrijednost konstante c_1 nije veća od vrijednosti konstante c_2.
3. Rečenica oblika $\neg X$ je tačna akko X nije tačna.
4. Rečenica $X \Rightarrow Y$ je tačna akko X nije tačna ili su X i Y obje tačne.
5. Relacija $\forall v_i F$ je tačna akko je za svaki prirodan broj n rečenica $F(\overline{n})$ tačna. (Pošto je $\forall v_i F$ *rečenica*, slijedi da je i $F(\overline{n})$ rečenica i to manjeg stepena.)

Formule koje sadrže slobodne promjenljive nazivaju se otvorene. Otvorena formula $F(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ je **korektna** ako je za sve $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ rečenica $F(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$ tačna.
Za proizvoljnu formulu $F(v_1)$ kažemo da **opisuje** skup $\{n \in \mathbb{N} : F(\overline{n}) \text{ je tačna rečenica}\}$.
Formula $F(v_1, \ldots, v_n)$ **opisuje** skup svih n-torki $(k_1, \ldots, k_n)$ prirodnih brojeva takvih da je $F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$ tačna rečenica.
Formula $F(v_1, \ldots, v_n)$ opisuje relaciju $R(x_1, \ldots, x_n)$ (tj. n-arnu relaciju na $\mathbb{N}$) akko za proizvoljne $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}) \text{ je tačno} \quad \Leftrightarrow \quad R(k_1, \ldots, k_n)\,.$$

(Ovo nije definicija, nego tvrdjenje.)
Skup ili relacija se nazivaju **aaritmetičkim** ako su opisani nekom formulom jezika $\mathcal{L}_E$.
Skup ili relacija se nazivaju **aritmetičkim** ako su opisani nekom formulom jezika $\mathcal{L}_E$ u kojoj se ne pojavljuje simbol E.
Kasnije će biti dokazan netrivijalan rezultat da su pojmovi aaritmetičkog i aritmetičkog skupa isti.
Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (a)aritmetička ako je relacija $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ (a)aritmetička.
Kažemo da je **osobina** P prirodnih brojeva (a)aritmetička ako je skup prirodnih brojeva koji imaju tu osobinu (a)aritmetički.
Koristićemo riječ **uslov** kao zajednički naziv za osobinu ili relaciju.

2.2 Nadovezivanje i Gedelova numeracija

Za prirodan broj $b \geq 2$ definišemo funkciju $m *_b n$ (nadovezivanje u bazi b) na sljedeći način:

$$m *_b n = m \cdot b^{l_b(n)} + n\,,$$

gdje je $l_b(n)$ broj cifara broja n u bazi b.

Propozicija 1 *Za svako $b \geq 2$ relacija $x *_b y = z$ je aaritmetička.*

Dokaz. Neka je $St_b(x)$ osobina da je x stepen broja b. Ova osobina je aaritmetička, jer je ispunjena akko $\exists y(x = b^y)$ (formalno, trebalo bi pisati umjesto x, y, b redom $v_1, v_2, \overline{b}$) .Dokažimo da je relacija $b^{l_b(x)} = y$ aaritmetiˇka (kao relacija izmedju x i y). Relacija je ispunjena akko je

$$(x = 0 \wedge y = b) \vee (x \neq 0 \wedge s(x, y)) \,,$$

pri čemu je $s(x, y)$ relacija "y je najmanji stepen b veći od x", što vrijedi akko je

$$St_b(y) \wedge x < y \wedge \forall z((St_b(z) \wedge x < z) \Rightarrow y \leq z) \,,$$

pa je to aaritmetička relacija. Sad imamo da relacija $x *_b y = z$ vrijedi akko

$$\exists z_1 \exists z_2 (b^{l_b(y)} = z_1 \wedge x \cdot z_1 = z_2 \wedge z_2 + y = z) \,,$$

pa je to aaritmetička relacija. □

Posljedica 1 *Za svako $n \geq 2$ i $b \geq 2$ relacija*

$$x_1 *_b x_2 *_b \cdots *_b x_n = y$$

je aaritmetička.

Dokaz. Lako, indukcijom po n . □

Gedelovi brojevi simbola naše azbuke su dati sljedećom listom:

0	$'$	$($	$)$	f	$\flat$	v	$\neg$	$\Rightarrow$	$\forall$	$=$	$\leq$	$\sharp$
1	0	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C

Koristimo zapis prirodnih brojeva sa bazom 13, pri čemu A, B, C predstavljaju brojeve deset, jedanaest i dvanaest .
Gedelov broj proizvoljne riječi nad datom azbukom dobijamo tako što svaki simbol u toj riječi zamijenimo njegovim Gedelovim brojem i dobijeni izraz pročitamo kao zapis prirodnog broja u bazi 13.
Za svaki prirodan broj n sa E_n označavamo izraz čiji je Gedelov broj jednak n.
Lako se vidi da ovakav sistem Gedelovih brojeva ima sljedeće osobine:

1. Gedelov broj izraza $E_x E_y$ jednak je $x *_{13} y$, što je aaritmetička funkcija od x i y.

2. Gedelov broj numerala $\overline{n}$ iznosi 13^n , što je aaritmetička funkcija od n .

2.3 Dokaz teoreme Tarskog

Rečenica X je **Gedelova rečenica** skupa $A \subseteq \mathbb{N}$ ako je X tačna i njen Gedelov broj je u A ili je X netačna i njen Gedelov broj nije u A .
Ako je E proizvoljan izraz iz $\mathcal{L}_E$ i $n \in \mathbb{N}$ sa $E[\overline{n}]$ označavamo izraz

$$\forall v_1 (v_1 = n \Rightarrow E) \,.$$

Ako je $E = F(v_1)$ formula, tada je $E[\overline{n}]$ (u oznaci $F[\overline{n}]$) **rečenica** koja je ekvivalentna sa $F(\overline{n})$ (u smislu da su te dvije rečenice uvijek ili obje tačne ili obje netačne). U opštem slučaju izraz $E[\overline{n}]$ ne mora da ima smisla.
Za prirodne brojeve x i y sa $r(x,y)$ označavamo Gedelov broj izraza $E_x[\overline{y}]$.

Propozicija 2 *Funkcija $r(x,y)$ je aaritmetička.*

Dokaz. Imamo da je $r(x,y) = k * 13^y * 8 * x * 3$ (pri čemu je k Gedelov broj izraza "$\forall v_1(v_1 =$"), pa je relacija $r(x,y) = z$ očigledno aaritmetička. □

Funkcija $d(x) = r(x,x)$ naziva se **dijagonalna funkcija**.
Očigledno je i funkcija d aaritmetička.
Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ sa A^* označavamo skup $d^{-1}(A)$.

Lema 1 *Ako je skup A aaritmetički, tada je i skup A^* aaritmetički.*

Dokaz. Neka formula $F(v_1)$ opisuje skup A. Tada formula $\exists y(d(x) = y \wedge F(y))$ opisuje skup A^*. To je aaritmetička formula, jer je d aaritmetička funkcija. □

Teorema 1 *Svaki aaritmetički skup A ima svoju Gedelovu rečenicu.*

Dokaz. Skup A^* je takodje aaritmetički. Neka je on opisan formulom $H(v_1)$ i neka je h Gedelov broj te formule. Tada je $H[\overline{h}]$ Gedelova rečenica skupa A, jer je

$$H[\overline{h}] \Leftrightarrow H(\overline{h}) \Leftrightarrow h \in A^* \Leftrightarrow h \in d^{-1}(A) \Leftrightarrow d(h) \in A\,,$$

a $d(h)$ je upravo Gedelov broj rečenice $H[\overline{h}]$. □

Teorema 2 (Tarski) *Skup T Gedelovih brojeva istinitih rečenica u $\mathcal{L}_E$ nije aaritmetički.*

Dokaz. Skup T^c (komplement) nema svoju Gedelovu rečenicu, jer kad bi je imao ta rečenica bi bila istinita akko nije istinita, pa taj skup nije aaritmetički. Slijedi da ni T nije aaritmetički (naravno, komplement aaritmetičkog skupa uvijek je aaritmetički). □

3 Nepotpunost Peanove aritmetike sa stepenovanjem

3.1 Sistem aksioma Peanove aritmetike sa stepenovanjem

Koristeći jezik $\mathcal{L}_E$ formulisaćemo sistem aksioma koji nazivamo **Peanova aritmetika sa stepenovanjem** ili skraćeno **PS**. Sistem PS ima beskonačno mnogo aksioma, ali one se svrstavaju u 19 lako prepoznatljivih formi koje nazivamo **aksiomske šeme**.

Navodimo 19 aksiomskih šema PS. Ovdje su F, G, H proizvoljne formule, v_i, v_j proizvoljne promjenljive i t proizvoljan term.

1. $F \Rightarrow (G \Rightarrow F)$
2. $(F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H))$
3. $(\neg F \Rightarrow \neg G) \Rightarrow (G \Rightarrow F)$
4. $\forall v_i(F \Rightarrow G) \Rightarrow (\forall v_i F \Rightarrow \forall v_i G)$
5. $F \Rightarrow \forall v_i F$, ako se v_i ne pojavljuje u F
6. $\exists v_i(v_i = t)$
7. $v_i = t \Rightarrow (X_1 v_i X_2 \Rightarrow X_1 t X_2)$, ako su X_1, X_2 izrazi takvi da je $X_1 v_i X_2$ atomična formula
8. $v_1' = v_2' \Rightarrow v_1 = v_2$
9. $\neg(\overline{0} = v_1')$
10. $v_1 + \overline{0} = v_1$
11. $v_1 + v_2' = (v_1 + v_2)'$
12. $v_1 \cdot \overline{0} = \overline{0}$
13. $v_1 \cdot v_2' = v_1 \cdot v_2 + v_1$
14. $v_1 \leq \overline{0} \Leftrightarrow v_1 = \overline{0}$
15. $v_1 \leq v_2' \Leftrightarrow (v_1 \leq v_2 \vee v_1 = v_2')$
16. $v_1 \leq v_2 \vee v_2 \leq v_1$
17. $v_1 E \overline{0} = \overline{0}'$
18. $v_1 E v_2' = (v_1 E v_2) \cdot v_1$
19. Neka je $F(v_1)$ bilo koja formula koja sadrži slobodnu promjenljivu v_1 i možda još neke slobodne promjenljive. Sa $F[v_1']$ označavamo bilo koju formulu oblika
$$\forall v_i(v_i = v_1' \Rightarrow \forall v_1(v_1 = v_i \Rightarrow F)).$$
Svaka takva formula je ekvivalentna sa formulom $F(v_1')$ (tj. formulom u kojoj je svako slobodno pojavljivanje v_1 zamijenjeno sa v_1'). Aksiomska šema glasi:
$$F(\overline{0}) \Rightarrow (\forall v_1(F(v_1) \Rightarrow F[v_1']) \Rightarrow \forall v_1 F(v_1))$$

Pravila zaključivanja sistema PS su

1. (**Modus ponens**) Iz F i $F \Rightarrow G$ izvodi se G.
2. (**Generalizacija**) Iz F se izvodi $\forall v_i F$.

Dokaz u sistemu PS je konačan niz formula takav da je svaka formula u nizu ili aksioma ili se direktno izvodi iz dva ranija člana koristeći modus ponens ili se direktno izvodi iz nekog ranijeg člana koristeći generalizaciju.
Za formulu F kažemo da je **dokaziva** u sistemu PS ako postoji dokaz čiji je posljednji član formula F. Takav niz se naziva dokaz formule F.
Za formulu F kažemo da je **odbaciva** u sistemu PS ako je njena negacija dokaziva.

3.2 Aritmetizacija sistema aksioma

Uvodimo relacije $x\mathcal{B}_by$, $x\mathcal{E}_by$ i $x\mathcal{P}_by$ sa značenjima "x je početak od y u bazi b", "x je završetak od y u bazi b" i "x je dio od y u bazi b" .

Propozicija 3 *Za proizvoljne $b \geq 2$ i $n \geq 2$ sljedeće relacije su aaritmetičke:*

1. $x\mathcal{B}_by$
2. $x\mathcal{E}_by$
3. $x\mathcal{P}_by$
4. $x_1 *_b \cdots *_b x_n\mathcal{P}_by$.

Dokaz. Imamo da je

$$\begin{aligned}
&x\mathcal{B}_by \Leftrightarrow x = y \vee (x \neq 0 \wedge \exists z\exists w(St_b(w) \wedge (x \cdot w) *_b z = y))\\
&x\mathcal{E}_by \Leftrightarrow x = y \vee \exists z(z *_b x = y)\\
&x\mathcal{P}_by \Leftrightarrow \exists z(z\mathcal{E}_by \wedge x\mathcal{B}_bz)\\
&x_1 *_b \cdots *_b x_n\mathcal{P}_by \Leftrightarrow \exists z(x_1 *_b \cdots *_b x_n = z \wedge z\mathcal{P}_by)\,. \quad \square
\end{aligned}$$

(Primijetimo da smo umjesto $\exists z$ i $\exists w$ mogli pisati $\exists z \leq y$ i $\exists w \leq w$ Ovo će kasnije biti značajno.)
Za bilo koje izraze $X_1, \ldots, X_n$ koji koriste samo prvih 12 slova azbuke nad kojom je definisan jezik, izraz $\sharp X_1\sharp X_2\sharp \ldots \sharp X_n\sharp$ predstavlja formalni zapis n-torke $(X_1, \ldots, X_n)$.
Sa K_{11} označavamo skup svih prirodnih brojeva n u čijem se zapisu u bazi 13 ne pojavljuje cifra C.
Bilo kom konačnom nizu $(a_1, \ldots, a_n)$ brojeva iz K_{11} dodjeljujemo broj $Ca_1Ca_2C \ldots Ca_nC$ (izostavljamo znak za nadovezivanje $*_{13}$), koji nazivamo **nizovni broj** niza $(a_1, \ldots, a_n)$.
Sa $Seq(x)$ označavamo osobinu da je x nizovni broj nekog niza.
Uvodimo relaciju $x \in y$, što znači "y je nizovni broj nekog niza čiji je član x" .
Uvodimo i relaciju $x \prec_z y$ što znači "z je nizovni broj niza u kome se pojavljuju x i y i to tako da je prva pojava x ispred prve pojave y" .

Propozicija 4 *Svaki od uslova $Seq(x)$, $x \in y$ i $x \prec_z y$ je aaritmetički.*

Dokaz.

1. $Seq(x) \Leftrightarrow C\mathcal{B}x \wedge C\mathcal{E}x \wedge C \neq x \wedge (\neg CC\mathcal{P}x) \wedge (\forall y \leq x)(C0y\mathcal{P}x \Rightarrow C\mathcal{B}y)$
2. $x \in y \Leftrightarrow Seq(y) \wedge CxC\mathcal{P}y \wedge \neg(C\mathcal{P}x)$
3. $x \prec_z y \Leftrightarrow x \in z \wedge y \in z \wedge (\exists w \leq z)(w\mathcal{B}z \wedge x \in w \wedge \neg y \in w)$ $\square$

Za bilo koje izraze X, Y, Z definišemo da je $R_t(X, Y, Z)$ akko je Z jedan od izraza $(X + Y)$, $(X \cdot Y)$, (XEY) ili X'.
Generatorni niz za terme je konačan niz izraza $X_1, \ldots, X_n$ takav da je svaki član niza X_i promjenljiva ili numeral ili postoje j, k manji od i takvi da je $R_t(x_j, x_k, x_i)$.
Term se eksplicitno, bez indukcije, definiše na slijedeći način: Izraz X je term ako postoji generatorni niz za terme čiji je član X.
Slično se eksplicitno definišu i **formule**, uvodjenjem relacije R_f.
Za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in K_{11}$ **Gedelov broj niza** $(E_{x_1}, \ldots, E_{x_n})$ je po definiciji nizovni broj niza $(x_1, \ldots, x_n)$ (to je Gedelov broj izraza $\sharp E_{x_1} \sharp E_{x_2} \sharp \ldots \sharp E_{x_n} \sharp$).
Označimo sa $x\, imp\, y$, $neg(x)$, $x\, pl\, y$, $x\, tim\, y$, $x\, exp\, y$, $s(x)$, $x\, id\, y$ i $x\, le\, y$ Gedelove brojeve izraza $(E_x \Rightarrow E_y)$, $\neg E_x$, $(E_x + E_y)$, $(E_x \cdot E_y)$, $(E_x\, E\, E_y)$, E'_x, $E_x = E_y$, $E_x \leq E_y$. Ovih 8 funkcija su aaritmetičke, što se lako vidi.

Propozicija 5 *Sljedeći uslovi su aaritmetički:*

1. $Fl(x)$ – E_x *je niz apostrofa*
2. $Var(x)$ – E_x *je promjenljiva*
3. $Num(x)$ – E_x *je numeral*
4. $R_1(x, y, z)$ – *vrijedi relacija* $R_t(x, y, z)$
5. $Seqt(x)$ – E_x *je generatorni niz za terme*
6. $tm(x)$ – E_x *je term*
7. $f_0(x)$ – E_x *je atomična formula*
8. $Gen(x, y)$ – $E_y = \forall w E_x$ *za neku promjenljivu* w
9. $R_2(x, y, z)$ – *vrijedi relacija* $R_f(x, y, z)$
10. $Seqf(x)$ – E_x *je generatorni niz za formule*
11. $fm(x)$ – E_x *je formula*
12. $A(x)$ – E_x *je aksioma PS*
13. $MP(x, y, z)$ – E_z *se izvodi iz* E_x *i* E_y *pravilom modus ponens*
14. $Der(x, y, z)$ – E_z *se izvodi iz* E_x *i* E_y *pravilom modus ponens ili se izvodi iz* E_x *pravilom generalizacije*
15. $Pf(x)$ – E_x *je dokaz u PS*

16. $P_E(x)$ – E_x *je dokaziv u PS*

17. $R_E(x)$ – E_x *je odbaciv u PS*

Dokaz.

1. $(\forall y \leq x)(y\mathcal{P}x \Rightarrow 5\mathcal{P}y)$
2. $(\exists y \leq x)(Fl(y) \wedge x = 26y3)$
3. $St_{13}(x)$
4. $z = x\, pl\, y\,, z = x\, tim\, y\,, z = x\, exp\, y\,, z = s(x)$
5. $Seq(x) \wedge (\forall y \in x)(Var(y) \vee Num(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)R_1(z, w, y))$
6. $\exists y(Seqt(y) \wedge x \in y)$
7. $(\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(tm(y) \wedge tm(z) \wedge (x = y\, id\, z \vee x = y\, le\, z))$
8. $(\exists z \leq y)(Var(z) \wedge y = 9zx)$
9. $z = x\, imp\, y \vee z = neg(x) \vee Gen(x, z)$
10. $Seq(x) \wedge (\forall y \in x)(f_0(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)R_2(z, w, y))$
11. $\exists y(Seqf(y) \wedge x \in y)$
12. Za $n \leq 19$ označimo sa $A_n(x)$ uslov da je E_x aksioma šeme n. Za svako n se dokazuje slično da je $A_n(x)$ aaritmetički uslov, pa ćemo razmotriti samo nekoliko karakterističnih slučajeva.
    Razmotrimo prvo $A_1(x)$. Imamo da je E_x aksioma šeme 1 akko postoje formule E_y i E_z takve da je $E_x = (E_y \Rightarrow (E_z \Rightarrow E_y))$, tako da je $A_1(x)$ ekvivalentno sa
    $$(\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(fm(y) \wedge fm(z) \wedge x = y\, imp(z\, imp\, y))\,.$$
    Razmotrimo sad A_4. Neka je $\varphi(y, z, w)$ Gedelov broj od $\forall E_y((E_z \Rightarrow E_w) \Rightarrow (\forall E_y E_z \Rightarrow \forall E_y E_w))$. Lako se vidi da je funkcija $\varphi(y, z, w)$ aaritmetička. Sad imamo da $A_4(x)$ vrijedi akko postoje brojevi $y, z, w \leq x$ takvi da je $Var(y), fm(z), fm(w)$ i $x = \varphi(y, z, w)$.
    Za aksiome 8-18 dokaz je trivijalan, jer su to pojedinačne aksiome (a ne šeme), pa je uslov $A_i(x)$ ekvivalentan sa $x = g_i$, gdje je g_i Gedelov broj aksiome i.
    Konačan zaključak slijedi iz $A(x) = A_1(x) \vee \cdots \vee A_{19}(x)$.
13. $y = x\, imp\, z$
14. $MP(x, y, z) \vee Gen(x, z)$
15. $Seq(x) \wedge (\forall y \in x)(A(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)Der(z, w, y))$
16. $\exists y(Pf(y) \wedge x \in y)$

17. $P_E(neg(x))$ $\square$

Aksiomatski sistem nazivamo **korektnim** ako je svaka dokaziva rečenica u njemu tačna i svaka odbaciva rečenica netačna.
Rečenica u proizvoljnom aksiomatskom sistemu naziva se **odlučiva** ako je dokaziva ili odbaciva. U protivnom, rečenica je **neodlučiva** .
Aksiomatski sistem se naziva **potpun (kompletan)** ako je svaka rečenica u tom sistemu odlučiva.
Ako u sistemu postoje neodlučive rečenice, sistem je **nepotpun (nekompletan)** .

Teorema 3 (Gedel) *Ako je PS korektan sistem, tada je on nepotpun.*

Dokaz. Skup P_E je aaritmetički, pa je i skup P_E^c aaritmetički. Slijedi da taj skup ima svoju Gedelovu rečenicu H. Ta rečenica je tačna akko nije dokaziva. Ako je sistem korektan, tada H mora biti tačna i nedokaziva. Kako je rečenica $\neg H$ netačna, to i ona nije dokaziva, pa je H neodlučiva. $\square$

4 Nepotpunost Peanove aritmetike

Aritmetički term (formula) je term (formula) koji ne sadrži eksponencijalni simbol E.
Aritmetički skup (relacija) je skup (relacija) opisiv aritmetičkom formulom.
Aksiomatski sistem PA (**Peanova aritmetika**) je sistem PS bez aksiomskih šema 17. i 18., pri čemu u ostalim aksiomskim šemama termi i formule predstavljaju aritmetičke terme i formule.
Atomična Σ_0-formula je formula jednog od sljedeća četiri tipa:

$$c_1 + c_2 = c_3, \quad c_1 \cdot c_2 = c_3, \quad c_1 = c_2, \quad c_1 \leq c_2 ,$$

gdje su c_1, c_2, c_3 promjenljive ili numerali (neki mogu biti promjenljive, a neki numerali).
Klasu **Σ_0-formula** definišemo sljedećom induktivnom šemom:

1. Svaka atomična Σ_0-formula je Σ_0-formula.
2. Ako su F i G Σ_0, tada su $\neg F$ i $F \Rightarrow G$ takodje Σ_0 .
3. Za svaku Σ_0-formulu F, proizvoljnu promjenljivu v_i i za svako c koje je ili numeral ili promjenljiva različita od v_i. izraz

   $$\forall v_i (v_i \leq c \Rightarrow F)$$

   je Σ_0-formula.

Relacija je Σ_0 (ili **konstruktivna aritmetička relacija**) akko je opisana nekom Σ_0-formulom.
Σ_1-formula je formula oblika

$$\exists v_{n+1} F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}) ,$$

gdje je $F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ neka Σ_0-formula.
Za skup (relaciju) kažemo da je Σ_1 ako je opisiv nekom Σ_1-formulom.
Dakle, Σ_0-formule su one koje sadrže samo ograničene kvantifikatore, a Σ_1-formule su one koje počinju jednim neograničenim egzistencijalnim kvantifikatorom i nemaju drugih neograničenih kvantifikatora.
Induktivno definišemo klasu **Σ-formula**:

1. Svaka Σ_0-formula je Σ-formula.
2. Ako je F Σ-formula, onda je za svaku promjenljivu v_i izraz $\exists v_i F$ takodje Σ-formula.
3. Ako je F Σ-formula, onda za svake dvije različite promjenljive v_i i v_j formule $(\exists v_i \leq v_j)F$ i $(\forall v_i \leq v_j)F$ su Σ-formule i za svaki numeral n formule $(\exists v_i \leq \overline{n})F$ i $(\forall v_i \leq \overline{n})F$ su Σ-formule.
4. Za bilo koje Σ-formule F i G, formule $F \vee G$ i $F \wedge G$ su Σ-formule. Ako je F Σ_0-formula i G Σ-formula, tada je $F \Rightarrow G$ Σ-formula.

Σ-formula može sadržati proizvoljno mnogo neograničenih egzistencijalnih kvantifikatora, ali svi univerzalni kvantifikatori moraju biti ograničeni.
Primijetimo da je za svaku Σ_0-relaciju $R(x, y, z_1, \ldots, z_n)$ relacija $(\forall x < y)R(x, y, z_1, \ldots, z_n)$ takodje Σ_0.

Lema 2 *Za bilo koji prost broj p sljedeći uslovi su Σ_0.*

1. $x\, div\, y$ *– y je djeljivo sa x*
2. $St_p(x)$
3. $y = p^{l_p(x)}$

Dokaz.

1. $x\, div\, y \Leftrightarrow (\exists z \leq y)(x \cdot z = y)$
2. $St_p(x) \Leftrightarrow (\forall z \leq x)((z\, div\, x \wedge z \neq 1) \Rightarrow p\, div\, z)$
3. $y = p^{l_p(x)} \Leftrightarrow (St_p(y) \wedge y > x \wedge y > 1) \wedge (\forall z < y)\neg(St_p(z) \wedge z > x \wedge z > 1)$.
   □

Propozicija 6 *Za svaki prost broj p relacija $x *_p y = z$ je Σ_0.*

Dokaz. $x *_p y = z \Leftrightarrow x \cdot p^{l_p(y)} + y = z \Leftrightarrow (\exists w_1 \leq z)(\exists w_2 \leq z)(w_1 = p^{l_p(y)} \wedge w_2 = x \cdot w_1 \wedge w_2 + y = z)$ □

Propozicija 7 *Za bilo koji prost broj p sljedeće relacije su Σ_0.*

1. $x\mathcal{B}_p y$, $x\mathcal{E}_p y$, $x\mathcal{P}_p y$
2. $x_1 *_p \cdots *_p x_n = y$

3. $x_1 *_p \cdots *_p x_n \mathcal{P}_p y$

Dokaz.

1. $x\mathcal{B}_p y \Leftrightarrow x = y \vee (x \neq 0 \wedge (\exists z \leq y)(\exists w \leq y)(St_p(w) \wedge (x \cdot w) *_p z = y))$,
   $x\mathcal{E}_p y \Leftrightarrow x = y \vee (\exists z \leq y)(z *_p x = y)$,
   $x\mathcal{P}_p y \Leftrightarrow (\exists z \leq y)(z\mathcal{E}_p y \wedge x\mathcal{B}_p z)$

2. Indukcijom po n.

3. $x_1 *_p \cdots *_p x_n \mathcal{P}_p y \Leftrightarrow (\exists z \leq y)(x_1 *_p \cdots *_p x_n = z \wedge z\mathcal{P}_p y)\,.$ □

Lema 3 (o konačnom skupu) *Postoji konstruktivna aritmetička relacija* $K(x,y,z)$ *koja ima sljedeća dva svojstva:*

1. Za svaki konačan niz $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ *elemenata skupa* $\mathbb{N}^2$ *postoji* $z \in \mathbb{N}$ *takav da je* $K(x,y,z)$ *akko je* (x,y) *jedan od datih parova.*

2. Ako vrijedi $K(x,y,z)$*, tada mora biti* $x \leq z$ *i* $y \leq z$ *.*

Dokaz. Pod *okvirom* ćemo podrazumijevati broj oblika $2\,t\,2$, gdje je t string jedinica. Neka je $1(x)$ uslov da je x string jedinica (naravno, u bazi 13). Uslov $1(x)$ je Σ_0, jer je

$$1(x) \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge (\forall y \leq x)(y\mathcal{P}x \Rightarrow 1\mathcal{P}y)\,.$$

Neka je $\theta = ((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$ dati konačan niz. Neka je f (bilo koji) okvir koji je duži od bilo kog okvira koji je dio nekog od brojeva a_i, b_i. Za takav f, broj $ffa_1fb_1ff \ldots ffa_nfb_nff$ nazovimo *nizovni broj* od θ (to nije nizovni broj u smislu kako smo ranije definisali). Relacija $x \,\mathrm{mf}\, y$ (x je maksimalan okvir u y) je Σ_0:

$$x \,\mathrm{mf}\, y \Leftrightarrow x\mathcal{P}y \wedge (\exists z \leq y)(1(z) \;\wedge\; x = 2z2 \wedge$$
$$\wedge \neg(\exists w \leq y)(1(w) \wedge 2zw2\mathcal{P}y))\,.$$

Sad definišemo traženu Σ_0-relaciju:

$$K(x,y,z) := (\exists w \leq z)(w \,\mathrm{mf}\, z \wedge$$
$$\wedge wwxwywww\mathcal{P}z \wedge \neg(w\mathcal{P}x) \wedge \neg(w\mathcal{P}y))\,.$$

Ako je z proizvoljan nizovni broj od θ, tada su ispunjeni traženi uslovi. □

Funkcija $\beta(x,y)$ se naziva **beta-funkcija** ako za bilo koji konačan niz $(a_0, \ldots, a_n)$ prirodnih brojeva postoji prirodan broj w takav da je

$$\beta(w,0) = a_0,\ \beta(w,1) = a_1, \ldots,\ \beta(w,n) = a_n\,.$$

Teorema 4 (o beta funkciji) *Postoji konstruktivna aritmetička beta-funkcija.*

Dokaz. Stavimo

$$\beta(w,i) := \begin{cases} \min\{k : K(i,k,w)\}, & \text{za } \{k : K(i,k,w)\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Pošto je K konstruktivna, lako se vidi da je to i β. Za dati niz $(a_0, \ldots, a_n)$ za w se može uzeti nizovni broj niza $((0,a_0), \ldots, (n,a_n))$. Tada je po definiciji $\beta(w,i) = a_i$. □

Teorema 5 *Relacija $x^y = z$ je Σ_1.*

Dokaz. Uslov $x^y = z$ je ispunjen akko postoji konačan niz $(a_0, \ldots, a_y)$ takav da je $a_0 = 1$, $a_y = z$ i $a_{i+1} = a_i \cdot x$ za sve $i < y$. To je ekvivalentno sa

$$\exists w(\beta(w,0) = 1 \wedge \beta(w,y) = z \wedge (\forall n < y)(\beta(w,n+1) = \beta(w,n) \cdot x)).$$

Posljedica 2 *Ako je A aritmetički skup, tada je i A^* aritmetički skup. Ako je A Σ-skup, tada je A^* takodje Σ.*

Dokaz. Relacija $13^x = y$ je Σ (čak Σ_1), pa je dijagonalna funkcija $d(x)$ takodje Σ. Ako je $D(v_1, v_2)$ Σ-formula koja opisuje relaciju $d(x) = y$ i $A(v_1)$ formula koja opisuje skup A, tada formula $\exists v_2(D(v_1,v_2) \wedge A(v_2))$ opisuje skup A^*. □

Teorema 6 (Tarski) *Skup T_A Gedelovih brojeva istinitih aritmetičkih rečenica nije aritmetički.*

Dokaz. Ako je T_A aritmetički, tada je i $(T_A^c)^*$ aritmetički. Medjutim, svaki aritmetički skup ima Gedelovu rečenicu (zasnovanu na *aritmetičkoj* formuli H), dok skup $(T_A^c)^*$ ne može imati Gedelovu rečenicu. □

Posljedica 3 *Skupovi P_E i R_E su Σ. Skup $(P_E^c)^*$ je aritmetički.*

Dokaz. Korekcijom prethodnih dokaza da su P_E i R_E aaritmetički (uslovi $St(x)$ i $x * y = z$ su Σ) dobijamo da su P_E i R_E Σ-skupovi, pa slijedi da je $(P_E^c)^*$ aritmetički skup. □

Teorema 7 (Gedel) *Pod pretpostavkom da je korektan, sistem PA je nepotpun.*

Dokaz. Kako je skup $(P_E^c)^*$ aritmetički, postoji aritmetička funkcija koja ga opisuje. Njena dijagonalizacija $H[\overline{h}]$ je aritmetička Gedelova rečenica za P_E^c, koja je tačna i neodlučiva u PS. Slijedi da je ta rečenica neodlučiva i u PA (jer je PA podskup od PS). Napomenimo da nam za dokaz nepotpunosti sistema PA nije neophodan sistem PS: malim preradama u dokazu nepotpunosti PS dobijamo samostalan dokaz nepotpunosti PA. □

5 Gedelov dokaz

Posmatrajmo proizvoljan aksiomatski sistem $\mathcal{S}$ čije su formule formule Peanove aritmetike, koji sadrži aksiome 1-7 i čija su pravila zaključivanja Modus ponens i generalizacija, dok umjesto aksioma 8-19 mogu biti potpuno proizvoljne aksiome. To je primjer *teorije prvog reda*.
Kažemo da je $\mathcal{S}$ **konzistentan** sistem ako nijedna rečenica nije dokaziva i odbaciva u $\mathcal{S}$.
Kažemo da je $\mathcal{S}$ ω**-nekonzistentan** sistem ako postoji formula $F(w)$ sa jednom slobodnom promjenljivom w takva da je rečenica $\exists w F(w)$ dokaziva, dok su sve rečenice $F(\overline{0}), F(\overline{1}), \ldots$ odbacive.
Naravno, ω-nekonzistentan sistem ne može biti korektan, medjutim moguće je da bude konzistentan.
Sistem je ω**-konzistentan** ako nije ω-nekonzistentan, tj. kad god je rečenica $\exists w F(w)$ dokaziva u $\mathcal{S}$, postoji neki prirodan broj n takav da rečenica $F(\overline{n})$ nije odbaciva u $\mathcal{S}$.
Ako je $\mathcal{S}$ ω-konzistentan, tada je i konzistentan.
Sistem $\mathcal{S}$ je **rekurzivan** ako je skup P Gedelovih brojeva dokazivih formula u $\mathcal{S}$ tipa Σ_1.
Kažemo da je $\mathcal{S}_1$ podsistem sistema $\mathcal{S}$ ako su sve rečenice koje su dokazive u $\mathcal{S}_1$, takodje dokazive i u $\mathcal{S}$.

5.1 Apstraktna teorema o nepotpunosti

Kažemo da formula $F(v_1)$ (čija je jedina slobodna promjenljiva v_1) **predstavlja** skup $A \subseteq \mathbb{N}$ u $\mathcal{S}$ ako A sadrži one i samo one prirodne brojeve n za koje je rečenica $F(\overline{n})$ *dokaziva* u $\mathcal{S}$. Opštije, formula $F(v_1, \ldots, v_k)$ predstavlja skup k-torki $(n_1, \ldots, n_k)$ za koje je $F(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$ dokaziva u $\mathcal{S}$.
Označimo sa P i R skupove Gedelovih brojeva dokazivih i odbacivih formula u $\mathcal{S}$, a sa P^* i R^* skupove svih n za koje je $E_n[\overline{n}]$ dokaziva, odnosno odbaciva u $\mathcal{S}$.

Lema 4 *Za bilo koju formulu $H(v_1)$ sa Gedelovim brojem h vrijedi:*

1. *$H(\overline{h})$ je dokaziva u $\mathcal{S}$ akko $h \in P^*$.*
2. *$H(\overline{h})$ je odbaciva u $\mathcal{S}$ akko $h \in R^*$.*

Dokaz. Rečenica $H(\overline{n}) \Leftrightarrow H[\overline{n}]$ tj. $H(\overline{n}) \Leftrightarrow \forall v_1(v_1 = \overline{n} \Rightarrow H(v_1))$ je posljedica aksioma 1-7, pa je dokaziva u $\mathcal{S}$. Dakle, $H(\overline{h})$ je dokaziva u $\mathcal{S}$ akko je $H[\overline{h}]$ dokaziva, što je ispunjeno akko $h \in P^*$. Analogno imamo za odbacivost. □

Teorema 8 *Ako je $\mathcal{S}$ konzistentan i $H(v_1)$ formula čija negacija predstavlja skup P^*, tada rečenica $H(\overline{h})$, gdje je h Gedelov broj formule H, nije ni dokaziva ni odbaciva u $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Prema uslovu za svako $n \in \mathbb{N}$ rečenica $H(\overline{n})$ je odbaciva akko $n \in P^*$. Slijedi da je $H(\overline{h})$ odbaciva akko $h \in P^*$. Slijedi da je $H(\overline{h})$ odbaciva akko

$h \in P^*$, što (zbog leme) vrijedi akko je $H(\overline{h})$ dokaziva. Zbog konzistentnosti slijedi da $H(\overline{h})$ nije ni dokaziva ni odbaciva. □

Posljedica 4 *Ako je P^* predstavljiv u $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}$ konzistentan, tada je $\mathcal{S}$ nepotpun.*

Dokaz. Ako formula $F(v_1)$ predstavlja P^*, tada negacija formule $\neg F(v_1)$ predstavlja P^*, pa nepotpunost slijedi iz prethodne teoreme. □

Slično se dokazuje i dualna teorema.

Teorema 9 *Ako je R^* predstavljiv u $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}$ konzistentan, tada je $\mathcal{S}$ nepotpun.*

Kažemo da formula $F(v_1, v_2)$ **nabraja** skup $A \subseteq \mathbb{N}$ u $\mathcal{S}$ ako za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

1. ako $n \in A$, onda postoji bar jedno $m \in \mathbb{N}$ takvo da je rečenica $F(\overline{n}, \overline{m})$ dokaziva u $\mathcal{S}$;

2. ako $n \notin A$, onda je za svako $m \in \mathbb{N}$ rečenica $F(\overline{n}, \overline{m})$ odbaciva u $\mathcal{S}$.

Lema 5 (o ω-konzistentnosti) *Ako je $\mathcal{S}$ ω-konzistentan sistem, onda je svaki nabrojiv skup takodje predstavljiv u $\mathcal{S}$. Preciznije, ako formula $F(v_1, v_2)$ nabraja skup A, tada formula $\exists v_2 F(v_1, v_2)$ predstavlja A u $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Ako $n \in A$, tada je za neko $\overline{m}$ rečenica $F(\overline{n}, \overline{m})$ dokaziva u $\mathcal{S}$, pa je rečenica $\exists v_2 F(\overline{n}, v_2)$ dokaziva u $\mathcal{S}$. Obrnuto, neka je $\exists v_2 F(\overline{n}, v_2)$ dokaziva u $\mathcal{S}$. Ako $n \notin A$, onda su sve rečenice $F(\overline{n}, \overline{0}), F(\overline{n}, \overline{1}), \ldots$ odbacive u $\mathcal{S}$, pa slijedi da je $\mathcal{S}$ ω-nekonzistentan, što je kontradikcija. □

Teorema 10 *Ako je neki od skupova P^* i R^* nabrojiv u $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}$ ω-konzistentan, tada je $\mathcal{S}$ nepotpun.*

Dokaz. Lako slijedi iz prethodnih tvrdjenja. □

Teorema 11 *Ako je $\mathcal{S}$ rekurzivan ω-konzistentan sistem u kom su svi Σ_1-skupovi nabrojivi, tada je $\mathcal{S}$ nepotpun.*

Dokaz. Pošto je $\mathcal{S}$ rekurzivan, skup P je Σ_1 (po definiciji). Slijedi da je i skup P^* Σ_1, pa je P^* nabrojiv i slijedi da je $\mathcal{S}$ nepotpun. □

Kažemo da formula $F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ **nabraja** relaciju $R(x_1, \ldots, x_n)$ ako za proizvoljne $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

1. ako je $R(x_1, \ldots, x_n)$, onda postoji k takav da je rečenica $F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, \overline{k})$ dokaziva u $\mathcal{S}$;

2. ako nije $R(x_1, \ldots, x_n)$, onda je za svako k rečenica $F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, \overline{k})$ odbaciva u $\mathcal{S}$.

Lema 6 *Ako su sve tačne Σ_0-rečenice dokazive u $\mathcal{S}$, tada su svi Σ_1-skupovi i relacije nabrojivi u $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Neka je $R(x_1, \ldots, x_n)$ proizvoljna Σ_1-relacija (ili skup za $n = 1$). Tada postoji Σ_0-relacija $S(x_1, \ldots, x_n, y)$ takva da je $R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \exists y S(x_1, \ldots, x_n, y)$ za sve $x_1, \ldots, x_n$. Neka je $F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ Σ_0-formula koja opisuje relaciju $S(x_1, \ldots, x_n, y)$. Dokazaćemo da F nabraja relaciju R u $\mathcal{S}$.

1. Neka $R(x_1, \ldots, x_n)$ vrijedi. Tada je za neko k $S(k_1, \ldots, k_n, k)$, pa je $F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, \overline{k})$ tačna, a pošto je Σ_0, slijedi da je dokaziva.

2. Neka $R(x_1, \ldots, x_n)$ ne vrijedi. Tada je za svako k $S(k_1, \ldots, k_n, k)$ netačno, pa je za svako k rečenica $F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, \overline{k})$ netačna, pa je rečenica $\neg F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, \overline{k})$ tačna i pošto je Σ_0, ona je dokaziva, što znači da je $F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, \overline{k})$ odbaciva za svako k. $\square$

Teorema 12 *Ako je $\mathcal{S}$ rekurzivan ω-konzistentan sistem u kom su sve tačne Σ_0-rečenice dokazive, tada je $\mathcal{S}$ nepotpun.*

Dokaz. Direktna posljedica prethodne teoreme i leme. $\square$

Kažemo da je Σ_0-rečenica **korektno odlučiva** u $\mathcal{S}$ ako je ona tačna i dokaziva ili netačna i odbaciva u $\mathcal{S}$.
Sistem $\mathcal{S}$ je **Σ_0-kompletan** ako su sve tačne Σ_0-rečenice dokazive u $\mathcal{S}$.

Propozicija 8 *Sljedeća dva uslova zajedno garantuju da je $\mathcal{S}$ Σ_0-kompletan sistem.*

C_1. *Svaka atomična Σ_0-rečenica je korektno odlučiva u $\mathcal{S}$.*

C_2. *Za bilo koju Σ_0-formulu $F(w)$ i proizvoljan prirodan broj n, ako su rečenice $F(\overline{0}), \ldots, F(\overline{n})$ sve dokazive u $\mathcal{S}$, tada je i rečenica $(\forall w \leq \overline{n})F(w)$ dokaziva u $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Indukcijom po stepenu rečenice dokazaćemo da su sve Σ_0-rečenice korektno odlučive u $\mathcal{S}$.

1. Prema C_1 sve Σ_0-rečenice stepena 0 su korektno odlučive u $\mathcal{S}$.

2. Ako su rečenice X i Y korektno odlučive, tada su i rečenice $\neg X$ i $X \Rightarrow Y$ korektno odlučive.

3. Bilo koja Σ_0-rečenica koja nije atomična ni oblika $\neg X$ ili $X \Rightarrow Y$ mora biti oblika $(\forall w \leq \overline{n})F(w)$, gdje je $F(w)$ Σ_0-formula manjeg stepena od $\mathcal{S}$. Pretpostavimo da je $S = (\forall w \leq \overline{n})F(w)$ tačna rečenica. Tada je svaka od rečenica $F(\overline{0}), \ldots, F(\overline{n})$ tačna, pa su sve te rečenice dokazive po induktivnoj hipotezi. Na osnovu uslova C_2 slijedi da je i rečenica S dokaziva. Pretpostavimo da je S netačna. Tada postoji $m \leq n$ tako da je $F(\overline{m})$ netačna rečenica, koja je po induktivnoj pretpostavci odbaciva u $\mathcal{S}$. Rečenice

$\overline{m} \leq \overline{n}$ i $\neg F(\overline{m})$ su obje dokazive u $\mathcal{S}$ (prva zbog C_1), pa je $\overline{m} \leq \overline{n} \Rightarrow F(\overline{m})$ odbacivo u $\mathcal{S}$. Medjutim, $(\forall w \leq \overline{n})F(w) \Rightarrow (\overline{m} \leq \overline{n} \Rightarrow F(\overline{m}))$ je dokazivo (logički validno), pa je S odbaciva u $\mathcal{S}$. Dokaz je završen. □

Propozicija 9 *Sljedeća tri uslova zajedno garantuju da je $\mathcal{S}$ Σ_0-kompletan sistem.*

D_1. *Sve tačne atomične Σ_0-rečenice su dokazive u $\mathcal{S}$.*

D_2. *Za bilo koja dva različita prirodna broja m i n rečenica $\overline{m} \neq \overline{n}$ je dokaziva u $\mathcal{S}$.*

D_3. *Za proizvoljnu promjenljivu w i prirodan broj n formula $w \leq \overline{n} \Rightarrow (w = \overline{0} \vee \cdots \vee w = \overline{n})$ je dokaziva u $\mathcal{S}$.*

Preciznije, uslovi D_1, D_2, D_3 impliciraju C_1, dok uslov D_3 implicira C_2.

Dokaz.

1. Dokažimo da vrijedi C_1. Treba samo dokazati da je svaka netačna atomična Σ_0-rečenica odbaciva u $\mathcal{S}$. Ako je ta rečenica oblika $\overline{m} = \overline{n}$, onda je odbaciva zbog D_2. Neka imamo netačnu rečenicu oblika $\overline{m} \leq \overline{n}$. Pošto je to netačno, sve rečenice $\overline{m} = \overline{0}, \overline{m} = \overline{1}, \ldots, \overline{m} = \overline{n}$ su netačne, pa su sve odbacive. Dakle, rečenica $\overline{m} = \overline{0} \vee \overline{m} = \overline{1} \vee \cdots \vee \overline{m} = \overline{n}$ je odbaciva. Sad iz D_3 slijedi (zamjenom $\overline{m}$ umjesto w) da je $\overline{m} \leq \overline{n}$ odbaciva.
   Posmatrajmo sad netačnu rečenicu oblika $\overline{m} + \overline{n} = \overline{k}$. Kako je rečenica netačna, slijedi da je $m+n = p$ za neko $p \neq k$. Tada je $\overline{m}+\overline{n} = \overline{p}$ dokaziva u $\mathcal{S}$ (prema D_1) i $\overline{p} \neq \overline{k}$ je dokaziva prema D_2, pa je i formula $\overline{m} + \overline{n} \neq \overline{k}$ dokaziva u $\mathcal{S}$ (za bilo koje terme t_1, t_2, t_3 formula $(t_1 = t_2 \wedge t_2 \neq t_3) \Rightarrow (t_1 \neq t_3)$ je validna).
   Slično se dokazuje i za netačne rečenice oblika $\overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{k}$.

2. Dokažimo da $D_3 \Rightarrow C_2$. Neka je $F(w)$ neka Σ_0-formula i neka su rečenice $F(\overline{0}), \ldots, F(\overline{n})$ sve dokazive. Tada su formule $w = \overline{0} \Rightarrow F(w), \ldots, w = \overline{n} \Rightarrow F(w)$ sve dokazive, pa je dokaziva i formula $(w = \overline{0} \vee \cdots \vee w = \overline{n}) \Rightarrow F(w)$, pa je zbog D_3 dokaziva i formula $w \leq \overline{n} \Rightarrow F(w)$. Prema pravilu generalizacije dokaziva je i formula $\forall w(w \leq \overline{n} \Rightarrow F(w))$, tj. $(\forall w \leq \overline{n})F(w)$. □

Neka je (Q) sistem dobijen od PA brisanjem aksiome 19 (indukcija) i (Q_0) sistem dobijen od Q brisanjem aksiome 16 $(v_1 \leq v_2 \vee v_2 \leq v_1)$.
Neka je (R) sistem čije su nelogičke aksiome:

Ω_1. sve rečenice $\overline{m} + \overline{n} = \overline{k}$, gdje je $m + n = k$

Ω_2. sve rečenice $\overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{k}$, gdje je $m \cdot n = k$

Ω_3. sve rečenice $\overline{m} \neq \overline{n}$, gdje su m i n različiti prirodni brojevi

Ω_4. sve formule $v_1 \leq \overline{n} \Leftrightarrow (v_1 = \overline{0} \vee \cdots \vee v_1 = \overline{n})$

Ω_5. sve formule $v_1 \leq \overline{n} \vee \overline{n} \leq v_1$

Neka je (R_0) sistem (R) bez aksiome Ω_5.

Propozicija 10 *Sistem* (R_0) *je* Σ_0*-kompletan.*

Dokaz. Za bilo koji prirodan broj n rečenica $\overline{n} = \overline{n}$ je teorema logike prvog reda sa jednakošću, pa je dokaziva u (R_0). Neka je $m \leq n$. Pošto je dokaziva $\overline{m} = \overline{m}$, dokaziva je i rečenica $\overline{m} = \overline{0} \vee \cdots \vee \overline{m} = \overline{n}$. Koristeći Ω_4 dobijamo da je dokaziva i $\overline{m} \leq \overline{n}$. Dakle, sve tačne rečenice oblika $\overline{m} \leq \overline{n}$ su dokazive u (R_0), pa zbog Ω_1 i Ω_2 slijedi da su sve tačne atomične Σ_0-rečenice dokazive u (R_0), pa je ispunjen uslov D_1. Uslov D_2 je ispunjen zbog Ω_3. Uslov D_3 slijedi kad se na Ω_4 primijeni generalizacija i izvrši zamjena promjenljive. □

Propozicija 11 (R_0) *je podsistem od* (Q_0).

Dokaz. Dovoljno je dokazati da su sve aksiome (R_0) dokazive u (Q_0).

1. Koristeći aksiomu 11 imamo da je $\overline{n}+\overline{1} = \overline{n+1}$, $\overline{n}+\overline{2} = \overline{n+2}, \ldots, \overline{n}+\overline{m} = \overline{n+m}$ (taj niz pravimo induktivno).

2. Slično, koristeći 1, dokazujemo $\overline{n}\cdot\overline{1} = \overline{n\cdot 1}$, $\overline{n}\cdot\overline{2} = \overline{n\cdot 2}, \ldots, \overline{n}\cdot\overline{m} = \overline{n\cdot m}$.

3. Treba dokazati da je $\overline{m} \neq \overline{n+m}$. Iz aksiome 8 imamo da

$$\overline{m} \neq \overline{n} \Rightarrow \overline{m+1} \neq \overline{n+1}$$

i za svako $n > 0$ rečenica $\overline{0} \neq \overline{n}$ je dokaziva (aksioma 9), pa induktivno dobijamo

$$\overline{1} \neq \overline{n+1}, \overline{2} \neq \overline{n+2}, \ldots, \overline{m} \neq \overline{n+m}.$$

4. Indukcijom po n dokazujemo da je $v_1 \leq \overline{n} \Leftrightarrow (v_1 = \overline{0} \vee \cdots \vee v_1 = \overline{n})$ dokazivo u (Q_0). Prvo, $v_1 \leq \overline{0} \Leftrightarrow v_1 = \overline{0}$ je dokazivo iz aksiome 14. Ako je

$$v_1 \leq \overline{n} \Leftrightarrow (v_1 = \overline{0} \vee \cdots \vee v_1 = \overline{n})$$

dokazivo, tada zbog

$$v_1 \leq \overline{n+1} \Leftrightarrow (v_1 \leq \overline{n} \vee v_1 = \overline{n+1})$$

(što dobijamo iz aksiome 15) slijedi na osnovu iskazne logike da je i

$$v_1 \leq \overline{n+1} \Leftrightarrow (v_1 = \overline{0} \vee \cdots \vee v_1 = \overline{n+1})$$

dokazivo. □

Propozicija 12 (R) *je podsistem od* (Q).

Dokaz. Kako je (R_0) podsistem od (Q_0), slijedi da je i podsistem od (Q). Takodje, Ω_5 se dokazuje u (Q) iz aksiome 16, pa je (R) podsistem od (Q). □

Teorema 13 *Sistemi* $(R_0), (R), (Q_0), (Q)$ *i PA su svi* Σ_0*-kompletni.*

Dokaz. Sistem (R_0) je Σ_0-kompletan i podsistem ostalih sistema. □

Teorema 14 (Gedel) *Ako je PA* ω*-konzistentna, onda je nepotpuna.*

Dokaz. Imamo da je PA rekurzivna Σ_0-kompletna teorija, pa iz ω-konzistentnosti slijedi nepotpunost. □

Teorema 15 (o ω-nepotpunosti) *Ako je* $\mathcal{S}$ *bilo koji* ω*-konzistentan rekurzivan* Σ_0*-kompletan sistem, tada je* $\mathcal{S}$ ω*-nepotpun, tj. postoji formula* $F(w)$ *takva da su sve rečenice* $F(\overline{0}), F(\overline{1}), \ldots$ *dokazive, dok univerzalna rečenica* $\forall w F(w)$ *nije dokaziva.*

Dokaz. Takva je formula $F(v_2) = \neg A(\overline{a}, v_2)$ koju smo ranije koristili. □

Zahvalnica

Autori se zahvaljuju anonimnim recezentima čije primjedbe i sugestije su pomogle da tklonimo greške i da značajno poboljšamo rad.

Reference

[1] A. Caicedo, *Goodstein's function*, Revista Columbiana de Matemáticas, **41** (2007)

[2] J. Conway, R. Guy, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, 1996.

[3] S. Feferman, H. Feferman, P. Maddy, J. Steel, *Does mathematics need new axioms?*, Bulletin of Symbolic Logic, **6** (2000), str. 401–413.

[4] Torkel Franzén, *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, A K Peters, Wellesley, 2005.

[5] H. Friedman, *Unprovable theorems*, Cal Tech Math Colloq, 2005.

[6] G. Gentzen, *Die Widersspruchfreiheit der reinen Zahlentheorie*, Mathematische Annalen **112** (1936), str. 493–565.

[7] K. Gödel, Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und Verwandterf Systeme I, Montshefte fur Mathematik und Physics, vol. 38 1931), p. 173-198. (engl. prevod: Gödel K. On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I, Dover, 1992)

[8] D. Gries, *The Science of Programming*, Springer, 1989.

[9] D. Hilbert, and P. Bernays. Grundlagen der Mathematik. Berlin, Springer, vol.1 1934, voL2 1939.

[10] R. Sz. Madarasz , *Univerzalne algebre, teorija skupova i mreža*, MAT-KOL, Podebna izdanja, Broj 2 (2004), Banja Luka 2004

[11] J. Miller, *On the independence of Goodstein's theorem*, Univ. of Arizona, 2001.

[12] F. Morić, *Klasichni dokazi Gedelove teoreme nekompletnosti i terminacija programa,* Diplomski rad, PMF, Banja Luka, 2008

[13] J. Paris, L. Kirby, *Accessible independence results for Peano arithmetic*, Bull. London Math. Soc., **14** (1982), str. 285–293.

[14] D. A. Romano, *Osnove matematike (II dio: Teorija skupova, Knjiga 2: Zermelo-Frankelova aksiomatska teorija skupova)*, MAT-KOL, Podebna izdanja, Broj 5 (2007), Banja Luka 2007

[15] R. M. Smullyan, *Theory of formal systems.* Annals of Mathematics Studies, (1961)

[16] R. M. Smullyan, *Forever undecided, a puzzle guide to Gödel,* Alfred A. Knopf, New York, 1987.

[17] R. M. Smullyan, *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Oxford, 1992.

[18] A. M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheindungsproblem*, Proceedings of the London Mathematics Society, ser. 2 v. 42, str. 230–265.

[19] N. K. Vereschagin, A. Shen *Nachala teorii mnozhestv*, Moskva, 1999.

Primljeno u redakciju časopisa: 1 Septembar, 2013